

УДК 532.5.013.4:541.115

© 2003 г. А. И. ОСИПОВ, Е. А. САВЧЕНКОВА, А. В. УВАРОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛН РЕЛАКСАЦИИ В НЕРАВНОВЕСНОМ ГАЗЕ

Дана строгая постановка задачи о структуре и устойчивости волн релаксации при произвольных числах Льюиса (Le) и Прандтля (Pr). Подробно проанализировано приближение высокой энергии активации, в котором малой величиной считается отношение длины зоны реакции к длине зоны прогрева.

Показано, что случай $Le = 1$ является особой точкой и только в ней справедлива схема расчета, использованная в [1]. При $Le \neq 1$ для малых длин волн возмущений вместо механизма Ландау–Даррье имеет место механизм усиления возмущений, при котором коэффициент усиления существенно зависит не только от степени неравновесности, но и от чисел Льюиса и Прандтля. Показано, как с уменьшением коэффициента теплового расширения среды происходит переход к известным результатам диффузионно-тепловой неустойчивости.

Ключевые слова: неравновесный газ, волны релаксации, устойчивость, числа Льюиса, Прандтля.

Волны релаксации в неравновесном газе – это простейший тип волн горения, в котором роль экзотермических реакций играет процесс дезактивации, протекающий во фронте волны. Известно много примеров волн, распространяющихся с небольшой скоростью в средах с энерговыделением. Помимо обычных волн горения [2] это и фронты светового горения [3–5], и фронты термоядерных реакций при взрывах сверхновых [6], и волны, связанные с фазовыми переходами в системе пар – жидкость [7–9]. Однако волны релаксации в отличие от перечисленных типов волн имеют сходные с волнами горения механизмы энерговыделения в поступательные степени свободы и диссипации – теплопроводность, колебательная теплопроводность (диффузия колебательных квантов) и вязкость.

Исследованию устойчивости волн горения посвящено значительное число работ. В работах [10, 11] были найдены неустойчивые длинноволновые решения, которые зависели только от соотношения конечной и начальной температур (или плотностей, так как давление в такой системе меняется незначительно) и не зависели от чисел Льюиса и Прандтля. Этот результат был назван парадоксом Ландау–Даррье, поскольку он противоречил экспериментальным данным.

Дальнейшие исследования пошли двумя путями. Рассматривались поправки к решению Ландау–Даррье. Поскольку в этом решении пренебрегается возмущениями температуры, то такую неустойчивость стали называть гидродинамической.

Второй путь – рассмотрение упрощенной задачи с возмущениями температуры и с равными нулю возмущениями гидродинамических параметров [2]. Этот тип неустойчивости называется диффузионно-тепловой неустойчивостью.

В области гидродинамической неустойчивости наиболее результативными оказались исследования, проведенные Маркштейном [12]. Обычно при исследовании устойчивости фронта пламени предполагается, что скорость распространения пламени постоянна (модель Ландау–Даррье). Проанализировав целый ряд экспериментов, включая собственные, Маркштейн предложил ввести зависимость скорости распространения от кривизны фронта пламени. Это позволило ограничить область существования неустойчивых решений. Существует значительное число работ с применением указанных алго-

ритмов. Рассматривалось как влияние вязкости [13, 14], так и влияние продольной компоненты скорости [15]. Попытки учесть влияние вязкости в линейном приближении привели к противоречивым результатам. В [13] утверждается, что неустойчивость пламени увеличивается с увеличением вязкости, в [14] предсказывается противоположный эффект.

В работах [1, 16] задача об устойчивости волны горения в газе решена без дополнительных предположений в частном случае подобия полей концентрации горючего компонента и температуры, т.е. для числа Льюиса $Le = 1$, когда число уравнений можно существенно уменьшить (число Льюиса $Le = D/\kappa$, где D – коэффициент диффузии, κ – коэффициент температуропроводности).

Таким образом, по крайней мере две проблемы теории горения остались нерешенными. Это определение области применимости теории гидродинамической устойчивости Ландау–Даррье и обобщение этой теории на случай учета реально существующих эффектов вязкости, а также создание общей теории устойчивости волн горения, которая в едином подходе позволила бы объяснить возникающие гидродинамическую и диффузионно-тепловую неустойчивости.

Целью настоящей работы является решение этих проблем на примере волн релаксации. Сначала рассмотрена общая задача об устойчивости волн релаксации, не предполагающая существование разрывов в профиле гидродинамических параметров. Затем эта задача будет решена в приближении высокой энергии активации для невязкого и вязкого газов. В заключение будет показано, как при стремлении коэффициента теплового расширения к нулю происходит переход к теории диффузионно-тепловой неустойчивости.

