

УДК 532.546.013.4:536.24:519.6

© 2003 г. В. Н. ГОВОРУХИН, И. В. ШЕВЧЕНКО

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВТОРОГО ПЕРЕХОДА В ЗАДАЧЕ ПЛОСКОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

Рассмотрена задача фильтрационной конвекции в плоском прямоугольном контейнере с постоянно поддерживаемым линейным профилем температуры на границе. Методом Галеркина численно исследованы однопараметрические семейства стационарных режимов, являющиеся следствием существования косимметрии у соответствующих дифференциальных уравнений. Изучено возникновение и развитие неустойчивости на этих семействах, характеристики конвективных режимов при изменении фильтрационного числа Рэлея и отношения сторон прямоугольника. Показано, что число теряющих устойчивость режимов и тип неустойчивости, а также количество возникающих конвективных валов и теплопередача существенно зависят от геометрии контейнера. Обнаружен и исследован ряд бифуркаций однопараметрических семейств стационарных режимов.

Ключевые слова: фильтрационная конвекция, косимметрия, семейства равновесий.

Конвекция в наполняющей пористую среду и подогреваемой снизу жидкости уже много лет является предметом активного исследования. Внимание к этой задаче обусловлено многочисленными приложениями задачи фильтрационной конвекции в геофизике и других областях. Кроме того, эта задача представляет значительный интерес благодаря ряду новых явлений, не встречавшихся ранее в задачах математической физики. В частности, разносторонний анализ, как аналитический [1, 3], так и численный [9, 14], продемонстрировал ряд специфических бифуркационных явлений в задаче плоской фильтрационной конвекции.

При рассмотрении конвекции жидкости в горизонтальном цилиндре с произвольной формой поперечного сечения и с высокотеплопроводными боковыми стенками сначала формально [1], а затем строго [3] было установлено, что в результате первого перехода всегда возникает цикл (однопараметрическое семейство) стационарных конвективных режимов (равновесий). Экспериментальное подтверждение этого факта получено в [2]. Как показано в [3], причиной существования такого семейства является косимметрия, теория которой развита в [4–8]. В частности, если у системы дифференциальных уравнений существует семейство равновесий и спектр устойчивости меняется вдоль него, то это семейство не может быть следствием действия никакой группы симметрии [4], а косимметричная версия теоремы о неявной функции дана в [5].

Наличие у системы дифференциальных уравнений косимметрии ведет к возникновению специфических бифуркаций. В [6] рассмотрена бифуркация Андронова-Хопфа в косимметричных системах и показано, что рождение периодического режима в таких системах не обязательно связано с первой потерей устойчивости на семействе равновесий, а имеет место эффект затягивания этой бифуркации по параметру. Там же дано необходимое условие ответвления периодического режима от некосимметричного равновесия, принадлежащего однопараметрическому семейству. Возможные бифуркации самих однопараметрических семейств равновесий косимметричных динамических систем детально рассмотрены и проанализированы в [7, 8].

Аналитическое исследование однопараметрического семейства стационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции, проведенное в [1, 3, 13], позволяет получить асимптотику равновесного цикла и изучить его устойчивость вблизи би-

фуркации рождения. Вопросы же о том, что происходит с семейством при росте надкритичности, как изменяется устойчивость равновесий семейства при изменении параметров, как происходит первая потеря устойчивости на семействе, не поддаются аналитическому изучению и требуют численного исследования. Анализ возникновения неустойчивости на семействе устойчивых стационаров и исследование изменения конвективных режимов при росте числа Рэлея для случаев узкого и широкого контейнеров проведены с применением метода Галеркина в [9, 10, 12]. Часть этих результатов воспроизведена с использованием разностных методов [15].

В настоящее время актуальным является изучение характера второго перехода при изменении геометрии исследуемой области от узкого контейнера к широкому, чему и посвящено это исследование. Здесь проблема второго перехода понимается не в классическом смысле, так как при возникновении неустойчивости на семействе вторичных стационарных режимов остается бесконечно много устойчивых режимов и качественно новые течения могут не возникать. Под вторым переходом понимается возникновение неустойчивости на семействе вторичных конвективных режимов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим прямоугольный контейнер $D = [0, a] \times [0, b]$, заполненный пористой средой и насыщенный жидкостью. Запишем уравнения гравитационной конвекции жидкости, находящейся в контейнере D и подогреваемой снизу, в виде [1, 3]

$$\Delta\psi = \theta_x, \quad \theta_t + \psi_y\theta_x - \psi_x\theta_y = \Delta\theta + \lambda\psi_x \quad (1.1)$$

Здесь $\psi(x, y, t)$ – функция тока, $\theta(x, y, t)$ – отклонение температуры от равновесного по вертикали профиля, x, y – декартовы координаты на плоскости, t – время, а индекс при функции определяет соответствующую производную. Параметр λ – фильтрационное число Рэлея: $\lambda = \beta gAKl/(\chi\nu)$, где β – коэффициент теплового расширения, g – ускорение силы тяжести, A – характерная разность температур, K – проницаемость, l – характерная длина, χ, ν – коэффициенты температуропроводности и кинематической вязкости жидкости.

На границе области D заданы краевые условия, соответствующие постоянному линейному температурному профилю на границе и ее непроницаемости

$$[\theta]_{\partial D} = [\psi]_{\partial D} = 0 \quad (1.2)$$

Начальное условие для системы (1.1), (1.2) имеет вид

$$\theta(x, y, t = 0) = \theta_0(x, y) \quad (1.3)$$

где $\theta_0(x, y)$ – заданная в D функция.

Для каждого фиксированного t из первого уравнения (1.1) можно выразить ψ через θ , решая краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона. В итоге получаем

$$\psi = G\theta_x \quad (1.4)$$

где G – соответствующий оператор Грина.

