МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 2003

УДК 532.62.013.4

 Н. Р. СИБГАТУЛЛИН, А. Н. СИБГАТУЛЛИНА

ДЛИННОВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ТЕОРИИ ПЛЕНОЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Для описания движений тонких пленок с конечными отклонениями от срединной поверхности построена асимптотическая длинноволновая модель с учетом диспергирующих членов. В рамках модели построено точное периодическое решение, описывающее нелинейную капиллярную волну. Малые отклонения от нелинейной капиллярной волны описываются линейной системой с периодическими коэффициентами. Показано, что матрица монодромии этой системы при периодах волновых возмущений больших некоторого критического имеет собственные значения, равные по модулю единице. При периодах возмущений, меньших критического, одно из собственных значений становится по модулю большим единице.

Ключевые слова: тонкие пленки, идеальная жидкость, нелинейные капиллярные волны.

Тонкие пленки уже давно являются предметом интенсивных исследований. Новый импульс здесь дали замечательные экспериментальные работы по свободным тонким пленкам [1] и по пленкам, стекающим по твердым поверхностям [2]. На тонких пленках были экспериментально реализованы сложные двумерные ламинарные и турбулентные $2D$ гидродинамические течения [3]. Современным исследованиям свободных тонких пленок посвящены обстоятельный обзор [4] (см. также работу по нелинейным капиллярным волнам [5]), а пленкам на твердых поверхностях – монография [6].

Ниже последовательно развивается метод длинноволнового приближения для описания волновых режимов пленочных течений без каких-либо ограничений на амплитуду волн. Для свободных $2D$ пленок используется модель идеальной жидкости, а на свободных поверхностях используется закон Лапласа для поверхностного натяжения. Пленки считаются достаточно "толстыми", чтобы пренебрегать силами Лондона-ван-дер-Ваальса и электростатическими силами взаимодействия между свободными поверхностями (результаты исследований образования перетяжек в симметричных пленках с учетом этих сил смотри, например, в работах [7–9]). Последовательный учет членов по малому параметру позволяет проследить усложнение структуры решения в поперечном сечении и получить уравнения все более высокого порядка по координате в направлении движения пленки, не содержащих поперечной координаты. В случае свободных пленок система гидродинамического типа без учета диспергирующих членов имеет кратные характеристики, т.е. является вырожденной. Эта система имеет точные решения типа бегущей волны для капиллярных волн, содержащие произвольную функцию [10]. Учет следующих (диспергирующих) членов по малому параметру позволяет определить форму периодических капиллярных волн, которая выражается через эллиптические функции и содержит два параметра – длину волны и максимальный угол наклона срединной поверхности. Исследованы возмущения периодических капиллярных волн общего вида. Результаты согласуются с результатами работы [10] и численными исследованиями устойчивости плоской струи от источника (щели), совершающей вертикальные периодические колебания [4, 11].

1. Модель свободных тонких пленок. В случае малых возмущений плоской струи капиллярные (изгибные) и варикозные (симметричные) возмущения являются независимыми. Капиллярные волны распространяются со скоростью $\sqrt{T/\rho H}$ [1], где T – коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность жидкости, H – невозмущенная полутолщина струи. Варикозные возмущения являются диспергирующими с дисперсионным уравнением $\omega^2 = THk^4/\rho$ [1]. Обычным способом перехода к нелинейному случаю является предположение о постоянстве скорости в произвольном поперечном сечении струи. Известен также метод мембранной аппроксимации, развитый в работе [12]. В отличие от этих подходов ниже развивается асимптотический метод, позволяющий в принципе получить систему с меньшим на единицу количеством пространственных координат в любом порядке точности. При этом система с однородным распределением параметров в поперечном сечении получается в первом приближении по малому параметру аналогично модели "мелкой воды" по отношению к системе Буссинеска или уточненной длинноволновой модели [13].

Весьма эффективен способ получения асимптотической системы уравнений гамильтоновость системы условий на свободной поверхности в точной постановке. Поэтому для вывода искомой системы достаточно вычислить полную энергию пленки с точностью до заданной степени малого параметра – отношения невозмущенной толщины плоской пленки к характерной длине волны. На каждой из свободных границ пленки имеет место кинематическое и динамическое условие. Внутри пленки движение несжимаемой жидкости считается потенциальным. Так же как для волн на поверхности тяжелой воды [14] можно показать, что возвышение свободных поверхностей над невозмущенной срединной плоскостью $h_{\pm}$ (координата z верхней, либо нижней границы соответственно) и потенциалы на свободных поверхностях $\Phi_{\pm}$ являются канонически сопряженными переменными. Поэтому кинематические и динамические условия на свободных поверхностях имеют вид гамильтоновых уравнений

$$\frac{\partial h_{\pm}}{\partial t} = \pm\frac{\delta E}{\delta \Phi_{\pm}}, \quad \frac{\partial \Phi_{\pm}}{\partial t} = \mp\frac{\delta E}{\delta h_{\pm}} \tag{1.1}$$

$$E = \frac{1}{2}\int\limits_V v^2 dV + \int\limits_{\Sigma_+} d\sigma + \int\limits_{\Sigma_-} d\sigma \tag{1.2}$$