1. Постановка задачи. Рассматривается неравновесный двухтемпературный газ (с колебательной температурой T_v , не равной температуре поступательно-вращательных степеней свободы T), по которому распространяется плоская волна релаксации, отделяющая неравновесное состояние от равновесного. Система гидродинамических уравнений в общем случае имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} + \frac{\eta}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)s = \left(\frac{1}{T_v} - \frac{1}{T} \right) \frac{\varepsilon_{eq} - \varepsilon}{\tau} + \frac{\lambda_T}{\rho T} \Delta T + \frac{\lambda_v}{\rho T_v} D T_v + \frac{\eta}{\rho T} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\varepsilon = \frac{\varepsilon_{eq} - \varepsilon}{\tau} + \frac{\lambda_v}{\rho} \Delta T_v$$

$$\varepsilon = \varepsilon(T_v) = \frac{\hbar \tilde{\omega}}{m} \left[\exp\left(\frac{\hbar \tilde{\omega}}{k_B T_v} \right) - 1 \right]^{-1}, \quad \varepsilon_{eq} = \varepsilon(T) = \frac{\hbar \tilde{\omega}}{m} \left[\exp\left(\frac{\hbar \tilde{\omega}}{k_B T} \right) - 1 \right]^{-1}$$

Здесь ρ , s , \mathbf{v} , p – плотность, энтропия единицы массы, скорость и давление газа; η , λ_v и λ_T – коэффициенты вязкости, колебательной и поступательно-вращательной теплопроводности; $\tau = \tau(T)$ – время релаксации колебательной энергии, $\hbar \tilde{\omega}$ – величина колебательного кванта, $\varepsilon(T_v)$ и $\varepsilon_{eq}(T)$ – текущее и равновесное значение колебательной энергии единицы массы, k_B – постоянная Больцмана, m – масса молекулы, δ_{ik} – символ Кронекера, по повторяющимся индексам в третьем уравнении (1.1) происходит суммирование.

Стационарная волна, распространяющаяся вдоль оси x , описывается системой (1.1) при условии, что частные производные по t и y равны нулю. Неустойчивость возникает при появлении возрастающих возмущений, исходящих от самой волны. Перед и за волной релаксации возмущения раскладываются по модам, затухающим при отходе от волны. Невозмущенные параметры среды зависят только от координаты x вдоль направления распространения волны, поэтому возмущения можно представить в виде $a' = a'(x)\exp(i\omega t +iky)$, где ω – частота возмущений, а k – проекция волнового вектора на ось y , перпендикулярную направлению распространения. Система уравнений для малых возмущений такого вида в волне релаксации имеет вид

$$\begin{aligned}
 i\omega\rho' + \rho'\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial\rho'}{\partial x} + v'_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\left(\frac{\partial v'_x}{\partial x} + ikv'_y\right) &= 0 \\
 i\omega\rho v'_x + \rho v\frac{\partial v'_x}{\partial x} + (\rho v'_x + \rho'v)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x} &= \eta\left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x^2} - k^2 v'_x\right) + \frac{\eta}{3}\left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x^2} + ik\frac{\partial v'_y}{\partial x}\right) \\
 i\omega\rho v'_y + \rho v\frac{\partial v'_y}{\partial x} + ikp' - \eta\left(\frac{\partial^2 v'_y}{\partial x^2} + k^2 v'_y\right) - \frac{\eta}{3}\left(ik\frac{\partial v'_x}{\partial x} - k^2 v'_y\right) &= 0 \\
 i\omega\rho\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}T' + \varepsilon'\right) + \rho v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}T' + \varepsilon'\right) + (\rho'v + v'_x\rho)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}T + \varepsilon\right) &= \\
 = -i\omega p' + v\frac{\partial p'}{\partial x} + v'_x\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda_T\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} - k^2 T'\right) + \lambda_V\left(\frac{\partial^2 T'_V}{\partial x^2} - k^2 T'_V\right) + \frac{8}{3}\eta\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v'_x}{\partial x} \\
 i\omega\rho\varepsilon' + (\rho'v + v'_x\rho)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \rho v\frac{\partial\varepsilon'}{\partial x} = \frac{C_k T' - \varepsilon'}{\tau} - \frac{\varepsilon_{eq} - \varepsilon}{\tau^2}\frac{dT}{dT}T' + \lambda_V\left(\frac{\partial^2 T'_V}{\partial x^2} - k^2 T'_V\right)
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

где γ – показатель адиабаты для поступательно-вращательных степеней свободы (для двухатомного газа $\gamma = 7/5$), $C_k \equiv \partial\varepsilon_{eq}/\partial T$ – теплоемкость колебательных степеней свободы.

Система (1.2) определяет восемь независимых мод, каждая из которых характеризуется своим дисперсионным соотношением. Это две звуковые, две тепловые, две релаксационные и две вихревые моды. Однако если возмущения генерируются в области волны, то вдали от зоны реакции могут существовать только те моды, которые соответствуют волнам, отходящим от зоны реакции. Перед волной в неравновесном однородном газе и за волной в равновесной зоне таких мод четыре (по одной каждого типа).

Акустические моды описываются соотношениями

$$\begin{aligned}
 k_x = \pm k, \quad v'_x(x) = v'_{x0}\exp(\pm kx), \quad \frac{p'(x)}{\rho_0 v_0} = -\left(1 \pm \frac{\Omega(1 + \mu \pm (1 - \mu))}{2k}\right)v'_x(x) \\
 v'_y(x) = \pm i v'_x(x), \quad \frac{dv'_y(x)}{dx} = ikv'_x(x) \\
 T'(x) = \frac{dT'(x)}{dx} = T'_V(x) = \frac{dT'_V(x)}{dx} = 0
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Для вихревых мод

$$k_x = k_{\eta 1,2} = (1/2 \pm \sqrt{1/4 + \delta_\eta \Omega + (\delta_\eta k)^2})/\delta_\eta, \quad v'_x(x) = v'_{0x} \exp(k_{\eta 1,2} x)$$

$$v'_y(x) = i \frac{k_{\eta 1,2}}{k} v'_x(x), \quad \frac{dv'_y(x)}{dx} = i \frac{k_{\eta 1,2}^2}{k} v'_x(x) \quad (1.4)$$