Задача (1.1), (1.2) обладает косимметрией [3, 4]. Это означает, что с учетом (1.4) выполняется равенство

$$\int_D (\Delta\theta - \psi_y\theta_x + \psi_x\theta_y + \lambda\psi_x)\psi dx dy = 0 \quad (1.5)$$

Система уравнений (1.1) имеет две дискретные симметрии в силу инвариантности относительно замен

$$x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow y, \quad \psi \rightarrow -\psi, \quad \theta \rightarrow \theta \quad (1.6)$$

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow -y, \quad \psi \rightarrow -\psi, \quad \theta \rightarrow -\theta \quad (1.7)$$

Рассматриваемая система уравнений глобально разрешима, диссипативна, и при малых значениях параметра λ глобально устойчиво состояние покоя. Выражение для критических значений устойчивости состояния покоя имеет вид [4]

$$\lambda_{m,n} = 4\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

Все критические числа (1.8) по крайней мере двукратны, и каждому переходу параметра λ через значение $\lambda_{m,n}$ соответствует бифуркация рождения однопараметрического семейства стационарных режимов. В [3] показано, что первое критическое значение $\lambda_{1,1}$ всегда двукратно и при $\lambda = \lambda_{1,1}$ от состояния покоя ответвляется цикл устойчивых стационарных режимов. Все равновесия семейства нейтрально устойчивы вдоль цикла и асимптотически устойчивы в трансверсальных к нему направлениях, и их спектр зависит от координат равновесия. Зависимость собственных значений равновесий вдоль семейства от координат стационаров говорит о том, что это семейство не может быть результатом действия никакой группы симметрий [4]. Каждому переходу λ через последующие критические значения $\lambda_{m,n}$ соответствует бифуркация рождения цикла неустойчивых стационаров.

Аналитическое изучение возникающих семейств стационарных режимов на данный момент возможно только вблизи бифуркации их рождения [1, 3, 13], а для анализа возникновения на них неустойчивости и других бифуркаций приходится прибегать к численному исследованию.

2. Аппроксимация уравнений и схема численного исследования. Для аппроксимации задачи (1.1)–(1.3) используется метод Галеркина. Решение задачи разыскивается в форме

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} \psi_{i,j}(t) \phi_{i,j}(x, y) \\ \theta &= \sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} \theta_{i,j}(t) \phi_{i,j}(x, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\phi_{i,j}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(m_i \frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(n_j \frac{\pi y}{b}\right)$$

Подстановка (2.1) в (1.1) и операции проектирования приводят к конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $N = nx \times ny$ относительно функций $\theta_{i,j}$. Коэффициенты $\theta_{i,j}$ однозначно выражаются через неизвестные $\theta_{i,j}$ из аппроксимации первого уравнения системы (1.1).

В [9, 10] в качестве входящих в (2.1) функций использовались $\theta_{i,j}(x, y)$ с номерами $m_i = i$ ($i = 1, \dots, nx$) и $n_j = j$ ($j = 1, \dots, ny$) (схема А). Здесь в качестве m_i и n_j брались номера, соответствующие N первым по величине критическим значениям $\lambda_{m,n}$ (схема В), т.е. $m_i = m$ и $n_j = n$, определяемых выражением (1.8). Использование схемы В, как показали расчеты, позволило снизить порядок аппроксимирующей системы по сравнению со схемой А при сохранении требуемой погрешности. В частности, схема В точнее аппроксимирует критические значения $\lambda_{m,n}$. В табл. 1 приведены приближенные значения первых десяти критических значений, полученных двумя способами, при $N = 100$ и соответствующие точные значения для самого сложного из рассмотренных в вычислительном отношении случая. При $nx \rightarrow \infty$ и $ny \rightarrow \infty$ оба варианта выбора функций $\phi_{i,j}(x, y)$ идентичны.

Таблица 1

λ	Схема А	Схема В	Точное значение
$\lambda_{1,1}$	0.7164	0.7156	0.7155
$\lambda_{2,1}$	1.0163	1.0123	1.0116
$\lambda_{3,1}$	1.5225	1.5075	1.5051
$\lambda_{4,1}$	2.2610	2.2026	2.1959
$\lambda_{1,2}$	2.5696	2.5666	2.5660
$\lambda_{2,2}$	2.8852	2.8645	2.8621
$\lambda_{5,1}$	3.4239	3.1004	3.0842
$\lambda_{3,2}$	5.6629	3.3615	3.3556
$\lambda_{4,2}$	5.7370	4.0602	4.0465
$\lambda_{6,1}$	6.2094	4.2066	4.1699

Порядок аппроксимации (число N), требуемый для получения правильных результатов зависит от значений параметров. В частности, отмеченные в [9] недостатки использования галеркинских аппроксимаций низких порядков позволяют сделать вывод о плохом описании изучаемого явления маломодовыми системами. Применение метода Галеркина сохраняет косимметрию, однако переход к конечномерной системе может нарушить свойство диссипативности исходной задачи, что влечет появление решений, стремящихся к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$ и больших значениях параметра λ . При росте числа Рэлея это требует использования аппроксимаций высоких порядков.

Для проверки адекватности вычислений рассматривались аппроксимации различных порядков и проводился сравнительный анализ результатов. Размерность системы N считалась достаточной только в том случае, если увеличение N в 2 раза влекло изменение численных результатов, не превосходящее 5%. В численном исследовании рассматривались системы порядка $N = 400$. Такой порядок аппроксимации гарантирует допустимое расхождение для систем порядка $N = 400$ и 800 в наилучшем случае – исследовании широкого контейнера ($a = 20$, $b = 8$) на рассматриваемом интервале изменения параметров.

Наличие у систем дифференциальных уравнений косимметрии приводит к существованию кривой равновесий с неявно заданным параметром и сильно вырождению задач поиска и анализа равновесий. В [12] описан алгоритм, позволяющий анализировать такие семейства и используемый в расчетах. Метод вычисления основан на косимметричной версии теоремы о неявной функции [3, 6]. Ветвь равновесий находится как решение задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, правая часть которой определяется ядром линеаризованного в окрестности семейства оператора исходной системы. Для анализа бифуркаций семейств использовался метод продолжения по параметру, а для численного решения задач Коши – метод Рунге–Кутты 4-го порядка.

Исследование полученных при аппроксимации уравнений в частных производных систем обыкновенных дифференциальных уравнений высоких порядков требует больших вычислительных мощностей, для чего были разработаны параллельные алгоритмы описанных методов [11], что позволило провести расчеты на высокопроизводительных кластерах ЮГИНФО РГУ и НИВЦ МГУ.

3. Результаты исследования. В этом разделе представлены результаты расчета критических кривых при изменении параметра b и фиксированном значении параметра $a = 20$. Проведен численный анализ возникновения неустойчивости на первичных од-

нопараметрических семействах стационарных конвективных режимов и последующих перестроек этих семейств.

