

УДК 532.526.3.013.4

© 2003 г. М.В. УСТИНОВ

ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ К ТУРБУЛЕНТНОСТИ НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА

Решена линейная задача о порождении возмущений пограничного слоя на плоской пластине внешней турбулентностью. Турбулентность представлена в виде набора периодических по пространству и времени вихревых мод. Показано, что пограничный слой наиболее восприимчив к низкочастотным модам продольной завихренности. Для изотропной турбулентности со спектром, удовлетворяющим закону Колмогорова-Обухова, найдены среднеквадратичные пульсации скорости в пограничном слое и их спектр.

Ключевые слова: ламинарно-турбулентный переход, турбулентность, восприимчивость, пограничный слой.

При повышенной степени турбулентности набегающего потока ($Tu > 1\%$) ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое происходит без образования волн Толлмина–Шлихтинга [1]. Вместо них появляются низкочастотные пульсации скорости, амплитуда которых возрастает пропорционально \sqrt{x} , где x – расстояние от передней кромки [2]. Визуализация потока [3] показывает, что эти возмущения представляют собой узкие, вытянутые в направлении потока полосы с повышенной или пониженной скоростью. Предполагается, что такие полосчатые структуры появляются в результате проникновения вихревых возмущений набегающего потока в пограничный слой и их последующего усиления в нем. Поэтому решение задачи о восприимчивости пограничного слоя к вихревым возмущениям дает возможность теоретического описания начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода при повышенной степени турбулентности набегающего потока.

Восприимчивость пограничного слоя к достаточно широкому классу возмущений – продольным нестационарным вихрям – исследована в [4]. Оказалось, что порождаемые ими возмущения подобны полосчатой структуре и сначала нарастают линейно по x , а затем затухают вследствие вязкой диссипации. При увеличении частоты возмущения усиливаются слабее, что качественно соответствует результатам эксперимента. Специально поставленный эксперимент [5], в котором исследовалось взаимодействие искусственно созданных продольных вихрей с пограничным слоем подтвердил правильность теории [4]. Однако эта теория не обеспечивает описания основных закономерностей перехода при повышенной степени турбулентности – законов нарастания среднеквадратичных пульсаций и эволюции их спектров.

Для их нахождения необходимо разложить внешнюю турбулентность на отдельные вихревые моды и исследовать восприимчивость пограничного слоя к ним. В результате должны получиться полные спектральные характеристики пульсаций скорости в пограничном слое. Попытка такого подхода предпринята в [6], где восприимчивость пограничного слоя к вихревым возмущениям описывалась в рамках нестационарных уравнений пограничного слоя, которые не обеспечивают адекватного описания явле-

ния. В настоящей работе такая теория строится на основе параболизированных уравнений Навье-Стокса, использованных в [4].

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание плоской пластины турбулентным потоком вязкой несжимаемой жидкости со средней скоростью U_∞ и среднеквадратичной амплитудой пульсаций скорости $Tu U_\infty$. Степень турбулентности Tu будем считать достаточно малой для того, чтобы взаимодействие возмущений набегающего потока с пограничным слоем было линейным. Для описания течения введем декартову систему координат, оси x, y, z которой направим по потоку, вдоль передней кромки пластины и по нормали к ее поверхности. В качестве масштабов для координат и скорости выберем вязкую длину $l = \nu/U_\infty$ и скорость набегающего потока U_∞ . Завихренность в набегающем потоке G представим в виде суперпозиции периодических по поперечным координатам y, z и времени t функций G_j , которые являются решениями линеаризованных уравнений Навье-Стокса в однородном потоке. Такое решение имеет общий вид

$$G_j = [G_{jx}A_1 + G_{jz}A_2]e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t)}; \quad A_1 = \left\{1, -\frac{\alpha}{\beta}, 0\right\}; \quad A_2 = \left\{0, -\frac{\gamma}{\beta}, 1\right\} \quad (1.1)$$

$$\alpha = \omega(1 + 2k^2) + ik^2; \quad k^2 = \omega^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

и при заданных поперечных волновых числах β, γ и частоте ω определяется двумя константами G_{jx} и G_{jz} , имеющими смысл амплитуд продольной и вертикальной составляющих завихренности при $x = 0$. Поэтому два слагаемых в (1.1) будем называть продольной и вертикальной вихревыми модами.