где функционал E имеет смысл полной энергии пленки. Далее выберем систему единиц, в которой плотность жидкости, коэффициент поверхностного натяжения и невозмущенная полутолщина плоской струи равны единице. Влиянием воздуха на динамику струи пренебрегаем (см., например, работы [15–19], где рассмотрено влияние аэродинамических возмущений на устойчивость плоской струи). В (1.2) функционал энергии состоит из кинетической энергии жидкости и потенциальной энергии сил поверхностного натяжения, равной сумме площадей верхней и нижней свободных границ.

С помощью формулы Грина выражение для E можно свести к функционалу

$$\begin{aligned} 2E = \int\Bigg(&\Phi_+\frac{\partial\phi}{\partial z}\bigg|_{z=h_+}(1+(\nabla h_+)^2) - \nabla h_+\nabla\Phi_+\Phi_+) + 2(\sqrt{1+(\nabla h_+)^2}-1) - \\ &-\Phi_-\bigg(\frac{\partial\phi}{\partial z}\bigg|_{z=h_-}(1+(\nabla h_-)^2) + \nabla h_-\nabla\Phi_-\Phi_-) + 2(\sqrt{1+(\nabla h_+)^2}-1)\Bigg)dxdy \end{aligned} \tag{1.3}$$

В выражении (1.3) введены двумерные градиенты соответствующих функций по переменным x, y – декартовых координат в невозмущенной срединной плоскости. Следуя работе [10], далее в качестве искомых функций введем следующие

$$2\Phi \equiv \Phi_+ + \Phi_-, \quad 2Y \equiv h_+ + h_-, \quad 2\chi \equiv \Phi_+ - \Phi_-, \quad 2h \equiv h_+ - h_- \tag{1.4}$$

Здесь Y имеет смысл возвышения средней линии струи и h-возмущенной полутолщины струи. Функции h, Y будут канонически сопряженными для функции Φ, χ соответственно с гамильтонианом $E/2$. В переменных (1.4) гамильтониан E имеет вид

$$E = \int\left(\left\{\frac{\partial\phi}{\partial z}\right\}(\chi(1+(\nabla Y)^2+(\nabla h)^2)+2\Phi\nabla Y\cdot\nabla h)+\right.$$

$$+\left[\frac{\partial\phi}{\partial z}\right](\Phi(1+(\nabla Y)^2+(\nabla h)^2)+2\chi\nabla Y\cdot\nabla h)+h(\nabla(\Phi\nabla\Phi)+\nabla(\chi\nabla\chi))- \tag{1.5}$$

$$\left.-\nabla Y\nabla(\chi\Phi)+\sqrt{1+(\nabla h_+)^2}+\sqrt{1+(\nabla h_-)^2}-2\right)dxdy$$

Здесь фигурные скобки $\{A\}$ означают среднее значение функции A на двух границах; $2\{A\} = A_+ + A_-$, квадратные скобки – полуразность значений; $2[A] = A_+ - A_-$.

Решения уравнения Лапласа, которое при $z = 0$ принимает значение $f(x, y, t)$ и производная которого при $z = 0$ равна $g(x, y, t)$, имеет вид

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} z^k\phi_k;\quad \phi_{2k} = (-1)^k\frac{\Delta^k f(x,y,t)}{(2k)!},\quad \phi_{2k+1} = (-1)^k\frac{\Delta^k g(x,y,t)}{(2k+1)!}$$

Поэтому

$$\Phi_\pm = \sum_{k=0}^{\infty}(Y\pm h)^k\phi_k;\quad \left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=h_\pm} = \sum_{k=0}^{\infty}(Y\pm h)^{k-1}k\phi_k \tag{1.6}$$

Далее будем предполагать отклонения срединной поверхности пленки сравнимыми по величине с характерной длиной волны L. В выбранных единицах $L \gg 1$. Величина $\epsilon = 1/L$ – малый параметр. Имеем оценки

$$|\nabla Y| \sim 1;\quad f\sim 1/\epsilon;\quad g\sim 1;\quad \phi_k\sim\epsilon^k;\quad Y^k\phi^k\sim 1$$

Скорости в пленке будем считать сравнимыми по величине со скоростью капиллярных волн, в выбранных единицах имеющих порядок единица. Тогда с учетом формул (1.6) и определения функций Φ, χ, $\{\phi_{,z}\}$ и $[\phi_{,z}]$ получим

$$\Phi \approx A_1+\frac{h^2}{2}A_3(1+O(\epsilon)),\quad \chi\approx h\left(A_2+\frac{h^2}{6}A_4(1+O(\epsilon)\right),$$

$$\{\phi_{,z}\}\approx A_2+\frac{h^2}{2}A_4(1+O(\epsilon)),\quad [\phi_{,z}]\approx h\left(A_3+\frac{h^2}{6}A_5(1+O(\epsilon)\right) \tag{1.7}$$

$$A_i = \sum_{k=i-1}^{\infty}Y^{k-i}\frac{k!}{(k-i+1)!}\phi_k;\quad i = 1,\ldots,5,\quad \phi_{,z}\equiv\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