При дальнейшем изложении материала под вторым переходом (первой потерей устойчивости) понимается возникновение неустойчивости на семействе стационарных режимов. Отметим, что потеря устойчивости в случае существования однопараметрического семейства равновесий в косимметричном случае не обязательно связана с возникновением качественно новых режимов. Последующие рассматриваемые переходы отождествляются с появлением новых участков неустойчивости, изменением ее характера на границе устойчивых и неустойчивых дуг или бифуркацией кривых равновесий. Здесь рассматриваются только один-два следующих за возникновением неустойчивости перехода. Также исследуются бифуркации однопараметрических семейств, затрагивается ряд вопросов, связанных с различными характеристиками конвективных режимов (характер возникающих течений, средняя и локальная теплопередачи), и их изменение при варьировании высоты контейнера.

Часть результатов исследований представлена графически, где в качестве осей координат выбраны вертикальный поток тепла Nu_v через нижнюю границу и горизонтальный поток тепла Nu_h через середину области, определяемые выражениями

$$Nu_v = \int_0^a \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_{y=0} dx, \quad Nu_h = \int_0^b \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{x=\frac{a}{2}} dy$$

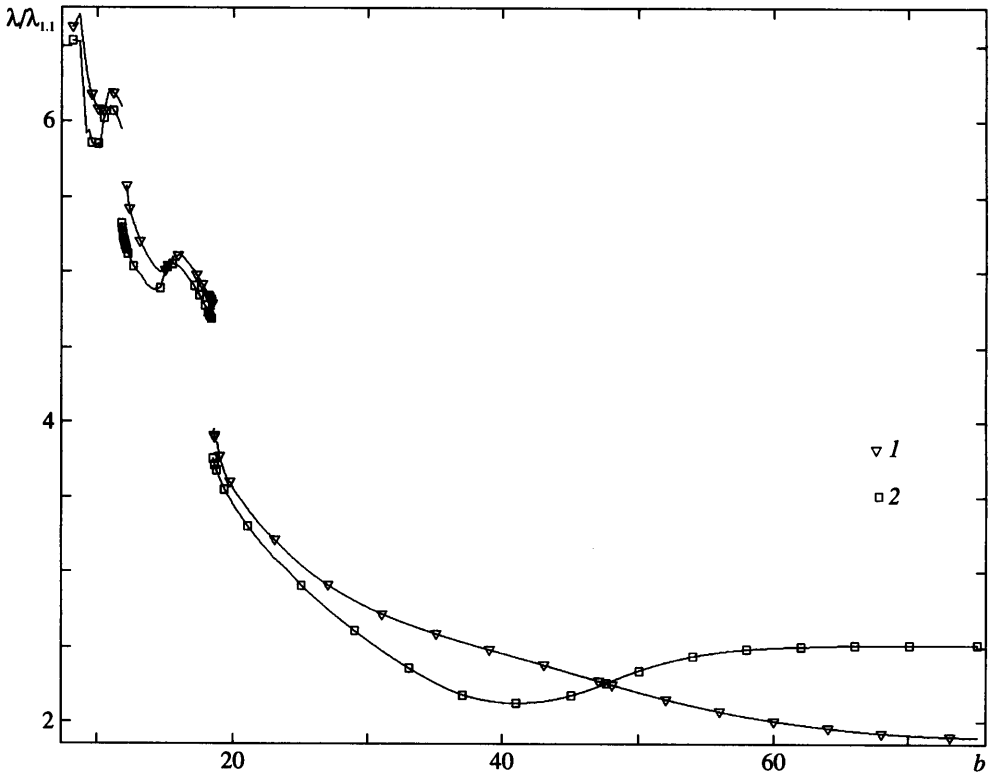
Значение Nu_v определено с точностью до константы $-A/b$.

Возникновение неустойчивости. Исследование возникновения неустойчивости на первичном семействе стационаров проводилось по следующей схеме. Для каждого фиксированного значения параметра $b \in [8, 75]$ кривая равновесий продолжалась с малым шагом, изменяющимся в интервале $[10^{-5}, 10^{-2}]$, по параметру λ от значения $\lambda_{1,1}$ до требуемого перехода. Таким образом построены критические кривые для монотонной и колебательной неустойчивостей на семействе стационаров.

Рассмотрим полученные критические кривые, соответствующие колебательной и монотонной потере устойчивости, при изменении отношения сторон контейнера. На фиг. 1 видно, что первая потеря устойчивости на однопараметрическом семействе стационарных конвективных режимов в зависимости от геометрии контейнера имеет различный характер и может быть как монотонной, так и колебательной. Разрывы критических кривых обусловлены задержкой потери устойчивости по параметру λ , связанной с бифуркациями семейств, описанными ниже.

Основываясь на результатах исследований можно утверждать, что неустойчивость в зависимости от геометрии контейнера может возникать в двух, четырех, шести или восьми точках. На фиг. 2 приведены семейства, соответствующие первой потере устойчивости и следующему переходу.

Одновременная потеря устойчивости четным числом режимов объясняется существованием у исходной задачи (1.1)–(1.3) двух дискретных симметрий (1.6), (1.7). В случае потери устойчивости двумя режимами они принадлежат одному из инвариантных подпространств. Потеря устойчивости в шести (фиг. 2, в) и восьми точках (фиг. 2, ж) реализуется в точках пересечения критических кривых (см. фиг. 1). В силу существования семейств равновесий пересечение критических кривых не связано с дополнительными вырождениями, так как потеря устойчивости происходит одновременно в разных точках семейства. В табл. 2 указаны число неустойчивых режимов и характер первой потери устойчивости в зависимости от интервала изменения параметра b . Из табл. 2 следует, что характер потери устойчивости одновременно в двух и четырех точках одинаков, тогда как в шести и восьми может иметь как монотонную, так и ко-