Ввиду линейности задачи, взаимодействие каждой вихревой моды с пограничным слоем можно рассматривать независимо. Поэтому найдем сначала решение для завихренности набегающего потока (1.1). Так как подавляющая часть энергии пульсаций сосредоточена в вихрях с размерами, намного большими вязкой длины, то волновые числа β, γ будем считать малыми. Алгебраический рост стационарных возмущений пограничного слоя с поперечным периодом λ имеет место до расстояния от передней кромки порядка λ^2 [7]. Следовательно, можно ожидать, что характерная частота, при которой нестационарность оказывает заметное влияние на развитие возмущений такова, что их период порядка времени пролета участка усиления возмущений, т.е. $\omega \sim 1/\lambda^2 \sim \beta^2$. В дальнейшем будем рассматривать волновое число β в качестве малого параметра и предполагать, что $\gamma \sim \beta$, а $\omega \sim \beta^2$. В этих предположениях выражение для продольного волнового числа существенно упрощается

$$\alpha = \omega + i\sigma + O(\beta^3); \quad \sigma = \beta^2 + \gamma^2$$

Возмущения скорости v_j , соответствующие завихренности (1.1), также состоят из двух слагаемых, определяемых продольной и вертикальной модами и имеют вид

$$v_j = \{G_{jx}v_1 + G_{jz}v_2\}e^{i(\omega(x-t) + \beta y + \gamma z) - \sigma x}; \quad v_1 = \left\{0, \frac{i\gamma}{\sigma}, -\frac{i\beta}{\sigma}\right\}; \quad v_2 = \left\{\frac{i}{\beta}, 0, 0\right\} \quad (1.2)$$

При выводе (1.2) принималась во внимание малость ω и σ по сравнению с β и γ .

Оценим возмущения, создаваемые в пограничном слое продольной и вертикальной вихревыми модами. Пограничный слой намного более восприимчив к возмущениям, создающим поперечное течение в нем, чем к сравнимым по величине возмущениям продольной компоненты скорости [7]. Периодическое по размаху поперечное течение в пограничном слое приводит к появлению неоднородности продольной компоненты

скорости, величина которой в $1/\beta$ раз превышает амплитуду исходных возмущений. Поэтому, для оценки воздействия вихревых мод на пограничный слой достаточно оценить генерируемую ими скорость поперечного течения.

В случае продольной моды она по порядку величины равна своему значению в набегающем потоке G_{jx}/β и создает возмущения продольной компоненты скорости порядка G_{jx}/β^2 . Вертикальная мода представляет собой неоднородность продольной компоненты скорости. Для частного вида таких возмущений, не зависящих от z и t ($\omega = \gamma = 0$ в (1.2)), их взаимодействие с пограничным слоем на пластине с затупленной передней кромкой исследовано в [8]. Оказалось, что неоднородность скорости потока в направлении размаха приводит к появлению над пластиной поперечного течения. Если не учитывать влияния вязкости, скорость этого течения имеет логарифмическую особенность при $z \rightarrow 0$. Эта особенность проявляется при $z \ll r$, где r радиус затупления передней кромки. При $z \sim r$ скорость поперечного течения конечна, и для периодической по y неоднородности типа (1.3) имеет порядок $v \sim w \sim r\beta u_a$, где u_a — амплитуда неоднородности продольной компоненты скорости в набегающем потоке.

В [8] предполагалось, что радиус затупления пластины велик по сравнению с толщиной пограничного слоя, поэтому наличие особенности на стенке было существенным для оценки поперечного течения в нем. Бесконечно тонкой плоской пластине, рассматриваемой здесь, соответствует другой предельный случай, когда толщина пограничного слоя велика по сравнению с радиусом передней кромки. В этих предположениях особенность на стенке устраняется вязкими членами, и для скорости поперечного течения внутри пограничного слоя становится справедливой оценка по невязкой теории при $z \sim r$. Такое поперечное течение создаст возмущения продольной компоненты скорости в пограничном слое порядка $v/\beta \sim r\beta u_a \sim rG_{jz}/\beta$. Сравнение с оценкой для возмущений, порождаемых продольной модой показывает, что при $r \ll 1/\beta$ возмущениями от вертикальной моды можно пренебречь по сравнению с воздействием продольных вихрей. Полученное условие $r \ll 1/\beta \sim \lambda$, где λ — характерный масштаб турбулентных вихрей дает оценку размера затупления передней кромки, при котором реальная пластина может считаться бесконечно тонкой.