Из определения функций A_i, $i = 1, \ldots, 5$ следует, что они связаны между собой тождествами:

$$\Delta A_i = -A_{i+2}(1+(\nabla Y)^2)+2\nabla Y\nabla A_{i+1}+A_{i+1}\Delta Y,\quad i = 1,2,3$$

Таким образом, функции A_i, $i = 3, 4, 5$ могут быть выражены через функции $A_1(x, y, t)$, $A_2(x, y, t)$ и производные от этих функций и функции Y. Далее пренебрежем членами, обозначенными в формулах (1.7) $O(\epsilon)$. Тогда функционал энергии пленки с точностью до членов, имеющих порядок ϵ^4, запишется в виде

$$E = \int\left(h(\mathbf{u}+\omega^2)+2\sqrt{1+(\nabla Y)^2}+\frac{h^3}{3}(\nabla\omega)^2-\frac{h^3}{3}\frac{(\nabla\cdot\mathbf{u}-\nabla\omega\cdot\nabla Y)^2}{1+(\nabla Y)^2}+\frac{(\nabla h)^2}{(1+(\nabla Y)^2)^3}\right)dxdy \tag{1.8}$$

$$\mathbf{u}\equiv\nabla\Phi-\frac{\chi}{h}\nabla Y;\quad \omega\equiv\frac{\chi}{h}$$

С помощью функционала энергии (1.8) в плоском случае из уравнений Гамильтона (1.1) получим систему уравнений

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(hu) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial G}{\partial u_x} \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t}+u\frac{\partial Y}{\partial x}-v = -\frac{1}{h}Y_x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial u_x}-\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial v_x} \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv)+\frac{\partial}{\partial x}\left(huv-\frac{Y_x}{\sqrt{1+Y_x^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial Y_x}-v\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial u_x}\right) \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu)+\frac{\partial}{\partial x}\left(hu^2-\frac{1}{\sqrt{1+Y_x^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{hh_x}{\sqrt{(1+Y_x^2)^3}}+\frac{h_x^2}{2\sqrt{(1+Y_x^2)^3}}-u\frac{\partial G}{\partial u_x}-4G-Y_x\frac{\partial G}{\partial Y_x}\right) \tag{1.12}$$

Здесь G означает часть гамильтониана порядка ϵ^2

$$G\equiv\frac{h^3}{6}\left(v_x^2-\frac{(u_x-Y_xv_x)^2}{1+Y_x^2}\right)+\frac{h_x^2}{\sqrt{(1+Y_x^2)^3}},\quad \left(A_x=\frac{\partial A}{\partial x}\right)$$

Индекс x у функций h, Y, u, v означает производные этих функций по x. В правых частях уравнений содержатся члены порядка ϵ^2. Левые части уравнений (1.9)–(1.12) представляют собой систему, найденную в работу [10]; назовем ее системой нулевого приближения. Отличие системы (57–60) из обзора [4] и системой (1.9)–(1.12) заключается в том, что в работе [4] использовано предположение $Y_x \ll 1$, из всех членов в правой части уравнения (1.12) в [4] использовался лишь член $h\partial^3 h/\partial x^3$, а правые части уравнений (1.9)–(1.11) не учитывались вовсе. При конечных наклонах струи модель [4] становится неприменимой, так как она не учитывает всех членов порядка ϵ^2.

2. Эволюция варикозных (симметричных) возмущений. При $Y = 0$, $v = 0$ функция Гамильтона (1.8) для плоских возмущений сводится к выражению

$$E = hu^2-\frac{1}{3}h^3u_x^2+h_x^2,\quad u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \tag{2.1}$$

Соответствующая гамильтонова система, состоящая из кинематического и динамического условий, имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\frac{\delta E}{\delta\Phi} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(hu+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}(h^3u_x)\right)\\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\frac{\delta E}{\delta h} = -\left(\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}h^2u_x^2-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)\end{aligned} \tag{2.2}$$

Если ввести среднюю скорость по сечению пленки u_a, то система (2.2) запишется в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(hu_a) = 0, \quad \frac{\partial hu_a}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(hu_a^2) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}h^3u_{ax}^2-h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{1}{2}h_x^2\right),$$
$$u_a \equiv u+\frac{1}{3h}\frac{\partial(h^3u_x)}{\partial x} \tag{2.3}$$

Уравнения (2.3) отличаются от уравнений (3.8)–(3.9) в работе [12] диспергирующим членом $2/3h^3u_{ax}^2$. С помощью интегрирования уравнения траектории $dx/dt = u_a(x, t)$ введем лагранжеву координату ξ как константу интегрирования с начальным условием $x(\xi, 0) = \xi$. Тогда из уравнения неразрывности получим $h(x, t)(\partial x/\partial\xi) = h_0(\xi)$, где $h_0(x)$ – распределение толщины пленки в начальный момент времени.