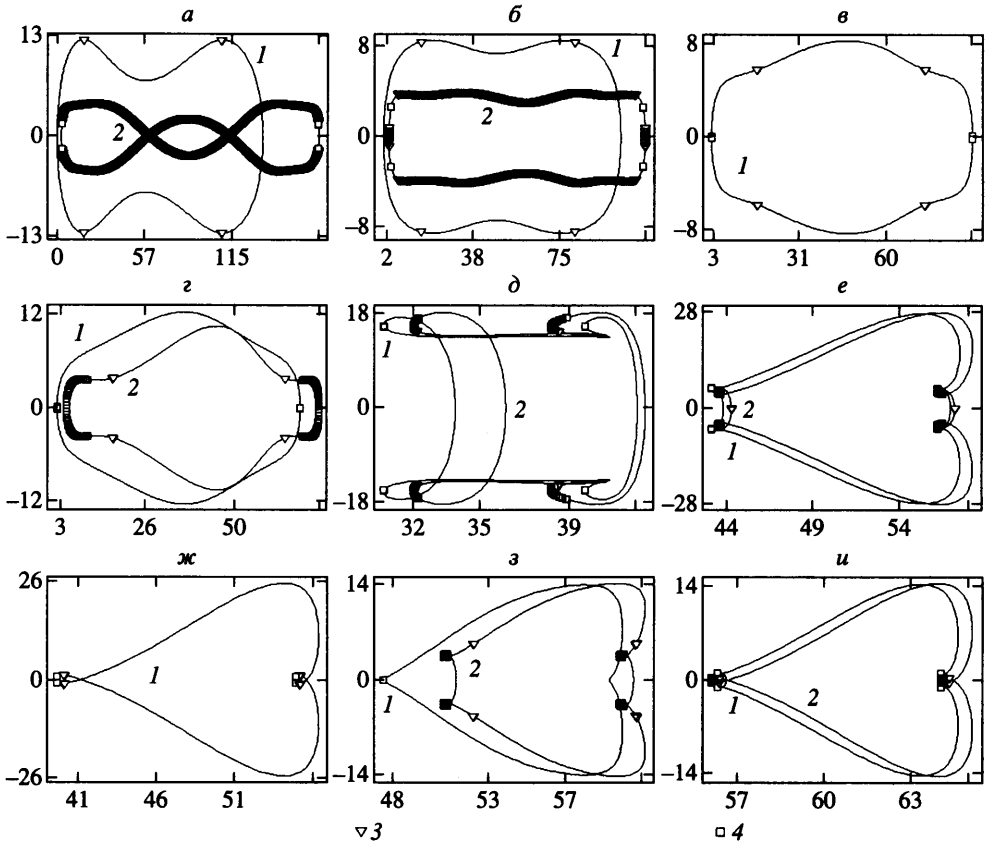
Фиг. 1. Критические кривые, соответствующие колебательной и монотонной потере устойчивости при изменении высоты прямоугольника b : 1 – колебательная потеря устойчивости, 2 – монотонная

лебательную потерю устойчивости, но в этом случае только симметричные режимы имеют одинаковый характер неустойчивости.

При изменении геометрии контейнера меняется не только характер потери устойчивости, но и форма, размеры однопараметрических семейств стационаров, физические характеристики конвективных режимов (см. фиг. 2).

Последующие бифуркации. После возникновения неустойчивости и последующего увеличения параметра λ число неустойчивых режимов увеличивается, образуя на семействе дуги (см. фиг. 2). Характер потери устойчивости режимами, образующих данные дуги, при малых надкритичностях такой же, как при возникновении. В частности, на фиг. 2,г при $\lambda > 0.26376$ происходит развитие монотонной неустойчивости, результатом которой является увеличение размера двух соответствующих дуг. При значительном увеличении параметра λ на дугах семейства происходят так называемые внутренние бифуркации семейств [7, 8], связанные с усложнением спектра устойчивости режимов.

Дальнейшее увеличение параметра λ может приводить к образованию неустойчивых режимов на новых участках семейства как с колебательным, так и с монотонным типом. На фиг. 2, и для $b = 8$ и $\lambda = 4.687$ первая потеря устойчивости монотонная, тогда как вторая, происходящая при $\lambda = 4.7513$, – колебательная. Характер новых неустойчивых дуг может и не отличаться. На фиг. 2,б показано, что первая колебательная потеря устойчивости сменяется повторной колебательной неустойчивостью. В ряде слу-



Фиг. 2. Проекция на плоскость (Nu_v, Nu_h) семейств, соответствующих первой (1) и второй (2) потери устойчивости для $a = 20$ и различных значениях b и λ : 3 – колебательная, 4 – монотонная неустойчивость; значения параметра λ до и после наклонной черты соответствуют кривым 1 и 2: а – $b = 75$, 0.20102/0.2668; б – $b = 55$, 0.23475/0.27564; в – $b = 47.5859$, 0.26369; г – $b = 40$, 0.26376/0.3044; д – $b = 20$, 0.68/0.7003; е – $b = 16$, 1.274/1.2974; ж – $b = 14.872$, 1.3918; з – $b = 10$, 2.875858/2.998; и – $b = 8$, 4.687/4.7513

чаев режимы с иным характером могут возникать на границе неустойчивости. Так для квадратной области (см. фиг. 2, д), колебательный тип ($\lambda = 0.68$) возникает на границе устойчивой дуги и дуги с монотонной неустойчивостью ($\lambda = 0.7003$).

Возможен и другой сценарий развития неустойчивости на семействе, связанный с бифуркацией самих кривых равновесий. В исследуемом диапазоне изменения параметра b обнаружена бифуркация отрыва семейств. Под бифуркацией отрыва здесь понимается расщепление семейства стационарных конвективных режимов на несколько семейств. После чего первичное семейство становится полностью устойчивым, а оторвавшиеся от него семейства содержат как устойчивые, так и неустойчивые режимы. При увеличении параметра λ на рассматриваемых интервалах оторвавшиеся семейства стягиваются в точку и исчезают. В результате остается только устойчивое первичное семейство, на котором при дальнейшем росте параметра λ возникает следующая потеря устойчивости. В этом случае бифуркация отрыва предшествует возникнове-

Таблица 2

Диапазон изменения параметра b	Число неустойчивых режимов	Характер потери устойчивости
$8 \leq b < 10$	4	Монотонная
$10 \leq b < 10.2$	2	»
$10.2 \leq b < 14.872$	4	»
$b = 14.872$	4	Колебательная
»	4	Монотонная
$14.872 < b < 15.061$	4	Колебательная
$b = 15.061$	4	»
»	4	Монотонная
$15.061 < b < 36$	4	»
$36 \leq b < 47.5859$	2	»
$b = 47.5859$	2	»
»	4	Колебательная
$47.5859 < b \leq 75$	4	»