$$p' = T'(x) = \frac{dT'(x)}{dx} = T'_V(x) = \frac{dT'_V(x)}{dx} = 0$$

Тепловая мода перед волной

$$k_x = k_T = (1/2 + \sqrt{1/4 + \delta_T \Omega + (\delta_T k)^2})/\delta_T$$

$$T'(x) = T'_0 \exp(k_T x), \quad \frac{dT'(x)}{dx} = k_T T'(x), \quad T'_V(x) = \frac{dT'_V(x)}{dx} = 0$$

$$v'_x(x) = -\frac{(k_T + \Omega)k_T v_0}{k^2 + k_T^2} T'(x), \quad v'_y(x) = \frac{(k_T + \Omega)k i v_0}{k^2 + k_T^2} T'(x) \quad (1.5)$$

$$p'(x) = \frac{(k_T + \Omega)^2 \rho_0 v_0^2}{k^2 + k_T^2} T'(x), \quad \frac{dp'(x)}{dx} = \frac{(k_T + \Omega)k k_T i v_0}{k^2 + k_T^2} T'(x)$$

Тепловая мода в равновесной зоне:

$$k_x = k_{TV} = (1/2 - \sqrt{1/4 + \delta_{TV} \Omega + (\delta_{TV} k)^2})/\delta_{TV}, \quad \delta_{TV} = \frac{C_p \delta_T + C_k \delta_V}{C_p + C_k}$$

$$T'(x) = T'_0 \exp(k_{TV} x), \quad \frac{dT'(x)}{dx} = k_{TV} T'(x), \quad T'_V(x) = T'(x), \quad (1.6)$$

$$\frac{dT'(x)}{dx} = k_{TV} T'(x), \quad v'_x(x) = v'_y(x) = p'(x) = \frac{dv'_y(x)}{dx} = 0$$

Релаксационная мода перед волной

$$k_x = k_V = (1/2 + \sqrt{1/4 + \delta_V \Omega + (\delta_V k)^2})/\delta_V$$

$$T'_V(x) = T'_{V0} \exp(k_V x), \quad \frac{dT'_V(x)}{dx} = k_V T'_V(x) \quad (1.7)$$

$$T'(x) = \frac{dT'(x)}{dx} = p'(x) = \frac{dv'_y(x)}{dx} = v'_x(x) = v'_y(x) = 0$$

Релаксационная мода в равновесной зоне

$$k_x = k_\tau = -\sqrt{\frac{1}{\nu \tau} \left(\frac{1}{\delta_V} + \frac{C_k}{C_p} \frac{1}{\delta_T} \right)}$$

$$T'(x) = T'_0 \exp(k_\tau x), \quad \frac{dT'(x)}{dx} = k_\tau T'(x), \quad T'_V(x) = -\frac{1}{Le} \frac{C_p}{C_k} T'(x) \quad (1.8)$$

$$\frac{dT'_V(x)}{dx} = -k_\tau \frac{1}{Le} \frac{C_p}{C_k} T'(x), \quad v'_x(x) = v'_y(x) = p'(x) = \frac{dv'_y(x)}{dx} = 0$$

$$\Omega = \frac{i\omega}{v_0}, \quad \delta_T = \frac{\lambda_T}{C_p \rho_0 v_0}, \quad \delta_V = \frac{\lambda_V}{C_k \rho_0 v_0}, \quad \delta_\eta = \frac{\eta}{\rho v}, \quad Le = \frac{\delta_V}{\delta_T}$$

Здесь верхний знак и индекс "1" соответствует модам перед волной, а нижний знак и индекс "2" – модам в равновесной зоне, k_x – проекция волнового вектора возмущения на ось x , μ – отношение плотности за волной к плотности перед волной ($\mu < 1$), C_p – теплоемкость при постоянном давлении поступательно-вращательных степеней свободы, нижним индексом "0" для невозмущенных величин будем обозначать значения гидродинамических параметров в неравновесной зоне перед фронтом.

Всего имеется восемь независимых переменных:

$$v'_x, v'_y, p', T', T'_V, \frac{dT'}{dx}, \frac{dT'_V}{dx}, \frac{dv'_y}{dx}$$

Если решение существует, то взятые с произвольными весами $A_1 - A_4$ моды перед волной после интегрирования по зоне реакции выражаются через четыре рассмотренные моды равновесной зоны (с коэффициентами $A_5 - A_8$).

Система восьми уравнений относительно коэффициентов $A_1 - A_8$ в равновесной зоне имеет ненулевое решение при

$$\begin{bmatrix} p'_i & v'_{xi} & v'_{yi} & \frac{dv'_{yi}}{dx} & T'_i & \frac{dT'_i}{dx} & T'_{Vi} & \frac{dT'_{Vi}}{dx} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k_{TV} & 1 & k_{TV} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k_\tau & B_1 & -k_\tau B_1 \\ 0 & k & k_{\eta 2} & k_{\eta 2}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega \mu - k & k & -k & k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (1.9)$$

$$B_1 = -\frac{C_p}{Le C_k}$$

Первые четыре строки с $i = 1-4$ – это результат интегрирования по зоне реакции четырех мод, существующих перед волной. Последние четыре строки соответствуют четырем модам за волной.