Без учета диспергирующих членов образование перетяжки ($h \to 0$) возникает в волне разрежения, в которой [12]

$$x = \xi+tf(\xi), \quad h = \frac{h_0(\xi)}{1+tf'(\xi)}, \quad u_a = \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_\xi = f(\xi) \tag{2.4}$$

В эйлеровых координатах x, t соответствующее решение имеет неявный вид $u_a = f(x-u_at)$. Здесь $f'(\xi)$ – финитная положительная функция: $f(\xi) = u_1 = \text{const}$ при $\xi < A_1$; $f(\xi) = u_2 = \text{const}$ при $\xi > A_2$. Здесь $[A_1, A_2]$ – интервал, в котором функция $f'(\xi)$ отлична от нуля. Диспергирующие члены в правой части уравнения (2.3) позволяют изучить структуру решения там, где волна разрежения примыкает к невозмущенной пленки с постоянной толщиной и скоростью. Согласно (2.4) для $f'(x) > 0$ с течением времени пленка утоньшается до тех пор, пока не становится необходимым учет сил электростатического взаимодействия поверхностей и сил Ван-дер-Ваальса–Лондона [7–9, 20]. В [21] изучались солитонные решения с учетом сил поверхностного взаимодействия, которые придают упругость варикозной моде и делают ее подобной гравитационной поверхностной волне.

3. Нелинейные капиллярные волны. В отличие от приближения "мелкой воды" система нулевого порядка (левые части уравнений (1.9)–(1.12)) является вырожденной недиагонализуемой гамильтоновой системой четвертого порядка (общая теория гамильтоновых систем гидродинамического типа была развита в [22]). Решения системы нулевого порядка, следуя идее автора [23], можно представить как поверхности в фазовом пространстве u, v, h, Y. Порядок системы при этом понизится на единицу. У системы нулевого приближения были найдены решения, соответствующие нелинейным капиллярным волнам [10]:

$$Y_x = \tan\phi; \quad u = \pm(\cos\phi-1); \quad v = \pm\sin\phi; \quad h\cos\phi = 1 \tag{3.1}$$

где ϕ – есть произвольная функция $x \pm t$: $\phi = f(x \pm t)$. Покажем, что учет диспергирующих членов в системе (1.9)–(1.12) убирает произвол в выборе функции f. Форма волны при этом может быть представлена в параметрическом виде

$$\sqrt{3(U^2-1)}(x+Ut) = \int_0^\phi \frac{\cos\phi_1 d\phi_1}{\sqrt{2(\cos\phi_1-\cos\phi_0)}} = 2F(\lambda, k)-E(\lambda, k) \tag{3.2}$$

$$Y = \sqrt{3(U^2-1)}\sqrt{2(\cos\phi_1-\cos\phi_0)}; \quad \sin\lambda \equiv \frac{\sin(\phi/2)}{\sin(\phi_0/2)}, \quad k = \sin\frac{\phi_0}{2} \tag{3.3}$$

Обозначения эллиптических функций Лежандра взяты из книги [24]. Параметр ϕ имеет смысл угла наклона касательной к срединной линии пленки к оси x; ϕ_0 означает максимальный угол наклона. Длина волны выражается через полные эллиптические интегралы:

$$L = \frac{4}{\sqrt{3(U^2-1)}}(2K(k) - E(k)) \tag{3.4}$$

Чтобы доказать эти утверждения, будем разыскивать решение системы (1.9)–(1.12) в виде бегущей волны, в которой искомые функции зависят от $x + Ut$. Тогда каждое уравнение дивергентной системы (1.9)–(1.12) может быть один раз проинтегрировано, после чего система перепишется в виде

$$\begin{aligned}
&(U+u)h - U = B_u; \quad B_u \equiv \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial u_x} \\
&U\tan\phi - vh = -B_v; \quad B_v \equiv \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial v_x} \\
&Uv - \sin\phi = B_y; \quad B_y \equiv \frac{\partial G}{\partial Y_x}, \quad Uu - \cos\phi + 1 = B \\
&B \equiv -G - B_y\tan\phi + \frac{1}{2}h_x^2(\cos\phi)^3 + \frac{\partial}{\partial x}\left((\cos\phi)^3 h\frac{\partial h}{\partial x}\right)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