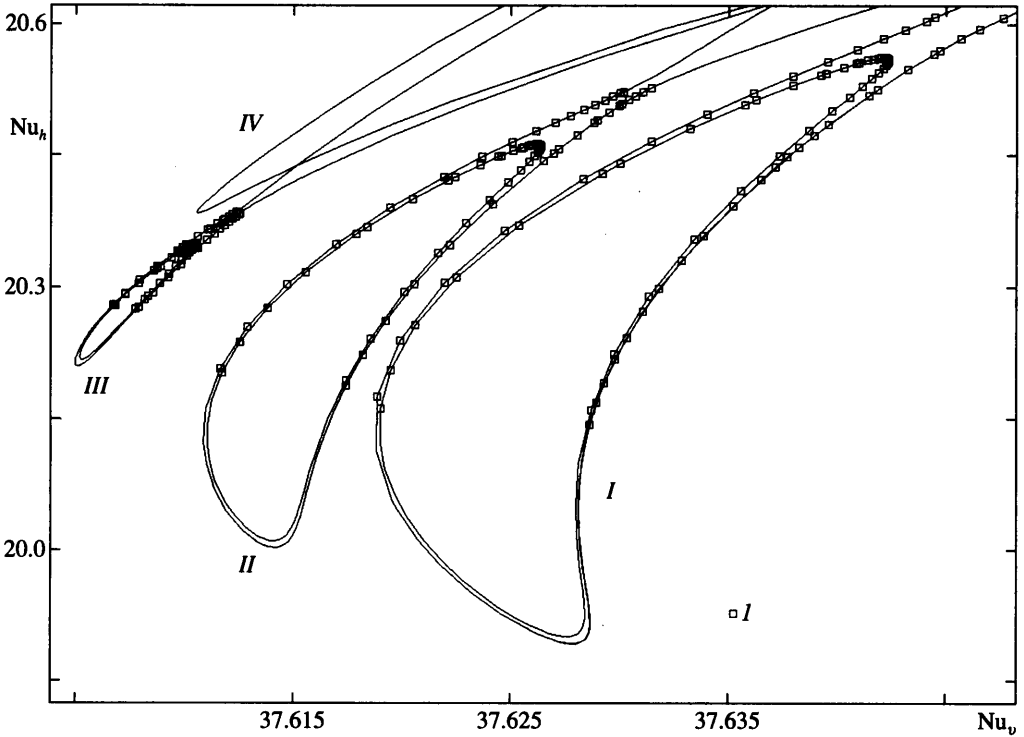
нию новых участков неустойчивости на семействе, что вызывает разрыв критических кривых второй потери устойчивости.

При уменьшении параметра b критические кривые, соответствующие первой потере устойчивости, отрыву семейства и исчезновению оторвавшегося семейства, пересекаются в точке (b^*, λ^*) , что приводит к их вырождению и отсутствию при $b < b^*$. В результате в окрестности точки (b^*, λ^*) и при $b < b^*$ потери устойчивости не происходит и имеет место разрыв критических кривых (см. фиг. 1) первой потери устойчивости. Такая ситуация наблюдалась при различных значениях параметров: $b^* \approx 11.61$, $\lambda^* \approx 2.097$; $b^* \approx 18.238$, $\lambda^* \approx 0.8502$.

Одна из симметричных частей кривых равновесий до и после бифуркации отрыва дана на фиг. 3 для нескольких значений параметров b и λ . При $b = 18.26$, $\lambda \leq 0.85$, возникает только монотонная потеря устойчивости. После бифуркации отрыва при $\lambda \approx 0.85$ первичное семейство становится полностью устойчивым, а характер неустойчивости на оторвавшихся семействах не отличается от характера первой потери устойчивости. При уменьшении b размеры оторвавшихся семейств сокращаются. В результате при $b \approx 18.238$ и $\lambda \approx 0.8502$ имеет место вырождение бифуркации отрыва, и при $b \leq 18.238$ ее не происходит.

При дальнейшем увеличении параметра λ возможны другие бифуркации семейств [12], появление автоколебательных режимов [10] и хаотическое поведение [11], причем вопрос о природе возникновения нестационарных режимов пока остается открытым. Детальный анализ полной потери устойчивости первичным семейством стационарных режимов в широком диапазоне изменения геометрии контейнера довольно труден из-за большого количества различных бифуркаций и весьма сложных сценариев потери устойчивости [8] при росте параметра λ .

Конвективные режимы и теплопередача. Численный анализ поведения конвективных режимов при изменении геометрии контейнера обнаружил, что аппроксимация системы (1.1) методом Галеркина при значении параметра λ , близкого к $\lambda_{1,1}$ – рождение семейства устойчивых режимов, полностью согласуется с теоретическими исследова-



Фиг. 3. Бифуркация отрыва и ее вырождение для $18.238 \leq b \leq 18.26$, $0.850002 \leq \lambda \leq 0.850208$; I – монотонная неустойчивость, а значение параметра λ перед и после наклонной черты приведено для первичного и оторвавшегося семейств соответственно: I – $b = 18.26$, $0.85/0.850002$, II – $b = 18.25$, $0.850097/0.850098$, III – $b = 18.24$, $0.850193/0.850194$, IV – $b = 18.238$, 0.850208

дованиями [13]. Зависимость числа конвективных валов от геометрии прямоугольного контейнера в окрестности рождения семейства стационаров дается формулами [13]

$$\frac{a^2}{b^2} \leq 3, \quad k = 2, 3; \quad 3 < \frac{a^2}{b^2} \leq 8, \quad k = 3, 4, \tag{3.1}$$

$$(n-1)^2 - 1 < \frac{a^2}{b^2} \leq n^2 - 1, \quad k = n, n+1, \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

где k – число валов.

Поставим каждому конвективному режиму семейства в соответствие действительное число $s \in [0, 1]$ – континуальный номер режима. Причем $s = 0$ соответствует точка $(\min(Nu_v), 0)$ плоскости (Nu_v, Nu_h) , а отсчет ведется по часовой стрелке. Для значения параметра λ , соответствующего второму переходу, рассмотрим характер поведения конвективных режимов, температурных полей и локальной теплопередачи при изменении параметров b и s в случае узкого ($a = 20$, $b = 75$), квадратного ($a = 20$, $b = 20$) и широкого ($a = 20$, $b = 10$) контейнеров. В силу симметрии исходной задачи будем изучать интервал $0 \leq s \leq 0.25$.