2. Решение для продольной вихревой моды. Найдем возмущения пограничного слоя плоской пластины при наличии в потоке вихревой моды (1.1) с $G_{jz} = 0$. Сделанные в разделе 1 оценки показывают, что она создает в пограничном слое поперечное течение со скоростью $\sim G_{jx}/\beta$, которое на расстоянии $x \sim 1/\beta^2$ от передней кромки преобразуется в неоднородность продольной компоненты скорости порядка G_{jx}/β^2 . Используя эти оценки введем новые независимые переменные

$$X = \beta^2 x; \quad Z = \beta z; \quad \Omega = \frac{\omega}{\beta^2}; \quad T = \beta^2 t$$

и будем искать решение для составляющих скорости u_Σ , v_Σ , w_Σ и давления p_Σ в виде

$$\begin{aligned} u_\Sigma &= U_0(X, Z) + \frac{G_{jx}}{\beta^2} U(X, Z) e^{i\Phi} \\ v_\Sigma &= \frac{G_{jx}}{\beta} V(X, Z) e^{i\Phi}; \quad \Phi = \Omega(X - T) + \beta y \\ w_\Sigma &= \beta W_0(X, Z) + \frac{G_{jx}}{\beta} W(X, Z) e^{i\Phi} \\ p_\Sigma &= \beta^2 P_0(X, Z) + G_{jx} P(X, Z) e^{i\Phi} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь первое слагаемое описывает основное течение, соответствующее пограничному слою Блазиуса

$$U_0 = f' \quad W_0 = \frac{1}{2\sqrt{X}}(\eta f' - f) \quad P_0 = O(1); \quad \eta = \frac{Z}{\sqrt{X}} \quad (2.2)$$

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0; \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1$$

а второе – возмущения, порожденные завихренностью набегающего потока. Для иллюстрации физического смысла малого параметра β и введенных переменных X, Z, Ω выразим их через размерные величины, которые обозначим буквами со штрихами

$$\beta = \frac{2\pi}{R_\lambda}, \quad X = \frac{x'}{D'}, \quad Z = 2\pi\frac{z'}{\lambda'}, \quad \Omega = \frac{\omega'D'}{U_\infty}$$

Здесь $R_\lambda = U_\infty\lambda'/\nu$ – число Рейнольдса, вычисленное по поперечному периоду вихревой моды λ' , $D' = \lambda'R_\lambda/4\pi^2$ – характерный масштаб в продольном направлении. На расстоянии D' от передней кромки толщина пограничного слоя $\delta' \sim (\nu D'/U_\infty)^{1/2}$ есть величина порядка периода возмущений λ' , и безразмерная вертикальная координата Z совпадает с внутренней вертикальной координатой пограничного слоя. Продольный период возмущений по порядку величины совпадает с D' и в β^{-1} (или в R_λ) раз превосходит толщину пограничного слоя. Этим они принципиально отличаются от волн Толлмина–Шлихтинга с характерной длиной порядка δ' , порождение которых внешней завихренностью исследовалось в [9, 10]. Автономная переменная $\eta = Z/\sqrt{X}$ не зависит от малого параметра β и выражается через размерные величины обычным способом $\eta = z'(U_\infty/\nu x')^{1/2}$.