При пренебрежении диспергирующими членами (правыми частями в уравнениях (3.5)) из этой системы легко получим решение (3.1)–(3.3) с верхними знаками с $U = 1$. Исключая из левых частей (3.5) функции u, v, h, получим

$$(U^2 - 1)\tan\phi = B_y - B_v + \tan\phi(B_u - B) \tag{3.6}$$

С точностью до членов порядка ϵ^4 в правую часть (3.6) можно подставить нулевое приближение (18) для u, v, h как функций $x + Ut$. Тогда получим

$$B_y - B_v + \tan\phi(B_u - B) = -\frac{1}{3}\frac{d^2}{dx^2}\sin\phi$$

Поэтому уравнение (3.6) запишется в виде

$$\cos\phi\frac{d^2}{dx^2}\sin\phi + 3(U^2-1)\sin\phi \mp 0 \tag{3.7}$$

Умножая (3.7) на $d\phi/dx$ и интегрируя по x, получим

$$\cos\phi\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = 3(U^2-1)(\cos\phi - \cos\phi_0) \tag{3.8}$$

В уравнении (3.8) константа интегрирования выбрана в виде $3(U^2 - 1)\cos\phi_0$. Элегантное уравнение (3.8) получилось за счет использования всех диспергирующих членов в правых частях (1.9)–(1.12). Полученное решение (3.1)–(3.3) имеет характерные черты солитонного решения, так как длина волны согласно (3.4) определяется не только фазовой скоростью, но и амплитудой решения.

4. Малые возмущения нелинейной капиллярной волны. Рассмотрим малые возмущения решения (3.1)–(3.3) в системе координат, двигающихся с фазовой скоростью волны, и воспользуемся галилеевой инвариантностью системы нулевого приближения. Введем обозначения

$$h\cos\phi = h_1; \quad u + U = u_1\cos\phi; \quad v = v_1\sin\phi \tag{4.1}$$

Исключая из уравнений (1.9)–(1.12) производные по времени от нуля ϕ с помощью уравнения (1.10), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}h_1 + \cos\phi\left(\frac{\partial}{\partial x}h_1u_1 - \sin\phi\frac{\partial}{\partial x}(\sin\phi(u_1 - v_1))\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_1u_1) + \frac{\partial}{\partial x}((h_1u_1^2 - 1)\cos\phi) = 0 \tag{4.2}$$

$$\sin\phi\frac{\partial}{\partial t}(v_1h_1) + \cos\phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\sin\phi(v_1u_1h_1 - 1) - v_1h_1\frac{\partial}{\partial x}(\sin\phi(u_1 - v_1))\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tan\phi + \frac{\partial}{\partial x}(\sin\phi(u_1 - v_1)) = 0 \tag{4.3}$$

Точному решению (3.1)–(3.3) этой системы соответствует решение $u_1 = v_1 = h_1 = 1$, $\phi = \phi_0(x)$. Введем вместо координаты x длину дуги невозмущенной капиллярной волны s и будем предполагать гармоническую зависимость малых возмущений $h_1 = 1 = h'$, $v_1 - 1 = v'$, $u_1 - 1 = u'$ от времени $h' \sim v' \sim u' \sim \exp\,(i\omega t)$. Уравнение (4.3) служит для определения возмущения ϕ, которое не содержится в малых возмущениях уравнений (4.2). Эти уравнения таковы

$$i\omega h' + \frac{d}{ds}(h' + u') - \sin\phi_0\frac{d}{ds}(\sin\phi_0(u' - v')) = 0$$

$$i\omega\sin\phi_0(v' + h') + \frac{d}{ds}(\sin\phi_0(2v' + h')) = 0 \tag{4.4}$$

$$i\omega\cos\phi_0(h' + u') + \frac{d}{ds}(\cos\phi_0(2u' + h')) = 0$$

Из системы (4.4) получим

$$\frac{d}{ds}g = \frac{1}{2}(a + b) + i\omega g, \quad \frac{d}{ds}a = iKa + \frac{1}{4}\omega^2 g$$

$$fddsb = -iKb + \frac{1}{4}\omega^2 g; \quad K \equiv \frac{d\phi_0}{ds} \tag{4.5}$$

$$a \equiv -i\omega\exp(i\omega/2)(M + iN), \quad b \equiv -i\omega\exp(i\omega/2)(M - iN)$$

$$h' \equiv g\exp(i\omega/2), \quad M \equiv 1/2\cos 2\phi(u' - v') + 1/2(h' + v' + u'), \quad N \equiv 1/2\sin 2\phi(u' - v')$$

Система (4.5) записана в инвариантных величинах, не зависящих от выбора системы координат: длины дуги срединной линии пленки s и ее кривизны K.