Такая постановка задачи является наиболее общей. Если пренебречь вязкостными процессами ($\eta = 0$), то детерминант (1.9) сократится до размеров 7×7 , так как исчезнет вихревая мода (1.4). Решение (1.9) определяет дисперсионные кривые $\omega = \omega(k)$. Усиливающимся возмущениям соответствует частота $\text{Im}(\omega) < 0$ или $\Omega > 0$.

2. Решение задачи об устойчивости в общей постановке. Для получения профилей гидродинамических параметров в волне и скорости волны необходимо рассмотреть систему (1.1) в стационарном одномерном случае с учетом граничных условий $T = T_0$, $T = T_{V0}$ при $x = -\infty$ и $T_V = T$ при $x = \infty$. Такие исследования для различных систем проводились часто и являются стандартными при изучении волн горения. Методом стрельбы подбирается значение скорости v_0 (см., например, [2]). Необычным элементом расчета для случая неравновесного газа является точный учет кинетической схе-

мы реакции. Такие расчеты представлены в [17], здесь отметим только, что для реальных степеней неравновесности (T_{v0} порядка нескольких тысяч градусов) значения скорости составляют десятки см/с, а профили параметров сильно зависят не только от коэффициента поступательно-вращательной (λ_T), но и колебательной теплопроводности λ_v .

Решение задачи об устойчивости волн релаксации, распространяющихся в колебательно-возбужденном азоте, проводилось прямым интегрированием системы (1.2) с начальными условиями (1.4)–(1.8), причем использовались профили основных параметров, найденные для стационарного режима [17].

Графики дисперсионных зависимостей $\Omega(k)$ представлены на фиг. 1 для разных значений начальной колебательной температуры. Инкремент усиления довольно быстро растет с ростом неравновесности и падает с уменьшением длины волны возмущений. Наибольшее усиление испытывают возмущения с большими длинами волн. Однако они не реализуются в эксперименте из-за пространственной ограниченности реагирующих систем.

Сильная зависимость инкремента усиления от колебательной температуры объясняется сменой механизма усиления. С увеличением колебательной температуры волна релаксации начинает переходить к классической структуре (широкая зона прогрева – узкая зона реакции). Обычный (рэлеевский) механизм усиления малых возмущений, обязанный сбросу избыточной колебательной энергии на гидродинамические моды, справедлив только для зоны реакции, т.е. там, где этот сброс энергии происходит интенсивно. С ростом начальной колебательной температуры, приводящей к росту конечной температуры, происходит быстрое уменьшение времени релаксации в зоне реакции, зона реакции сокращается и рэлеевский механизм усиления исчезает. Взамен появляется совершенно другой механизм усиления, обязанный колебаниям фронта реакции. Фронт действует как поршень, который раскачивает возмущения.

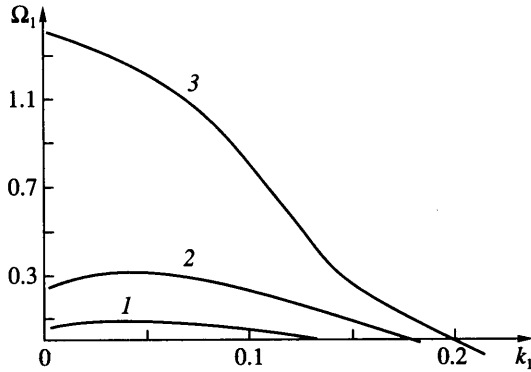
С ростом конечной температуры растет и отношение начального времени релаксации (перед волной) к конечному (за волной). Это очень сильно затрудняет прямой расчет, однако позволяет использовать приближенный метод [2], который упрощает решение задачи. Он связан с сильной зависимостью константы скорости (в рассматриваемом случае времени реакции) от температуры и называется приближением высокой энергии активации.

3. Приближение высокой энергии активации. В приближении высокой энергии активации (в рассматриваемом в статье случае это условие $-d \ln \tau / d \ln T \equiv q \gg 1$) волну релаксации можно разбить на две части – зону прогрева и зону реакции. Зона реакции существенно короче зоны прогрева, и именно в этой зоне происходит сброс энергии из колебательных степеней свободы в поступательно-вращательные, однако температура газа T и колебательная температура T_v в зоне реакции остаются практически постоянными, так как в противном случае из-за малой длины зоны были бы велики градиенты, а следовательно, и тепловые потоки, которые выравняли бы градиенты. В зоне реакции терпят разрыв только производные по температурам из-за тепловыделения в узкой зоне.

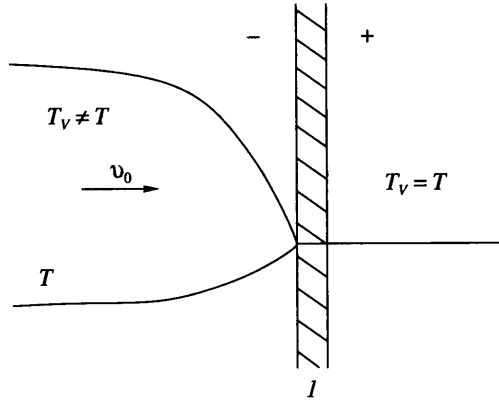
На фиг. 2 представлена структура волны релаксации в рассматриваемом приближении. Здесь зона реакции представляет поверхность разрыва, поэтому детали кинетической схемы не важны. Важно только, чтобы константы скорости реакции перед и за волной сильно отличались, поэтому полученные результаты оказываются справедливыми и для обычных волн горения.

