МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 2003

УДК 533.72

© 2003 г. И. Б.ЧЕКМАРЕВ, О. М.ЧЕКМАРЕВА

МЕТОД МНОГОМАСШТАБНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

Рассматривается проблема построения асимптотического приближения к решению кинетического уравнения Больцмана в гидродинамической области малых чисел Кнудсена. Для случая одномерных возмущений в неподвижном газе задача линеаризуется. Функция распределения ищется в форме многомасштабного разложения типа асимптотического ряда Гильберта. На конкретном примере распространения звуковой волны продемонстрировано построение равномерно пригодного при $t \to \infty$ решения задачи. Показано, что многомасштабная техника позволяет расширить область применения разложения Гильберта на весь интервал диссипативной релаксации.

Ключевые слова: метод многомасштабных разложений, равномерно пригодное разложение для уравнения Больцмана, малые числа Кнудсена, диссипативная релаксация звуковой волны.

В своем известном исследовании по кинетической теории газов Гильберт впервые показал, что в предельном случае малых чисел Кнудсена можно построить приближенное решение кинетического уравнения в форме разложения функции распределения по степеням малого параметра, коэффициенты которого выражаются через макроскопические переменные [1]. Однако с помощью регулярного разложения оказалось невозможным построить равномерно пригодное при $t \to \infty$ решение. Говоря иначе, с помощью классической процедуры Гильберта невозможно описать процесс диссипативной релаксации газа или выход на стационарный режим течения [2–4].

Причина неравномерного поведения решения Гильберта заключается в том, что асимптотические приближения в форме прямых разложений по степеням содержащегося в задаче малого параметра приводят, как правило, к ошибочным результатам в так называемых областях неравномерного поведения [5, 6]. Для уравнений газодинамического приближения такими областями являются кнудсеновские пограничные и начальные слои, а также ударные волны. Однако для разложения Гильберта областью неравномерного поведения является также и "финальный слой" [2], т.е. область больших значений времени. Но в отличие от кинетических областей неравномерного поведения в последнем случае существует принципиальная возможность коррекции решения в рамках гидродинамического приближения.

Цель настоящей работы – показать, что с помощью техники многомасштабных разложений [5, 6] можно построить равномерно пригодное при больших временах асимптотическое разложение функции распределения для простейшего линейного случая диссипативной релаксации малых одномерных возмущений в неподвижном газе. Рассмотрены приближения вплоть до барнеттовского уровня. Показано наличие в решении растущих членов и получены условия равномерности разложения. На примере звуковой волны наглядно продемонстрировано последовательное уточнение решения.

Выберем в качестве масштабов для функции распределения f, скорости частиц $\mathbf{c}$, времени t, радиус-вектора $\mathbf{r}$ и параметра столкновения b величины

$$f_s = \frac{n_s}{c_s^3}, \quad c_s = \left(\frac{kT_s}{m_s}\right)^{1/2}, \quad t_s = \frac{L}{c_s}, \quad L, \quad a$$

где n_s – характерная плотность газа, T_s – характерная температура газа, m – масса частицы, L – характерный макроскопический линейный размер, a – эффективный радиус частицы.

Тогда безразмерное уравнение Больцмана для одноатомного газа будет иметь вид

$$\varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{c}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\right) = \int[f(\mathbf{c}_1')f(\mathbf{c}')-f(\mathbf{c}_1)f(\mathbf{c})]gbdbd\beta d\mathbf{c}_1 \qquad (1)$$

Здесь использованы общепринятые обозначения и

$$\varepsilon = \frac{l}{L}, \quad l = (n_s\pi a^2)^{-1}$$

Число Кнудсена ε предполагается малым. Макроскопические переменные выражаются через функцию распределения известными соотношениями

$$n = \int f d\mathbf{c}, \quad \mathbf{j} = n\mathbf{v} = \int \mathbf{c} f d\mathbf{c}, \quad w = \frac{3}{2}p = \int\frac{(\mathbf{c}-\mathbf{v})^2}{2}f d\mathbf{c}, \quad p = nT \qquad (2)$$