Чтобы понять смысл параметрической неустойчивости системы (4.5), аппроксимируем периодическую кривую (3.1) дугами окружностей с раствором центрального угла $2\phi_0$. В параметрическом виде форма кусочно-гладкой невозмущенной капиллярной волны будет даваться формулами

$$\sqrt{3(U^2 - 1)}(x + Ut) = (2n + 1)\sin\phi_0 + \sin(\lambda - 2n\phi_0);$$

$$\sqrt{3(U^2 - 1)}Y = (-1)^n(\cos(\lambda - 2n\phi_0) - \cos\phi_0); \; (2n - 1)\phi_0 < \lambda < (2n + 1)\phi_0, \quad n \in Z$$

Кривизна невозмущенной кривой будет даваться периодической кусочно-постоянной функцией, причем $K = (-1)^n K_0$; $K_0 = \text{const}$ в интервале $ns_0 < s < (n+1)s_0$, $s_0 \equiv \equiv 2\phi_0/\sqrt{3(U^2-1)}$, $n \in Z$. В этом случае система (4.5) имеет постоянные коэффициенты и характеристическое уравнение третьего порядка

$$1/4\omega^2 p - (p-\omega)(K_0^2 - p^2) = 0 \tag{4.6}$$

Частные решения системы (4.5) в промежутке изменения s в интервале $ns_0 < s < < (n+1)s_0$ имеют вид

$$A_j^{(n)} \exp i p_j (s - ns_0) \tag{4.7}$$

где p_j, $j = 1, 2, 3$ – корни характеристического уравнения (4.6), $A_j^{(n)}$ – постоянные векторы

$$A_j^{(n)} = (-1)^n K_0 A_0 + A_1 p_j + A_2 (p_j^2 - K_0^2)$$

$$A_0 = -\frac{i}{4}K_0^2 \begin{pmatrix} 1, \\ -1, \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = -\frac{i}{4}K_0^2 \begin{pmatrix} 1, \\ 1, \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0, \\ 0, \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для построения матрицы монодромии будем использовать условие непрерывности решения в точках разрыва кривизны. Это достаточно сделать для первого периода. Обозначим $k_j \equiv \exp i p_j s_0$. Итак, положим в формулах (4.7) $n = 0$ и продолжения решений $A_j^{(0)} \exp i p_j s_0$, $j = 1, 2, 3$ из интервала $[0, s_0]$ в интервал $[s_0, 2s_0]$ обозначим

$$\sum_{l=1}^{3} C_{jl} A_l^{(1)} \exp(s - s_0), \quad j = 1, 2, 3$$

Векторы $A_l^{(1)}$ определены равенствами (4.7). Константы C_{jl} отыщем из условия непрерывности решений при $s = s_0$

$$k_j (K_0 A_0 + A_1 p_j + A_2 (p_j^2 - K_0^2)) = \sum_{l=1}^{3} C_{jl} (-K_0 A_0 + A_1 p_l + A_2 (p_l^2 - K_0^2))$$

Приравнивая коэффициенты при независимых векторах A_0, A_1, A_2, получим линейные условия на коэффициенты матрицы $(C_{jl}) \equiv C$, из которых матрицу C можно представить в виде

$$C = DVW^{-1}; \quad D = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$$

$$V = \begin{pmatrix} 1, \ p_1, \ p_1^2 - K_0^2 \\ 1, \ p_2, \ p_2^2 - K_0^2 \\ 1, \ p_3, \ p_3^2 - K_0^2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} -1, \ p_1, \ p_1^2 - K_0^2 \\ -1, \ p_2, \ p_2^2 - K_0^2 \\ -1, \ p_3, \ p_3^2 - K_0^2 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Аналогично, частные решения (4.7) при $n = 1$ из области $[s_0, 2s_0]$ продолжим в область $[2s_0, 3s_0]$ с помощью условия непрерывности решения при $s = 2s_0$

$$A_j^{(1)}k_j = \sum_{l=1}^{3} \bar{C}_{jl}A_j^{(2)}, \Rightarrow \bar{C} = CWV^{-1} \tag{4.9}$$

Объединяя формулы (4.8), (4.9), получим матрицу монодромии T, связывающую значения фундаментальной системы решений через период $f(s = 2s_0) = Tf(s)$

$$T = C\bar{C} = DVW^{-1}DWV^{-1}$$

$$T_{ij} = \sum_{l=1}^{3} k_i k_l a_{il} a_{lj}, \quad a_{ij} = \delta_{ij} + \frac{2(p_k - p_l)(p_k p_l + K_0^2)}{(p_3 - p_2)(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)} \tag{4.10}$$

В формулах (4.10) в выражении для a_{ij} индексы j, k, l образуют четную перестановку индексов 1, 2, 3. Матрица $a \equiv VW^{-1}$ является нильпотентной: ее квадрат равен единичной матрице. Обозначим $b_{il} \equiv a_{il}a_{li}$ (по индексам нет суммирования). Матрица b является симметричной. Собственные значения матрицы монодромии удовлетворяют уравнению

$$\lambda^3 - l_1\lambda^2 + l_2\lambda - l_3 = 0$$

$$l_1 \equiv \sum_{i,j=1}^{3} b_{il}k_i k_l; \quad l_2 \equiv \sum_{i,l=1}^{3} \frac{b_{il}}{k_i k_l}; \quad l_3 \equiv (k_1 k_2 k_3)^2 \tag{4.11}$$

Характеристическое уравнение (4.6) имеет вещественные корни при $\omega < 0.60056K_0$. Вещественным корням p_j, $j = 1, 2, 3$ соответствуют k_j, равные по модулю единице. Коэффициенты l_1 и l_2 в уравнении (4.11) при этом являются комплексно сопряженными и модуль l_3 равен единице.