Подстановка (2.1) в уравнения Навье–Стокса, линеаризация и отбрасывание членов порядка β^2 приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned} i\Omega(U_0 - 1)U + U_0\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial U_0}{\partial X}U + W_0\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial W_0}{\partial Z}W &= \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} - U \\ i\Omega(U_0 - 1)V + U_0\frac{\partial V}{\partial X} + W_0\frac{\partial V}{\partial Z} &= -iP + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} - V \\ i\Omega(U_0 - 1)W + U_0\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial W_0}{\partial X}U + W_0\frac{\partial W}{\partial Z} + \frac{\partial W_0}{\partial Z}W &= -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} - W \\ i\Omega U + \frac{\partial U}{\partial X} + iV + \frac{\partial W}{\partial Z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

В отличие от исходных уравнений Навье–Стокса эта система параболического типа. Для нее требуются граничные условия на стенке и при $Z \rightarrow \infty$, а также начальные условия в некотором сечении $X = X_0$. Для постановки последних рассмотрим течение в окрестности передней кромки, где $X \sim \beta$ и $Z \sim 1$. Эту окрестность разделим на две подобласти: пограничный слой, толщиной порядка \sqrt{X} , и невязкую часть, где $Z \sim 1$. В невязкой части (2.3) сводится к линеаризованным относительно однородного потока с $U_0 \equiv 1$ уравнениям Эйлера. Их решение, соответствующее возмущениям в набегающем потоке (1.2) и условию непротекания на пластине, легко находится если принять во внимание, что выражение для завихренности во внешнем потоке (1.1) с $G_{jz} = 0$ остается

справедливым и при наличии пластины. Полагая $U = 0$, остальные компоненты скорости получим из уравнения неразрывности и определения продольной завихренности

$$V = \frac{1}{1 + \Gamma^2}(e^{-Z} + i\Gamma e^{i\Gamma Z}), \quad W = \frac{i}{1 + \Gamma^2}(e^{-Z} - e^{i\Gamma Z}); \quad \Gamma = \frac{\gamma}{\beta} \quad (2.4)$$

В пограничном слое, где $Z \sim \sqrt{X}$, течение описывается уравнениями трехмерного стационарного пограничного слоя без градиента давления, т.е. (2.3) с $P = 0$ и $\Omega = 0$. Граничные условия при $Z \rightarrow \infty$ для них получаются из сращивания с внешним решением (2.4)

$$U \rightarrow 0, \quad V \rightarrow \frac{1 + i\Gamma}{1 + \Gamma^2}; \quad Z \rightarrow \infty$$

Решение трехмерных уравнений пограничного слоя с периодической по размаху трансверсальной составляющей скорости внешнего течения, справедливое при малых X , было получено аналитически в [11]. В введенных здесь обозначениях оно имеет вид

$$U = \frac{i - \Gamma}{2(1 + \Gamma^2)} X \eta f''', \quad V = \frac{1 + i\Gamma}{1 + \Gamma^2} f'', \quad \eta = \frac{Z}{\sqrt{X}} \quad (2.5)$$

где f – функция, задающая профиль скорости в пограничном слое Блазиуса (см. (2.2)). Для постановки начальных условий для (2.3) необходимо равномерно пригодное по Z или композитное решение при $X \ll 1$. Оно находится стандартным методом [12] и для U совпадает с (2.5), а для V имеет вид

$$V = \frac{1}{1 + \Gamma^2}[e^{-Z} + i\Gamma e^{i\Gamma Z} + (1 + i\Gamma)(f'' - 1)] \quad (2.6)$$

Чтобы сформулировать граничные условия для (2.3) при $Z \rightarrow \infty$ рассмотрим течение на большом расстоянии от стенки вне пограничного слоя. Здесь из-за простого вида основного течения $U_0 = 1$, $W_0 = W_{00}/\sqrt{X}$, $W_{00} = (1/2) \lim_{\eta \rightarrow \infty} (\eta f' - \eta)$ уравнения движения (2.3) существенно упрощаются и сводятся к

$$\begin{aligned} \mathbf{L}U = 0, \quad \mathbf{L}V = -iP, \quad \mathbf{L}W - \frac{W_{00}}{2X^{3/2}}U = -\frac{\partial P}{\partial Z} \\ \mathbf{L} \equiv \frac{\partial}{\partial X} + \frac{W_{00}}{\sqrt{X}} \frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial^2}{\partial Z^2} + 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