Будем рассматривать случай одномерных возмущений в неподвижном газе. Введем малый параметр γ, характеризующий величину этих возмущений, и ограничимся линейным по γ приближением, т.е.

$$f = f_{00}+\gamma f_1+\ldots, \quad n = 1+\gamma n_1+\ldots, \quad u_x = \gamma u_1+\ldots, \quad w = \frac{3}{2}+\gamma w_1+\ldots \qquad (3)$$

где максвелловское распределение

$$f_{00} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp\left(-\frac{c^2}{2}\right) \qquad (4)$$

соответствует невозмущенному состоянию.

Тогда после подстановки (3) в (1) получим

$$\varepsilon\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}+c_x\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) = -f_{00}I(\varphi_1), \quad f_1 = f_{00}\varphi_1 \qquad (5)$$

$$I(\varphi_1) = \int f_{00}(\mathbf{c}_1)[\varphi_1(\mathbf{c}_1)+\varphi_1(\mathbf{c})-\varphi_1(\mathbf{c}_1')-\varphi_1(\mathbf{c}')]gbdbd\beta d\mathbf{c}_1 \qquad (6)$$

Следуя основной идее метода многомасштабных разложений, будем считать решение задачи зависящим от последовательности "времен" $t_k = \varepsilon^k t$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_0^\infty \varepsilon^k\frac{\partial}{\partial t_k} \qquad (7)$$

Так же, как в методе Гильберта, представим возмущенную функцию распределения в виде ряда по степеням малого параметра

$$f_1 = \sum_0 \varepsilon^k f_{1k}, \quad f_{1k} = f_{00}\varphi_{1k} \qquad (8)$$

Для газодинамических величин (2), учитывая (3), (6) и (9), также получим соотношения

$$n_1 = \sum\varepsilon^k n_{1k}, \quad u_1 = \sum\varepsilon^k u_{1k}, \quad w_1 = \sum\varepsilon^k w_{1k} \qquad (9)$$

$$n_{1k} = \int f_{1k} d\mathbf{c}, \quad u_{1k} = \int c_x f_{1k} d\mathbf{c}, \quad w_{1k} = \int \frac{c^2}{2} f_{1k} d\mathbf{c} \tag{10}$$

$$w_{1k} = \frac{3}{2} p_{1k}, \quad p_{1k} = n_{1k} + T_{1k}$$

Подстановка (7) и (8) в (5) приводит к цепочке, в общем случае неоднородных, линейных интегральных уравнений относительно неизвестных функций φ_{1k}. Эти уравнения имеют решения при выполнении условий ортогональности свободного члена к собственным функциям однородного интегрального уравнения $I(\psi_r) = 0$. Тогда искомые функции можно представить в виде суммы решения соответствующего однородного уравнения ω_{1k} и частного решения h_{1k}

$$\varphi_{1k} = \omega_{1k} + h_{1k} \tag{11}$$

где $\omega_{1k} = a_{1k}^r \psi_r$ – линейная комбинация собственных функций $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = c_x$, $\psi_3 = c^2/2$ с коэффициентами a_{1k}^r, зависящими от координаты и времени.

Однозначность решения уравнения Больцмана обеспечивается условиями Гильберта

$$\int \psi_r f_{00} h_{1k} d\mathbf{c} = 0 \tag{12}$$

Тогда a_{1k}^r и соответственно ω_{1k} можно с учетом (9), (10) выразить через макроскопические параметры

$$\omega_{1k} = -\left(\frac{c^2}{2} - \frac{5}{2}\right) n_{1k} + u_{1k} c_x + \left(\frac{c^2}{2} - \frac{3}{2}\right) p_{1k} \tag{13}$$

Перейдем к рассмотрению приближений.