Результаты расчетов представлены на фиг. 4–6, на которых в качестве оси абсцисс выбрана горизонтальная координата прямоугольника $x \in [0, a]$, в качестве оси ординат для изображения функции тока и поля температур используется вертикальная координата прямоугольника $y \in [0, b]$, а для локальной теплопередачи ее величина.

Исследование поведения конвективных режимов показывает, что число конвективных ячеек и их форма существенно зависят от геометрии контейнера. На фиг. 4 приведено изменение функции тока вдоль семейства в случае узкого контейнера. Число конвективных валов при изменении параметра s меняется. Так, при $s = 0$ (см. фиг. 4,а) число конвективных валов равно двум, тогда как для $s = 0.1$ и 0.25 (фиг. 4,б и в, соответственно) наблюдается три вала для каждого режима. Из представленных результатов видно, что развитие конвективных режимов происходит как через увеличение числа валов k (переход от режима $s = 0$ к режиму $s = 0.1$), так и через изменение самих ячеек (например, переход от $s = 0.1$ к $s = 0.25$).

Подставляя значения $a = 20$, $b = 75$ в (3.1), получаем, что для $\lambda = 0.20102$ неравенство удовлетворяется, поскольку рождение семейства стационаров ($\lambda_{1,1} = 0.1057$) и первая потеря устойчивости ($\lambda = 0.20102$) лежат в малом диапазоне изменения параметра.

Уменьшение параметра b влечет изменение конвективных режимов. Для квадратной области (см. фиг. 5) конвективные режимы имеют больше (3, 4) ячеек по сравнению с узким контейнером. Как и в предыдущем случае, режимы эволюционируют через образование новых валов (смена режимов от $s = 0.25$ к 0) и изменения самих ячеек (от $s = 0$ к 0.14). В данном случае число конвективных валов не подчиняется формуле (3.1), так как рождение семейства стационаров ($\lambda_{1,1} = 0.1974$) и первая потеря устойчивости на нем ($\lambda = 0.68$) разнесены по параметру λ .

Дальнейшее уменьшение высоты контейнера показало, что, как и в предыдущих случаях при изменении параметра s вдоль семейства, режимы различаются как количеством ячеек, так и их формой. Так, при $s = 0$ (фиг. 6) число конвективных валов восемь, а для $s = 0.15, 0.25$ каждый из режимов имеет по семь валов. Изменения в поведении функции тока идет двумя путями: изменение числа (смена режимов от $s = 0$ к 0.15) и формы (например, смена от $s = 0.15$ к 0.25) конвективных ячеек. Таким образом, при увеличении ширины контейнера число конвективных валов возрастает, а их форма претерпевает значительные изменения.

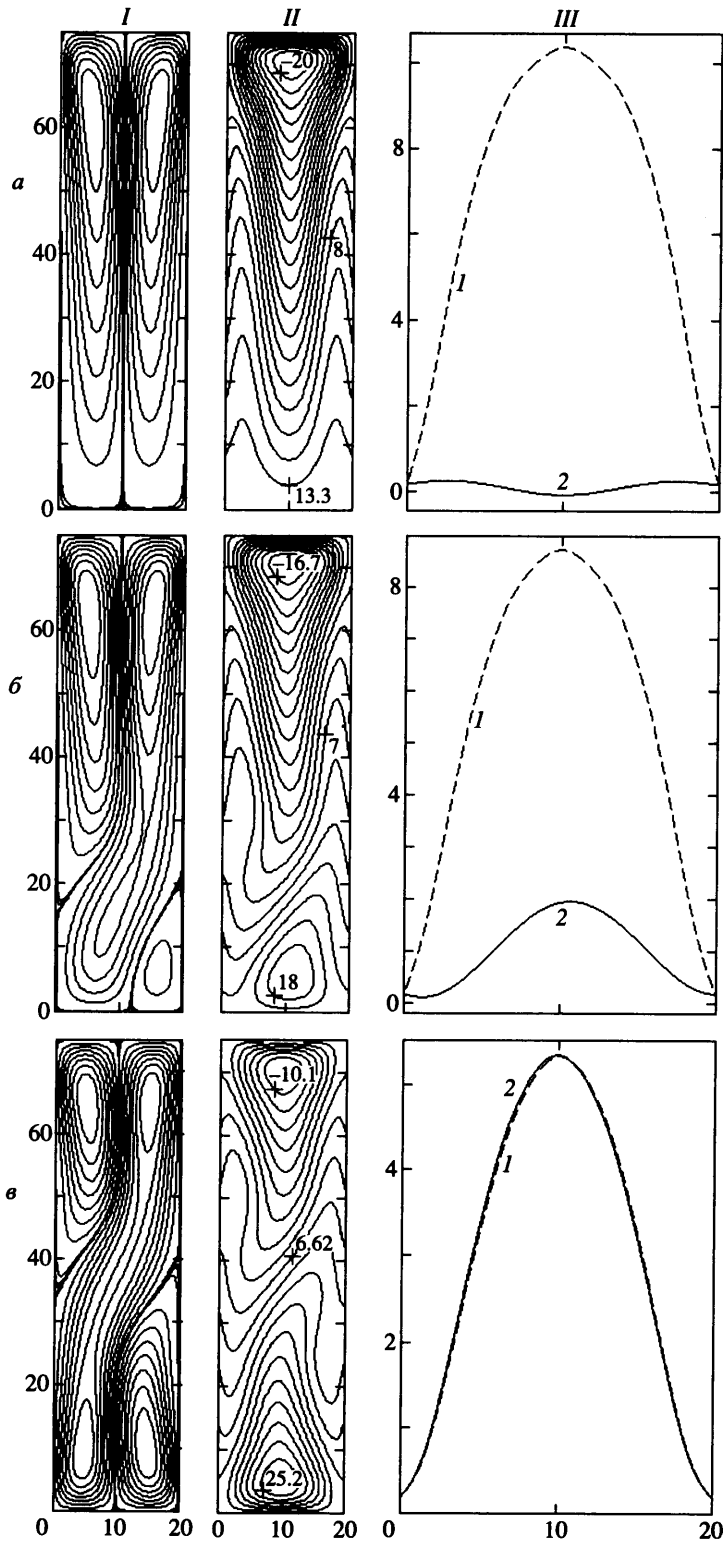
Результаты численных экспериментов показывают существенную зависимость локальной вертикальной теплопередачи на нижней и верхней границах контейнера, определяемой выражениями