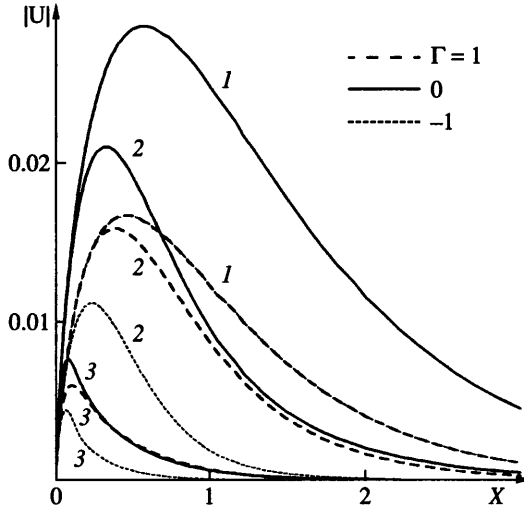
Начальные условия для (2.7) задаются решением в невязкой части окрестности передней кромки (2.4) при $Z \gg 1$, которое совпадает с возмущениями скорости в набегающем потоке

$$U(0, Z) = 0, \quad V(0, Z) = \frac{i\Gamma}{1 + \Gamma^2} e^{i\Gamma Z}, \quad W(0, Z) = \frac{i}{1 + \Gamma^2} e^{i\Gamma Z}, \quad P(0, Z) = 0$$

Частное решение (2.7), удовлетворяющее этим начальным условиям, имеет вид

$$U(X, Z) = 0, \quad V(X, Z) = \frac{i\Gamma}{1 + \Gamma^2} \chi(X, Z), \quad W(X, Z) = \frac{i}{1 + \Gamma^2} \chi(X, Z) \quad (2.8)$$

$$\chi = \exp[i\Gamma(Z - 2W_0\sqrt{X}) - (1 + \Gamma^2)X]$$



Фиг. 1. Зависимости амплитуды возмущений скорости, порожденных одной вихревой модой, от X при $\Omega = 0, 10, 50$ (кривые 1–3)

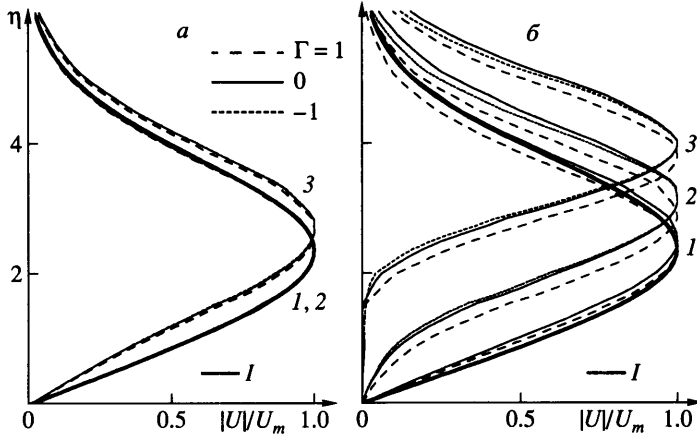
Их общее решение зависит от граничных условий при $Z = 0$, которые представляют собой связь между $V(X, 0)$ и $W(X, 0)$, получающуюся из решения задачи (2.3). Оно отличается от частного решения (2.8) членами, затухающими как e^{-Z} при $Z \rightarrow \infty$. При достаточно больших Z решение (2.8) становится справедливым для любых условий при $Z = 0$ и поэтому будет использоваться в качестве граничных условий для (2.3) во внешнем потоке.