В зоне прогрева профили поступательно-вращательной (T) и колебательной (T_v) температур определяются уравнениями

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \exp\left(\frac{x}{\delta_T}\right), \quad \frac{T_v}{T_{v0}} = 1 + \frac{\Delta T_v}{T_{v0}} \exp\left(\frac{x}{\delta_v}\right)$$



Фиг.1. Дисперсионные кривые, соответствующие разным уровням неравновесности перед волной релаксации $\Omega_1 = \Omega \delta_T$, $k_1 = k \delta_T$; кривые 1–3 соответствуют $T_{V0}/\hbar \tilde{\omega} = 0.9$; 1.0; 1.1



Фиг. 2. Распределение T и T_V в волне релаксации в приближении высокой энергии активации: l – зона реакции

где ΔT и ΔT_{V0} – разности поступательной и колебательной температур до волны и в равновесной зоне. В рассматриваемом случае процессу диффузии соответствует колебательная теплопроводность. Отметим, что применимость подобного представления связана с условиями $\delta_T = \text{const}$ и $\delta_V = \text{const}$. Поскольку $\rho v = \text{const}$, это означает, что постоянными считаются λ_T и λ_V . Это приближение довольно точно описывает реальный профиль (см., например, [2]).

Условия на разрыве стандартны и связаны с непрерывностью всех параметров, кроме производных температур [2], потому что на разрыве происходит выделение энергии:

$$\begin{aligned}
 v'_{x-} + \xi \frac{dv'_-}{dx} &= v'_{x+}, \quad v'_{y-} = v'_{y+}, \quad \frac{dv'_{y-}}{dx} = \frac{dv'_{x+}}{dx} \\
 p_- + \xi \left(\frac{dp_-}{dx} - \frac{4\delta_\eta d^2 v}{3 dx^2} \right) &= p_+, \quad \delta_T \left(\frac{dT'_-}{dx} + \xi \frac{d^2 T'_-}{dx^2} \right) = zT'_+ + \delta_T \frac{dT'_+}{dx} \\
 \delta_V \left(\frac{dT'_{V-}}{dx} + \xi \frac{d^2 T'_{V-}}{dx^2} \right) &= -\frac{C_p z T'_+}{C_k} + \delta_V \frac{dT'_{V+}}{dx}, \quad z = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\Delta T}{T} q
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $\xi = \xi(y, t) = \xi_0 \exp(i\omega t +iky)$ – малое смещение поверхности разрыва вдоль оси x при возмущении, а знаками “+” и “-” обозначены возмущения перед и за разрывом соответственно.

Перед разрывом, в зоне прогрева необходимо учитывать четыре моды, как и ранее. Но за фронтом реакции время релаксации мало по условию приближения высокой энергии активации, поэтому релаксационная мода за разрывом полностью затухает (см. (1.8)) и в разложении будут присутствовать только вихревая, звуковая и тепловая моды.

Если представить возмущения перед и за разрывом в виде набора перечисленных мод, то система (3.1) будет состоять из восьми уравнений для восьми коэффициентов (семь коэффициентов при амплитудах мод и восьмой – при величине смещения зоны реакции ξ). Условием существования нетривиального решения является обращение в нуль детерминанта системы (3.1), где моды перед разрывом определяются интегрированием по зоне прогрева. Если представить уравнение (1.9) в виде

$$|L_j| = 0, \quad j = 1 \dots 8 \tag{3.2}$$

где L_j – строка детерминанта (1.9), то отличие детерминанта (3.1) от (1.9) будет состоять в отсутствии релаксационной моды (шестая строка, вместо нее появляется строка коэффициентов при ξ) и изменении пятой строки (тепловая мода за волной), поскольку величина T'_+ целиком описывается этой модой. Таким образом, в общем уравнении (3.2) по сравнению с (1.9) меняются две строки

$$L_5 = (0, 0, 0, 0, 1, \delta_T k_{TV} + z, 1, \delta_V k_{TV} - z B_2),$$

$$L_6 = (4\delta_\eta / (3\delta_T) - 1, 1, 0, 0, 1, 1, B_3, B_3) \tag{3.3}$$

$$B_2 = \frac{C_p T_0}{C_k T_{V0}}, \quad B_3 = \frac{\Delta T_V}{DTLe}$$

Такая постановка задачи является наиболее общей и не накладывает ограничения на частоту возмущений. Детерминант системы (3.2) тождественно равен нулю при $Le = 1$. Рассмотрение этого случая необходимо проводить отдельно, так как T'_V меняется пропорционально T' и в детерминанте можно убрать две строки, описывающие изменение T'_V и dT'_V/dx , а также столбцы, связанные с релаксационной и тепловой модой за волной. Постановка задачи в таком упрощенном виде аналогична [1, 16]. Возникающие упрощения связаны с тем, что при $Le = 1$ в зоне реакции не происходит изменения суммарного потока энергии, так как изменения потоков энергии по поступательному-вращательным и колебательным степеням свободы полностью друг друга компенсируют.

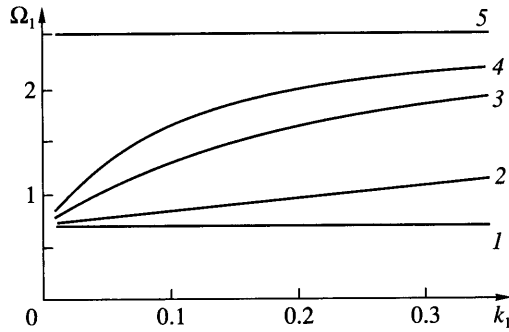
Уравнение (3.2) с учетом (3.3) является исходным для дальнейшего анализа.