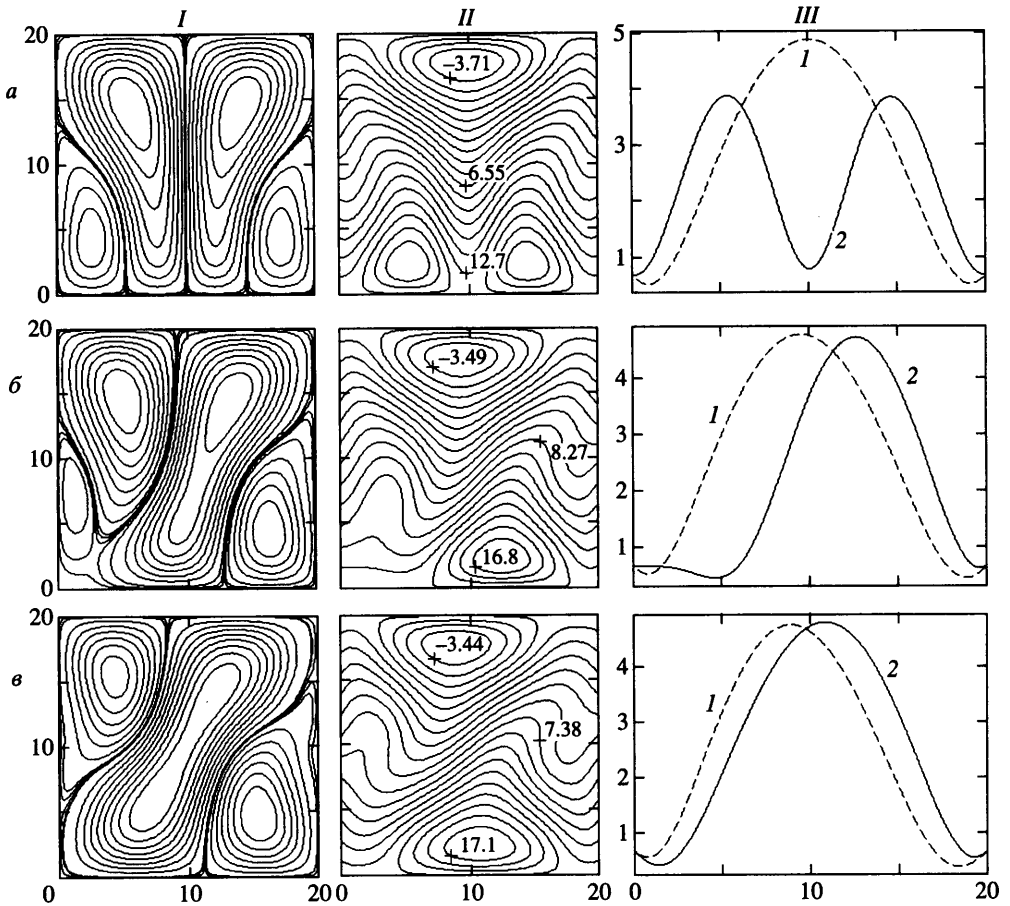
$$Nu_1^0(x) = \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_{y=0}, \quad Nu_1^b(x) = \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_{y=b}, \quad x \in [0, a]$$

от геометрии исследуемой области, т.е. от вида конвективных режимов. В случае узкого контейнера для конвективного режима с номером $s = 0$, фиг. 4,а значение локальной теплопередачи в середине контейнера на верхней границе гораздо выше, чем на нижней границе. Отметим, что существуют симметричные режимы ($s \in [0.75, 1]$), проводящие тепло на нижней границе лучше, чем на верхней. Иное поведение локальной теплопередачи обнаруживается для $s = 0.25$ – фиг. 4,в. Здесь локальные теплопередачи на верхней и нижней границах совпадают.

Переход от узкого контейнера к широкому меняет ситуацию. Локальная теплопередача на верхней и нижней границах имеет меньшее, чем для узкого контейнера, различие (см. фиг. 5,б, в). Хотя возможны и некоторые отклонения – фиг. 5,а.

Фиг. 4. Поведение функции тока (I), температуры (II) и локальной теплопередачи (III) для $b = 75$, $\lambda = 0.20102$ при изменении параметра s вдоль семейства: а – $s = 0$ – устойчивый режим; б – 0.1 – неустойчивый режим; в – 0.25 – устойчивый режим; 1 – $Nu_1^0(x)$; 2 – $Nu_1^b(x)$