Выразим собственные значения λ через показатели Ляпунова $\lambda = \exp(i\nu)$ и представим коэффициенты уравнения (4.11) в тригонометрическом виде $l_1 = q\exp i\alpha$, $l_2 = q\exp{-i\alpha}$, $l_3 = \exp i\beta$. Введем новую искомую функцию $x \equiv \mathrm{tg}(\nu - \gamma)/6)$. Тогда уравнение для показателей Ляпунова (4.11) при $\omega < 0.60056K_0$ сведется к кубическому уравнению с вещественными коэффициентами

$$x^3(1 + a) + x^2 b - x(3 - a) + b = 0, \quad q \equiv q\cos(\alpha - \gamma/3), \quad b \equiv q\sin(\alpha - \gamma/3) \tag{4.12}$$

На плоскости (a, b) построим границу ∂D области D, внутри которой уравнение (4.12) имеет вещественные корни. Численное исследование показывает, что область D симметрична относительно оси a и имеет "треугольный" вид с вершинами в точки (–1, 2), (–1, –2), (3, 0). Вблизи точки (3, 0) граница области имеет асимптотику полукубической параболы $b = \pm 0.19(3 - a)^{3/2}$, точки (–1, 2), (–1, –2) соединены отрезком вертикальной прямой. В области D уравнение (4.12) имеет три вещественных корня, поэтому все собственные значения матрицы монодромии равны по модулю единице.

В случае нелинейной капиллярной волны (3.1)–(3.3) вместо длины дуги s введем параметр s_1

$$s_1 = \sqrt{3(U^2 - 1)}s = \int_0^{\phi} \frac{d\phi_1}{\sqrt{2(\cos\phi_1 - \cos\phi_0)}}$$

Кривизна кривой (3.1)–(3.3) при этом выражается через эллиптическую функцию Якоби [24]

$$K = 2k\sqrt{3(U^2 - 1)}\mathrm{cn}(s_1, k); \quad k = \sin(\phi_0/2)$$

Система (4.5) эквивалентна одному уравнению третьего порядка

$$\left(\frac{g_1''}{K_1}\right)+K_1g_1'+\frac{i}{2}\omega_1\left(\frac{g_1''}{K_1}-K_1g_1\right) = 0; \quad g_1\equiv g\exp\left(-\frac{i\omega s}{2}\right)$$
$$K_1\equiv 2k\mathrm{cn}(s_1,k), \quad \omega_1\equiv\sqrt{3(U^2-1)}\omega \tag{4.13}$$

В формуле (4.13) штрих означает производную по s_1. При малых ω_1 в уравнении (4.13) пренебрежем слагаемым с множителем ω_1. Тогда уравнение (4.13) легко интегрируется:

$$g_1 = Q\mathrm{cn}(s_1, \sin\phi_0/2), \quad Q = \mathrm{const}$$

и решение при малых ω_1 оказывается устойчивым. Амплитуда возмущения толщины пленки оказывается пропорциональной отклонению срединной линии в невозмущенной капиллярной волне (3.1)–(3.3)). Наибольшей величины возмущение толщины пленки достигает в гребнях и впадинах невозмущенной капиллярной волны. Этот факт четко проявляется также в численных исследованиях возмущений струи, возбуждаемых периодическими поперечными колебаниями источника струи в модели [4] (см. также [11]).

При больших ω_1 из (4.13) следует, что имеет место асимптотическое уравнение

$$g_1''-K_1g_1 = 0 \tag{4.14}$$

Решение уравнения (4.4) можно выразить через функцию Ламе [24]. Однако и без этого ясно, что одно из собственных значений матрицы монодромии в этом случае больше единицы

$$\lambda > 1 + \sqrt{T\int_0^T K_1^2 ds_1} \tag{4.15}$$

Здесь T – период функции Якоби $\mathrm{cn}(s_1, k)$, выражающийся через полный эллиптический интеграл. Неравенство (4.5) доказывается с помощью уравнения на собственные значения матрицы монодромии $\lambda^2-(f_1(T)+f_2'(T))\lambda+1=0$, где $f_{1,2}(\tilde{s})$ – решения уравнения (4.4) с начальными данными Пуанкаре $f_1(0)=1$, $f_1'(0)=0$; $f_2(0)=0$, $f_2'(0)=1$.

Таким образом, должно существовать такое значение $\omega=\omega_0$, что при $\omega>\omega_0$ одно из собственных значений матрицы монодромии становится по модулю больше единицы, в то время как при обратном неравенстве все собственные значения матрицы монодромии по модулю равны единице.