В случае невязкого газа ($\eta \rightarrow 0, k_\eta \rightarrow 0$) уравнение (3.2) значительно упрощается

$$\begin{bmatrix} d_i & P_i & R_i & d_{ii} \\ 0 & B_3 - z & B_2 - 1 & \end{bmatrix} = 0 \tag{3.4}$$

$$d_i = p'_i + v'_{yi} - \frac{\Omega \mu}{k} v'_{xi} + T'_i \left(1 + \frac{\Omega \mu}{k} \right), \quad R_i = \delta_T \frac{dT'_i}{dx} - T'_i$$

$$P_i = T'_{Vi} - B_3 T'_i, \quad d_{ii} = \left(\delta_V \frac{dT'_{Vi}}{dx} - T'_{Vi} \right) + \frac{C_p}{C_k} \left(\delta_T \frac{dT'_i}{dx} - T'_i \right)$$



Фиг. 3. Дисперсионные кривые при разных значениях параметра b : 1 – $b \ll 1$ (решение Ландау–Даррье), 5 – $b \gg 1$; кривые 2–4 соответствуют $z(Le - 1) = 2, 5, 10$

Нижними индексами $i = 1, 2, 4$ обозначены величины возмущений на поверхности разрыва в звуковой, тепловой и релаксационной модах соответственно. Все величины в первых трех строках детерминанта (3.4) могут быть рассчитаны аналитически в нулевом, первом и втором приближении по $k\delta_T$. В рассматриваемых приближениях в третьей строке (3.4), описывающей релаксационную моду, только одна величина (вторая слева) оказывается ненулевой, поэтому можно разложить детерминант (3.4) по этому столбцу.

В итоговом детерминанте необходимо производить расчет членов с разной степенью точности до появления первого ненулевого слагаемого. Этот расчет несложен, но громоздок.

Результат совместного рассмотрения первого и второго приближений зависит от параметра

$$b = k\delta_T z \left(Le - 1 + \int_{-\infty}^0 \left(\frac{e^{\psi/Le}}{Le} - e^{\psi} \right) \ln(1 + \Delta T e^{\psi}) d\psi \right) \sim k\delta_T z (Le - 1)$$

При малых $k\delta_T$ величина этого параметра может варьироваться в широком диапазоне, так как $z \gg 1$. Если $b \ll 1$, то справедливо решение Ландау–Даррье

$$\Omega_{1,2} = \frac{k}{1+\mu} \left(\pm \sqrt{1-\mu + \frac{1}{\mu}} - 1 \right) \quad (3.5)$$

Если же $b \gg 1$, то получающееся дисперсионное уравнение имеет три корня

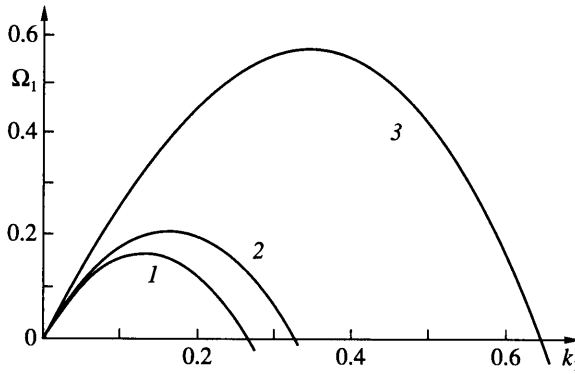
$$\Omega_{1,2} = \pm k \sqrt{\frac{3-\mu}{(1+\mu)\mu}}, \quad \Omega_3 = -k \quad (3.6)$$

причем один из корней положительный и соответствует режиму усиления возмущений.

Для $b \sim 1$ реализуется некоторое промежуточное решение, определяемое кубическим уравнением относительно Ω/k , зависящим от b

$$b \left(1 + \frac{\Omega}{k} \right) \left(\frac{\Omega^2}{k^2} (1+\mu) - \frac{3-\mu}{\mu} \right) + \left(1 + \frac{C_k T_{v0}}{C_p T_0} \right) \left(\frac{\Omega^2}{k^2} (1+\mu) + 2 \frac{\Omega}{k} - \frac{1-\mu}{\mu} \right) = 0$$

Фигура 3 иллюстрирует переход при увеличении волнового вектора k от решения Ландау–Даррье к новому решению, определяемому квадратичными по $k\delta_T$ членами.



Фиг. 4. Дисперсионные кривые для $T_{v0} = 1, Le = 1.2$; кривые 1–3 соответствуют $z = 1, 10, 50$

Из рисунка видно, что уже при достаточно малых $k\delta_T$ реальные дисперсионные кривые отклоняются от решения Ландау–Даррье весьма значительно, а в наиболее интересном случае $0.1 < k\delta_T \leq 1$ механизм Ландау–Даррье уже не играет никакой роли. Заметим, что по оси ординат отложена величина Ω/k и горизонтальные прямые 1 и 2 соответствуют линейной зависимости частоты от волнового вектора. Кроме того, на рисунке представлены расчеты с учетом только квадратичного приближения. Точное решение задачи $\Omega(k)$ представлено на фиг. 4.