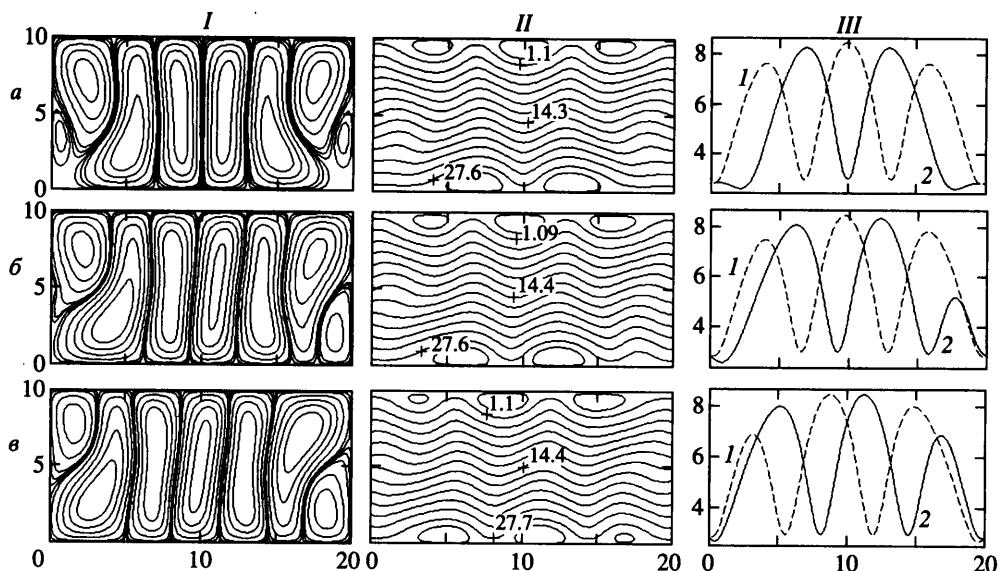


Фиг. 5. Поведение функции тока (*I*), температуры (*II*) и локальной теплопередачи (*III*) для $b = 20$, $\lambda = 0.68$ при изменении параметра s вдоль семейства: $a - s = 0$ – устойчивый режим; $b - 0.14$ – неустойчивый режим; $v - 0.25$ – устойчивый режим; 1 – $Nu_l^0(x)$; 2 – $Nu_l^1(x)$

Случай широкого контейнера (см. фиг. 6) характеризуется отсутствием режимов с ярко выраженной высокой и низкой теплопередачей. Здесь существует несколько минимумов и максимумов локальной теплопередачи, причем их количество и значение не сильно зависят от параметра s .

Обращаясь к анализу зависимости минимального и максимального числа Нуссельта от геометрии рассматриваемой области (фиг. 2), можно сделать вывод, что для узкого контейнера существуют режимы с высокой и низкой средней теплопередачей, тогда как для широкого прямоугольника средняя теплопередача для всех режимов различается не сильно.

Заключение. Характер возникающих режимов и их бифуркации существенно зависят от геометрии изучаемой области и фильтрационного числа Рэлея. Так, неустойчивость на однопараметрическом семействе вторичных стационарных режимов может возникать в двух, четырех, шести или восьми точках одновременно и быть как монотонной, так и колебательной. Показано, что при определенных отношениях сторон



Фиг. 6. Поведение функции тока (*I*), температуры (*II*) и локальной теплопередачи (*III*) для $b = 10$, $\lambda = 2.875858$ при изменении параметра s вдоль семейства: $a - s = 0$ – неустойчивый режим; $b - 0.15$ – устойчивый режим; $c - 0.25$ – устойчивый режим; $1 - Nu_i^0(x)$; $2 - Nu_i^b(x)$

прямоугольника имеют место бифуркации семейств, являющиеся причиной задержки потери устойчивости по параметру λ . Развитие конвективных режимов от момента рождения семейства до возникновения неустойчивости происходит следующим образом: в случае узкого прямоугольника ($b = 75$) при росте параметра λ форма существующих валов усложняется и возникают новые конвективные ячейки внутри уже существующих, а в случае широкого прямоугольника ($b = 8$) появляются новые конвективные валы. При изменении параметра b в указанном интервале одна ситуация непрерывно переходит в другую. Как локальная, так и средняя теплопередачи в случае широкого контейнера у режимов семейства не сильно различаются качественно и количественно. Для узких контейнеров эта разница значительна: существуют режимы с высокой и низкой теплопередачей на верхней и нижней границах прямоугольника.

Авторы благодарны В.И. Юдовичу и В.И. Полежаеву за полезные обсуждения и замечания, а также директору НИВЦ МГУ А.В. Тихонравову за предоставленные вычислительные ресурсы, сотруднику ЮГИНФО РГУ В.Н. Дацкоку и сотрудникам НИВЦ МГУ А.Н. Андрееву и С.А. Жуматию за техническую поддержку и помощь при проведении численных экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 02-01-00337, 01-01-22002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Любимов Д.В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. № 2. С. 131–137.
2. Глухов А.Ф., Любимов Д.В., Путин Г.Ф. Конвективные движения в пористой среде вблизи порога неустойчивости равновесия // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. № 3. С. 549–551.
3. Юдович В. И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Математические заметки. 1991. Т. 49. Вып. 5. С. 142–148.

4. *Yudovich V.I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // *Chaos*. 1995. V. 5. № 2. P. 402–411.
5. *Юдович В.И.* Теорема о неявной функции для косимметрических уравнений // *Мат. заметки*. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 313–317.
6. *Юдович В.И.* О бифуркации рождения цикла из семейства равновесий динамической системы и ее затягивании. // *ПММ*. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 22–34.
7. *Куракин Л.Г., Юдович В.И.* Бифуркации при монотонной потере устойчивости равновесия косимметричной динамической системы // *Докл. РАН*. 2000. Т. 372. № 1. С. 29–33.
8. *Kurakin L.G., Yudovich V.I.* Bifurcations accompanying monotonic instability of an equilibrium of a cosymmetric dynamical system // *Chaos*. 2000. V. 10. № 2. P. 311–330.
9. *Говорухин В.Н.* Численное исследование потери устойчивости вторичными стационарными режимами в задаче плоской конвекции Дарси // *Докл. РАН*. 1998. Т. 363. № 6. С. 772–774.
10. *Говорухин В.Н.* Анализ семейств вторичных стационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции в прямоугольном контейнере // *Изв. РАН. МЖГ*. 1999. № 5. С. 53–62.
11. *Говорухин В. Н., Шевченко И.В.* Численное решение задачи плоской конвекции Дарси на компьютере с распределенной памятью // *Вычисл. технол.* 2001. Т. 6. № 1. С. 3–12.
12. *Govorukhin V.N.* Calculation of one-parameter families of stationary regimes in a cosymmetric case and analysis of plane filtrational convection problem // *Continuation Methods in Fluid Dynamics / Eds. Henry D. and Bergeon A. Braunschweig: Vieweg*. 2000. P. 133–144.
13. *Nilsen T., Storesletten L.* An analytical study on natural convection in isotropic and anisotropic porous channels // *Trans. ASME. Heat Transfer*. 1990. V. 112. № 2. P. 396–401.
14. *Riley D.S., Winters K.H.* A numerical bifurcation study of natural convection in a tilted two-dimensional porous cavity. // *J. Fluid Mech*. 1990. V. 215. P. 309–329.
15. *Karasözen B., Tsybulin V.* Finite-difference approximations and cosymmetry conservation in filtrational convection problem // *Phys. Letters A*. 1999. V. 262. № 4–5. P. 321–329.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
14.V.2002