Заключение. Построена длинноволновая модель свободной тонкой пленки с конечными отклонениями от срединной поверхности с учетом диспергирующих членов. В рамках модели найдено точное периодическое решение, соответствующее нелинейной капиллярной волне, скорость которой зависит от ее амплитуды. Малые возмущения нелинейной капиллярной волны с гармонической зависимостью от времени в системе координат, движущейся со скоростью волны, обладают матрицей монодромии со следующим свойством: при периодах возмущений больших некоторого критического все собственные значения равны по модулю единице. При периодах возмущений меньших критического одно из собственных значений оказывается по модулю больше единицы.

Авторы выражают благодарность Г.Г. Черному, который дал одному из соавторов А.Н. Сибгатуллиной курсовую тему о возможности моделирования явлений двумерной гидродинамики на пленочных течениях. Авторы выражают также признательность участникам семинара Г.Г. Черного за обсуждение статьи. Работа частично поддержана SNI-CONACyT (Mexico).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Taylor G.I.* The dynamics of thin sheets of fluid. II. Waves on fluid sheets // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1959. V. 253. № 1274. P. 296–312.
2. *Капица П.Л.* Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. Вып. 1. С. 3–18.
3. *Gharib M., Derango Ph.* A liquid film (soap film) tunnel to study twodimensional laminar and turbulent shear flows // Physica D. 1989. V. 37. № 1–3. P. 406–416.
4. *Sirignano W.A., Mehring C.* Review of theory of distortion and disintegration of liquid streams // Progr. Energy and Combust. Sci. 2000. V. 26. P. 609–655.
5. *Mehring C., Sirignano W.A.* Nonlinear capillary wave distortion and disintegration of thin planar liquid sheets // J. Fluid Mech. 1999. V. 388. P. 69–113.
6. *Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г.* Волновое течение тонких пленок жидкости. Новосибирск: Наука, 1992. 255 с.
7. *Radoev B.P., Scheludko A.D., Manev E.D.* Critical thickness of thin liquid films: theory and experiment // J. Colloid Interface Sci. 1983. V. 95. № 1. P. 254–265.
8. *Erneux T., Davis S.H.* Nonlinear rupture of free films // Phys. Fluids A. 1993. V. 5. № 5. P. 1117–1122.
9. *Sharma A., Ruckenstein E.* An analytical nonlinear theory of thin film rupture and its application to wetting films // J. Colloid Interface Sci. 1986. V. 113. № 2. P. 456–479.
10. *Сибгатуллин Н.Р., Сибгатуллина А.Н.* Неустойчивость капиллярных волн в свободных тонких пленках // Вестн. МГУ. Сер. Математика, Механика. 1997. № 6. С. 35–39.
11. *Li Zhi, Sibgatullin N.R.* Nonlinear rupture of thin free liquid sheets // Commun. Nonlinear Science and Numer. Simulation. 1999. V. 4. № 3. P. 174–180.
12. *Yoshinaga T., Kotani K.* Modified membrane approximation on a thin liquid sheet // J. Phys. Soc. Japan. 2001. V. 70. № 2. P. 372–375.
13. *Ли Чжи, Сибгатуллин Н.Р.* Уточненная теория длинных волн на поверхности воды // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 2. С. 184–189.
14. *Захаров В.Е.* Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // ПМТФ. 1968. № 2. С. 86–94.
15. *Hagerty W.W., Shea J.F.* A study of the stability of plane fluid sheets // J. Appl. Mech. 1955. V. 22. № 4. P. 509–514.
16. *Squire H.B.* Investigation of the instability of a moving liquid film // Brit. J. Appl. Phys. 1953. V. 4. № 6. P. 167–174.
17. *Dombrovsky N., Johns W.R.* The aerodynamical instability and desintegration of viscous liquid sheets // Chem. Eng. Sci. 1963. V. 18. № 3. P. 203–214.
18. *Lin S.P., Lian Z.W., Creighton B.J.* Absolute and convective instability of a liquid sheet // J. Fluid. Mech. 1990. V. 220. P. 673–689.
19. *Li X.* On the instability of plane liquid sheets in two gas streams of unequal velocities // Acta Mec. 1994. V. 106. № 3–4. P. 137–156.
20. *Smorodin V.E.* Hydrodynamic instability of the wetting films (boundary layers) // Langmuir. 1994. V. 10. № 7. P. 2419–2422.
21. *Joosten J.G.H.* Solitary waves and solitons in liquid films // J. Chem. Phys. 1985. V. 82. № 5. P. 2427–2432.
22. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* Гидродинамика слабодеформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44. № 6. С. 29–98.
23. *Ferapontov V.E.* Invariant description of solutions of hydrodynamic type systems in hodograph space: hydrodynamic surfaces // arXiv: nlin. SI/0106040.
24. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher transcendental functions. V. 3. N. Y. etc.: McGraw-Hill, 1955 (*Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967. 299 с.)

Москва

Поступила в редакцию
8.I.2002