На первом шаге имеем однородное интегральное уравнение, решение которого

$$\varphi_{10} = \omega_{10} = -\left(\frac{c^2}{2} - \frac{5}{2}\right) n_{10} + u_{10} c_x + \left(\frac{c^2}{2} - \frac{3}{2}\right) p_{10} \tag{14}$$

В следующем приближении для φ_{11} получаем уравнение

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial t_0} + c_x \frac{\partial f_{10}}{\partial x} = -f_{00} I(\varphi_{11}) \tag{15}$$

Умножая (15) на ψ_r и интегрируя по скоростям, получаем с учетом (14) условия разрешимости уравнения (15)

$$\frac{\partial n_{10}}{\partial t_0} + \frac{\partial u_{10}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_{10}}{\partial t_0} + \frac{\partial p_{10}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w_{10}}{\partial t_0} + \frac{5}{2} \frac{\partial u_{10}}{\partial x} = 0 \tag{16}$$

Чтобы найти частное решение h_{11}, исключим из (15) с помощью (16) производную по времени. Тогда

$$\left(\frac{c^2}{2} - \frac{5}{2}\right) c_x \frac{\partial T_{10}}{\partial x} + \left(c_x^2 - \frac{c^2}{3}\right) \frac{\partial u_{10}}{\partial x} = -I(h_{11}) \tag{17}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$h_{11} = -A_x \frac{\partial T_{10}}{\partial x} - B_{xx} \frac{\partial u_{10}}{\partial x} \tag{18}$$

где A_x и B_{xx} – решения интегральных уравнений [4]

$$I(A_x) = \left(\frac{c^2}{2} - \frac{5}{2}\right)c_x, \quad I(B_{xx}) = c_x^2 - \frac{c^2}{3}, \quad A_x = Ac_x, \quad B_{xx} = B\left(c_x^2 - \frac{c^2}{3}\right) \tag{19}$$

Исключая из второго и третьего уравнений системы (16) величину $p_{10} = 2/3w_{10}$, получим однородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial t_0^2} - a_0^2\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x^2} = 0, \quad a_0 = \sqrt{\frac{5}{3}} \tag{20}$$

Если же исключить u_{10}, то получим аналогичное волновое уравнение для p_{10}. Наконец, исключая скорость из первого и третьего уравнений и интегрируя результат, находим, что для параметров n_{10}, p_{10}, T_{10} справедливо адиабатическое приближение

$$p_{10} = \frac{5}{3}n_{10}, \quad p_{10} = \frac{5}{2}T_{10} \tag{21}$$

Однородное уравнение (20) описывает распространяющуюся со скоростью a_0 плоскую волну. Чтобы получить основные сведения о структуре функции распределения для рассматриваемого случая затухания первоначально имевшихся в газе возмущений, конкретная форма решения уравнения (20) не требуется. Однако для наглядной демонстрации роли каждого приближения выберем в качестве примера простейшее решение уравнения (20) в виде

$$u_{10} = C_{10}(t_1, t_2, \ldots)\exp[i(x - a_0t_0)] \tag{22}$$

Амплитуду волны $C_{10}(t_1, t_2, \ldots)$ следует считать неизвестной функцией "медленных времен". Соответствующие решения для p_{10}, n_{10}, T_{10} могут быть получены с помощью уравнений (16).

Перейдем теперь к третьему приближению. Здесь для h_{12} имеем уравнение

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial t_0} + c_x\frac{\partial f_{11}}{\partial x} + \frac{\partial f_{10}}{\partial t_1} = -f_{00}I(h_{12}) \tag{23}$$