Число Льюиса существенно влияет на коэффициент усиления, что соответствует и экспериментальным исследованиям. Если взять значение числа Льюиса $Le = 1$ за базовое, то с увеличением числа Льюиса возрастает диапазон неустойчивых режимов, при числах Льюиса, меньших единицы, диапазон неустойчивых режимов сокращается, но целиком не исчезает.

В случае вязкого газа детерминант (3.2) можно упростить, разложив его по четвертому столбцу, соответствующему релаксационной моде. В итоге получим

$$\begin{bmatrix} d_{i\eta} & d'_i & P_i & 0 \\ 0 & 0 & -z & B_2 - 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$d_{i\eta} = p'_i - v'_{yi} - \frac{\Omega\mu}{k} v'_{xi} + T'_i \left(1 + \frac{\Omega\mu}{k} - \frac{4\delta_\eta}{3\delta_T} \right), \quad (3.7)$$

$$d'_i = kp'_i + \Omega\mu v'_{yi} + \frac{dv'_{yi}}{dx} + kT'_i \left(1 - \frac{4\delta_\eta}{3\delta_T} \right), \quad i = 1, 2, 4$$

а d_{ii} и P_i – определяются формулами (3.4).

Анализ, проведенный аналогично предыдущему, позволяет выделить детерминант с точностью до членов $(k\delta)^2$. Приведем результаты. При $b \ll 1$ корни дисперсионного уравнения имеют вид

$$\Omega_{1,2} = \frac{k}{1 + \mu} \left(\pm \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\mu} - \mu \right) (1 - Pr) - 1} \right) \quad (3.8)$$

При $Pr \rightarrow 0$ решение (3.7) полностью совпадает с решением Ландау–Даррье (3.5). При конечных числах Прандтля происходит уменьшение инкремента возрастания.

При $\text{Pr} > 1$ оба корня $\Omega_{1,2} < 0$ и неустойчивое решение отсутствует. Таким образом, вязкость оказывает стабилизирующее воздействие на систему.

При $b \gg 1$ получается кубическое уравнение

$$\frac{\Omega^3}{k^3}(1+\mu) + \frac{\Omega^2}{k^2}(1+\mu) - \frac{\Omega}{k} \left(2 + \frac{1-\mu}{\mu} \left(3 - \text{Pr} \left(\frac{7}{3} - 2a \right) \right) \right) - \frac{3-\mu}{\mu} + \text{Pr} \frac{1-\mu}{\mu} \left(\frac{7}{3} - \frac{2a}{\mu} \right) + \frac{4}{3} a \left(\frac{1-\mu}{\mu} \text{Pr} \right)^2 = 0 \quad (3.9)$$

$$a = \left[\int_{-\infty}^0 \frac{e^{\psi/\text{Pr}} (e^{\psi/\text{Le}} - e^{\psi})}{1 + \Delta T e^{\psi}} d\psi \right] \left[\text{Le} - 1 + \int_{-\infty}^0 \left(\frac{e^{\psi/\text{Le}}}{\text{Le}} - e^{\psi} \right) \ln(1 + \Delta T e^{\psi}) d\psi \right]^{-1}$$

Для одного из корней (3.9) $\text{Re}(i\omega) > 0$, т.е. решение неустойчиво.

В литературе обсуждался вопрос о влиянии вязкости на устойчивость волны горения, причем справедливость решения Ландау–Даррье при $\text{Pr} \neq 1$ не подвергалась сомнению. Однако это решение не удовлетворяет условию равенства на разрыве производных $d v'_y / dx$, что проверяется простой подстановкой. Точное решение, даже в условиях, когда величина $b \ll 1$, отличается от решения Ландау–Даррье, поскольку учитывает всю систему граничных условий. Таким образом, из точного линейного анализа следует, что вязкость оказывает стабилизирующее воздействие на систему, причем существенным образом, а не как поправка первого порядка.

Диффузионно-тепловая неустойчивость реализуется, если коэффициент теплового расширения $\beta_T \rightarrow 0$. В этом случае можно пренебречь возмущениями гидродинамических параметров и рассматривать только возмущения температуры. Однако в подходе Ландау–Даррье такой переход невозможен, так как даже в области малых частот результат расчета по теории Ландау–Даррье не зависит от β_T . Это противоречие устраняется, если исходить из системы (1.2). В отличие от системы уравнений, обычно используемой при расчете диффузионно-тепловой неустойчивости, в (1.2) учитываются возмущения гидродинамических параметров. Преобразуем систему (1.2) с учетом малости $k\delta_T$ и соотношения $\rho' = \beta_T T'$ и пренебрежем вязкостью

$$\begin{aligned} \Omega \beta_T T' + \frac{d j'}{dx} - k \rho v'_y &= 0 \\ \Omega \rho v'_x + \frac{d v'_x}{dx} + (\rho v'_x + \rho' v) \frac{d v}{dx} + \frac{d p'}{dx} &= 0 \\ \Omega \rho v'_y + \frac{d v'_y}{dx} + k p' &= 0 \\ \Omega \rho T' + \frac{d T'}{dx} + j' \frac{d T}{dx} &= \delta_T \left(\frac{d^2 T'}{dx^2} - k^2 T' \right) \\ \Omega \rho T'_v + \frac{d T'_v}{dx} + j'_v \frac{d T_v}{dx} &= \delta_v \left(\frac{d^2 T'_v}{dx^2} - k^2 T'_v \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Итоговое уравнение, следующее из обращения в нуль детерминанта (3.10) и описывающее дисперсионные кривые, имеет вид

$$\left(\frac{\Omega}{k} + 1\right) \left(\left[1 + \frac{C_k T_{v0}}{C_p T_0} \right] \frac{\Omega}{k} + z(Le - 1)k\delta_T \left[\frac{\Omega^2}{k^2} - 1 \right] \right) = 0$$

$$\Omega_1 = -k\mu$$

$$\Omega_{2,3} = -\frac{k}{2b} \left(1 + \frac{C_k T_{v0}}{C_p T_0} \right) \pm k \sqrt{\frac{1}{4b^2} + \left(1 + \frac{C_k T_{v0}}{C_p T_0} \right)^2 + 1}$$