Умножим (23) на собственные функции и проинтегрируем по скоростям. Учитывая (13) и (18), получим систему

$$\frac{\partial n_{11}}{\partial t_0} + \frac{\partial u_{11}}{\partial x} = -\frac{\partial n_{10}}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial u_{11}}{\partial t_0} + \frac{\partial p_{11}}{\partial x} = -\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial t_1} - \frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial w_{11}}{\partial t_0} + \frac{5}{2}\frac{\partial u_{11}}{\partial x} = -\left(\frac{\partial w_{10}}{\partial t_0} - \lambda\frac{\partial^2 T_{10}}{\partial x^2}\right) \tag{24}$$

$$\mu = \frac{1}{15}\int\exp\left(-\frac{c^2}{2}\right)c^4B(c)d\mathbf{c}, \quad \lambda = \frac{1}{6}\int\exp\left(-\frac{c^2}{2}\right)c^4A(c)d\mathbf{c}$$

Исключая из второго и третьего уравнений (24) величину $p_{11} = 2/3w_{11}$, получим неоднородное волновое уравнение для u_{11}

$$\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial t_0^2} - a_0^2\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2} = -2\frac{\partial}{\partial t_0}\left[\frac{\partial u_{10}}{\partial t_0} - \left(\frac{2}{3}\mu + \frac{2}{15}\lambda\right)\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x^2}\right] \tag{25}$$

Решением (25) будет сумма решения соответствующего однородного уравнения U_{11} и частного решения исходного уравнения

$$u_{11} = U_{11} - t_0\left[\frac{\partial u_{10}}{\partial t_1} - \left(\frac{2}{3}\mu + \frac{2}{15}\lambda\right)\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x^2}\right] \tag{26}$$

Отсюда следует, что величина εu_{11} будет малой поправкой к u_{10} в разложении (10) только, если $\varepsilon t_0 = \varepsilon t$ мало. Чтобы (10) было пригодно для больших времен порядка ε^{-1}, нужно приравнять нулю квадратную скобку в (26). Т.е. должно выполняться условие

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial t_1} - \left(\frac{2}{3}\mu + \frac{2}{15}\lambda\right)\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x^2} = 0 \tag{27}$$

Так же можно провести анализ для p_{11} и получить условие ограниченности

$$\frac{\partial p_{10}}{\partial t_1} - \left(\frac{2}{3}\mu + \frac{2}{15}\lambda\right)\frac{\partial^2 p_{10}}{\partial x^2} = 0 \tag{28}$$

Очевидно, что соотношения (27) и (28) корректируют решение первого приближения. Действительно, подставляя в (27) выражение (22), получим уравнение для амплитуды, из которого находим

$$C_{10} = D_{10}(t_2, \ldots)\exp\left[-\left(\frac{2}{3}\mu + \frac{2}{15}\lambda\right)t_1\right] \tag{29}$$

Здесь D_{10} – функция уже следующих "времен".

Таким образом, многомасштабная техника позволила в первом приближении модифицированного разложения Гильберта учесть диссипативные процессы, связанные с наличием вязкости и теплопроводности. Полученная зависимость декремента затухания от коэффициентов переноса аналогична приведенной Ландау в [7]. Если же ограничиться первыми приближениями решений интегральных уравнений для функций A и B, считая $\lambda = 15/4\mu$ [4], то (29) согласуется с результатами [8] в приближении Навье – Стокса. При выполнении условий (27) и (28) для скорости u_{11} и давления p_{11} получаем однородные волновые уравнения типа (20). Поэтому для демонстрации поведения величины u_{11} выберем аналогичное распределение в виде бегущей волны

$$u_{11} = C_{11}(t_1, t_2, \ldots)\exp[i(x - a_0 t_0)] \tag{30}$$

Однако уравнения (24) для u_{11} и p_{11} остаются неоднородными и имеют нетривиальные решения. После некоторых преобразований, учитывая (27) и (28), их можно записать в симметричной форме

$$\frac{\partial u_{11}}{\partial t_0} + \frac{\partial}{\partial x}\left[p_{11} - \left(\frac{2}{3}\mu - \frac{2}{15}\lambda\right)\frac{\partial u_{10}}{\partial x}\right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t_0}\left[p_{11} - \left(\frac{2}{3}\mu - \frac{2}{15}\lambda\right)\frac{\partial u_{10}}{\partial x}\right] + \frac{5}{3}\frac{\partial u_{11}}{\partial x} = 0$$

Наконец, исключая из первого и последнего уравнений (24) скорость u_{11} получаем

$$\frac{5}{3}n_{11} = p_{11} - \frac{4}{25}\lambda\frac{\partial p_{10}}{\partial t_0} \tag{31}$$

Таким образом, для переменных второго приближения условия адиабатичности не имеют места.

С помощью (16) и (24) можно преобразовать (23) к виду

$$\left(\frac{c^2}{2} - \frac{5}{2}\right)c_x\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \left(c_x^2 - \frac{c^2}{3}\right)\frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \Delta_B = -I(h_{12}) \tag{32}$$

Здесь в Δ_B включены члены, описывающие барнеттовские эффекты. Таким образом, в частном решении h_{12} можно выделить навье-стоксовскую и барнеттовскую части.

Чтобы сохранить справедливость разложений (10) до времен порядка ε^{-2}, необходимо перейти к следующему времени t_2. Рассмотрим коротко четвертое приближение. Здесь для h_{13} имеем

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial t_0} + c_x\frac{\partial f_{12}}{\partial x} + \frac{\partial f_{11}}{\partial t_1} + \frac{\partial f_{10}}{\partial t_2} = -f_{00}I(h_{13}) \tag{33}$$

Из (33), как и раньше, следует система макроскопических уравнений

$$\frac{\partial n_{12}}{\partial t_0} + \frac{\partial u_{12}}{\partial x} = -\frac{\partial n_{11}}{\partial t_1} - \frac{\partial n_{10}}{\partial t_2} \tag{34}$$

$$\frac{\partial u_{12}}{\partial t_0} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x} = -\left(\frac{\partial u_{11}}{\partial t_1} - \frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2}\right) - \left[\frac{\partial u_{10}}{\partial t_2} - \frac{4}{3}\mu\left(\mu - \frac{4}{25}\lambda\right)\frac{\partial^3 p_{10}}{\partial x^3}\right]$$

$$\frac{\partial w_{12}}{\partial t_0} + \frac{5}{2}\frac{\partial u_{12}}{\partial x} = -\left(\frac{\partial w_{11}}{\partial t_1} - \lambda\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x^2}\right) - \left[\frac{\partial w_{10}}{\partial t_2} - \frac{4}{15}\lambda(\lambda - 2\mu)\frac{\partial^3 u_{10}}{\partial x^3}\right]$$

При вычислении барнеттовских членов в (34) использовались первые приближения для функций A и B в h_{11} [4]

$$h_{11} = -\frac{2}{5}\lambda\left(\frac{c^2}{2} - \frac{5}{2}\right)c_x\frac{\partial T_{10}}{\partial x} - \mu\left(c_x^2 - \frac{c^2}{3}\right)\frac{\partial u_{10}}{\partial x}$$

Исключим из второго и третьего уравнений (34) давление. После преобразования правой части с учетом (16), (24), (27), (28) и (31) находим

$$\frac{\partial^2 u_{12}}{\partial t_0^2} - a_0^2\frac{\partial^2 u_{12}}{\partial x^2} = -2\frac{\partial}{\partial t_0}\left\{\left[\frac{\partial u_{11}}{\partial t_1} - \left(\frac{2}{3}\mu + \frac{2}{15}\lambda\right)\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2}\right] + \left[\frac{\partial u_{10}}{\partial t_2} - \frac{19}{120}\mu^2\frac{\partial^3 p_{10}}{\partial x^3}\right]\right\} \tag{35}$$

При вычислении второй скобки в (35) также использовалось соотношение $\lambda = 15/4\mu$. Решение уравнения (35) есть сумма решения соответствующего однородного уравнения U_{12} и частного решения исходного уравнения.