При $b \leq 1$ корни $\Omega_{2,3}$ соответственно равны

$$\Omega_2 = -\frac{k}{b} \left(1 + \frac{C_k T_{v0}}{C_p T_0} \right), \quad \Omega_3 = k^2 \delta_T z (Le - 1) \left(1 + \frac{C_k T_{v0}}{C_p T_0} \right)$$

Корень Ω_3 , соответствующий растущим возмущениям, совпадает с аналогичным корнем, полученным в [2] при рассмотрении диффузионно-тепловой неустойчивости. Таким образом, общий подход, основанный на системе (1.2), позволяет описать переход к диффузионно-тепловой неустойчивости при $\beta_T \rightarrow 0$ без каких-либо предварительных предположений о характере возмущений.

Заключение. Предложена и реализована общая схема расчета устойчивости волн релаксации с учетом кинетической схемы реакции для произвольных длин волн возмущений. В приближении высокой энергии активации для волн релаксации показано, что схема Ландау–Даррье–Маркштейна справедлива только для числа Льюиса $Le = 1$. При $Le \neq 1$ уже для волновых векторов возмущений $k\delta_T \geq 0.1$ происходит переход к механизму усиления, связанному с зависимостью скорости фронта от возмущений температуры.

Вязкость и колебательная теплопроводность (диффузия) оказывают существенное влияние на устойчивость волн релаксации и горения, а не являются дополнительными эффектами, что полностью согласуется с экспериментальными данными. Прослежен переход к известным результатам диффузионно-тепловой теории устойчивости при стремлении к нулю коэффициента теплового расширения.

Публикуемые исследования были проведены при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 00-01-00180) и гранта “Университеты России”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Travnikov O.Yu., Liberman M.A., Bychkov V.V. Stability of a planar flame front in a compressible flow // Phys. Fluids. 1997. V. 9. № 12. P. 3935–3937.
2. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука. 1980. 478 с.
3. Генералов Н.А., Зимаков В.П., Козлов Г.И., Масюков В.А., Райзер Ю.П. Непрерывно горящий оптический разряд // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 11. Вып. 9. С. 447–449.
4. Бункин Ф.В., Конов В.И., Прохоров А.М., Федоров В.Б. Лазерная искра в режиме “медленного горения” // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 9. Вып. 11. С. 609–612.
5. Лосева Т.В., Немчинов И.В. Об ускорении медленных волн светового горения. // Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8. Вып. 9. С. 537–541.
6. Woosley S.E., Weaver W.T. The physics of supernova explosions // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1986. V. 24. P. 205–253.
7. Shepherd J.E., Sturtevant B. Rapid evaporation at the superheat limit // J. Fluid Mech. 1982. V. 121. P. 379–402.

8. *Карташов И.Н., Мажукин В.И., Перебейнос В.В., Самохин А.А.* Влияние газодинамических эффектов на испарительный процесс при модуляции интенсивности нагрева // *Мат. моделирование*. 1997. Т. 9. № 4. С. 11–26.
9. *Ивашнев О.Е., Ивашнева М.Н., Смирнов Н.Н.* Ударные волны разрежения в потоках неравновесной кипящей жидкости. // *Изв. РАН. МЖГ*. 2000. № 4. С. 20–23.
10. *Ландау Л.Д.* К теории медленного горения // *ЖЭТФ*. 1944. Т. 14. № 6. С. 240–245.
11. *Darrieus G.* *La Mécanique des fluides*. Paris: Dunod, 1941. 36 p.
12. Нестационарное распространение пламени / Под ред. Д. Маркштейна. М.: Мир, 1968. 437 с.
13. *Einbinder H.* The hydrodynamic stability of flame fronts // *J. Chem. Phys.* 1953. V. 21. № 3. P. 480–489.
14. *Ягодкин В.Я.* Об устойчивости разрывного фронта пламени в вязкой среде // *Изв. АН СССР. ОТН*. 1955. Т. 7. С. 101–108.
15. *Куликовский А.Г., Шикина И.С.* Об условиях неустойчивости фронта пламени в слабонеоднородном потоке // *Изв. РАН. МЖГ*. 2000. № 5. С. 12–19.
16. *Liberman M.A., Vychkov V.V., Goldberg S.M., Book D.L.* Stability of a planar flame front in the slow-combustion regime // *Phys. Rev. E*. 1994. V. 49. № 1. P. 445–453.
17. *Уваров А.В., Осипов А.И., Рыбкина Е.А.* Волны горения в колебательно-неравновесном газе // *Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия*. 1996. № 1. С. 92–97.

Москва
E-mail: uvarov@phys.msu.su

Поступила в редакцию
28.V.2002