$$u_{12} = U_{12} - t_0\left\{\left[\frac{\partial u_{11}}{\partial t_1} - \left(\frac{2}{3}\mu + \frac{2}{15}\lambda\right)\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2}\right] + \left[\frac{\partial u_{10}}{\partial t_2} - \frac{19}{120}\mu^2\frac{\partial^2 p_{10}}{\partial x^3}\right]\right\} \tag{36}$$

Чтобы $\varepsilon^2 u_{12}$ было меньше εu_{11} при больших временах порядка ε^{-1}, нужно потребовать обращения в нуль фигурной скобки в (36), т.е.

$$\frac{\partial u_{11}}{\partial t_1} - \left(\frac{2}{3}\mu + \frac{2}{15}\lambda\right)\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2} = -\frac{\partial u_{10}}{\partial t_2} + \frac{19}{120}\mu^2\frac{\partial^3 p_{10}}{\partial x^3}$$

Если рассматривать это соотношение как уравнение относительно u_{11}, то его решение будет

$$u_{11} = U_{11}^* - t_1\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial t_2} - \frac{19}{120}\mu^2\frac{\partial^3 p_{10}}{\partial x^3}\right) \tag{37}$$

где U_{11}^* – решение соответствующего однородного уравнения.

Но из (37) видно, что εu_{11} при увеличении t до значений порядка $O(\varepsilon^{-2})$ будет оставаться малой поправкой к u_{10} только, если

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial t_2} - \frac{19}{120}\mu^2\frac{\partial^3 p_{10}}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial u_{11}}{\partial t_1} - \left(\frac{2}{3}\mu + \frac{2}{15}\lambda\right)\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2} = 0 \tag{38}$$

Аналогичные условия ограниченности для величины p_{12} сводятся к соотношениям

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial t_1} - \left(\frac{2}{3}\mu + \frac{2}{15}\lambda\right)\frac{\partial^2 p_{11}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial p_{10}}{\partial t_2} - \frac{19}{72}\mu^2\frac{\partial^3 u_{10}}{\partial x^3} = 0$$

Условие (38) позволяет уточнить выражение (29) и найти поправку к скорости звука. В результате для волны первого приближения на этом уровне имеем

$$u_{10} = E_{10}(t_3, \ldots)\exp\left\{i\left[x - \left(1 + \frac{19}{120}\mu^2\varepsilon^2\right)a_0 t_0\right] - \left(\frac{2}{3}\mu + \frac{2}{15}\lambda\right)\varepsilon t_0\right\}$$

Заключение. Метод многомасштабных разложений позволяет, по крайней мере для конкретных линейных задач, построить равномерно пригодное при $t \to \infty$ модифицированное разложение Гильберта и преодолеть известную ограниченность области применения последнего в его классической форме. Заметим, что исследование такой же задачи о диссипации малых возмущений, но на основе уравнений Навье – Стокса и метода многомасштабных разложений с корректным устранением секулярных членов приводит к идентичным результатам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. *Hilbert D.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig: Teubner, 1912. 282 S.
2. *Cercignani C.* Theory and Application of the Boltzmann Equation. London: Scottish Acad. Press, 1975. – *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
3. *Ferziger J., Kaper H.* Mathematical Theory of Transport Processes in Gases. Amsterdam: North-Holland, 1972. – *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
4. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
5. *Nayfeh A.* Perturbation Methods. N. Y. etc.: Wiley, 1973. – *Найфе А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
6. *Smith D.* Singular-Perturbation Theory. L.: Cambridge Univ. Press, 1985. 500 p.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
8. *Галкин В.С., Носик В.И.* О модификации уравнений Барнетта на примере задачи о распространении звука // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 3. С. 126–133.

Аахен
E-mail: chivorotnok @ rambler.ru

Поступила в редакцию
28.IX.2001