Эти граничные условия, условия прилипания на стенке $U(X, 0) = V(X, 0) = W(X, 0) = 0$ и начальные условия для U (2.5) и V (2.6) при достаточно малом X образуют полную постановку задачи для системы уравнений (2.3). В нее входят два параметра: приведенная частота Ω и нормированное вертикальное волновое число Γ , поэтому решения (2.3) U, V, W, P являются функциями четырех переменных X, Z, Ω, Γ . Для удобства в дальнейшем вместо вертикальной координаты Z , будем использовать автомодельную переменную η . Решения (2.3) с положительными и отрицательными параметрами Ω и Γ связаны между собой соотношениями симметрии

$$U, W, P(\Omega, -\Gamma) = U^*, W^*, P^*(-\Omega, \Gamma), \quad V(\Omega, -\Gamma) = -V^*(-\Omega, \Gamma)$$

справедливость которых легко проверить непосредственной подстановкой. Поэтому достаточно исследовать поведение решений в любой полуплоскости параметров Ω, Γ , например для $\Omega > 0$. Система (2.3) решалась численно методом, описанным в [13] для значений параметров $0 < \Omega < 500, -10 < \Gamma < 10$. Начальные условия ставились при $X_0 = 10^{-5}$.

Решение (2.3) для функции U , имеющей смысл комплексной амплитуды пульсаций продольной составляющей скорости, показано на фиг. 1, 2. Функции V, W , описывающие возмущения поперечных компонент скорости, не представляют интереса, так как при $X \sim 1$ они пренебрежимо малы по сравнению с возмущениями продольной ее компоненты. На фиг. 1 построены зависимости $|U|$ от X при $\eta = 2.5$ для нескольких характерных значений приведенной частоты Ω и нормированного волнового числа Γ . Выбранное расстояние от стенки примерно соответствует максимуму возмущений по Z при малых X (положение максимума при этом не зависит от Ω и Γ). При всех Ω возмущения сначала растут линейно по X в соответствии с асимптотическим решением при



Фиг. 2. Профили модуля возмущений скорости порожденных одной вихревой модой. Обозначения аналогичны фиг. 1, линия I – решение при $X \ll 1$ (2.5).

$X \ll 1$ (2.5), затем достигают максимума и далее затухают. При увеличении приведенной частоты и модуля нормированного волнового числа положение максимума смещается в сторону меньших X , а его величина уменьшается. Модули амплитуды пульсаций $|U|$ для равных по модулю положительных и отрицательных Γ различны, причем амплитуда пульсаций при положительных Γ больше, чем при отрицательных. Физически эта несимметрия означает разную восприимчивость пограничного слоя к волнам завихренности бегущим вверх и вниз.

Вертикальные профили амплитуды возмущений для различных Ω , Γ при $X = 0.1$ и 1 показаны на фиг. 2, *a*, *b* соответственно. При малых X и Ω они почти совпадают с асимптотическим решением [11], построенным жирной сплошной линией. При увеличении расстояния от передней кромки максимум возмущений постепенно удаляется от стенки. Этот сдвиг, практически незаметный при малых Ω , становится значительным при большей приведенной частоте. Форма профиля пульсаций скорости практически не зависит от Γ . Аналогичные закономерности – снижение восприимчивости пограничного слоя при увеличении размерных ω и γ и сдвиг максимума пульсаций от стенки при увеличении частоты были получены в [4].

3. Решение для изотропной турбулентности. На основе решения для одной вихревой моды найдем пульсации скорости, порождаемые внешней турбулентностью. Турбулентность набегающего потока будем считать однородной по поперечным координатам и времени. Это означает, что возмущения любой характеристики течения X (компонент скорости, завихренности, давления) описываются однородной случайной функцией y, z, t . Такая функция может быть представлена в виде интеграла Стильеса

$$X(y, z, t) = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})} d^3 X_*(\mathbf{k}) \quad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{k} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ – волновой вектор, $\mathbf{r} = \{-t, y, z\}$ – комбинированный радиус-вектор, $X_*(\mathbf{k})$ – случайная функция, дифференциалы которой удовлетворяют соотношению

$$\langle d^3 X_*(\mathbf{k}_1) * d^3 X_*(\mathbf{k}) \rangle = \langle X^2 \rangle_{\omega\beta\gamma} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) d^3 \mathbf{k}_1 d^3 \mathbf{k} \quad (3.2)$$

где $\delta(\mathbf{k})$ – дельта-функция Дирака, $\langle \rangle$ обозначает математическое ожидание, $\langle X^2 \rangle_{\omega\beta\gamma}$ – спектральная плотность случайной функции X в трехмерном фурье-пространстве, верхний индекс " * " обозначает комплексно сопряженную величину.

Представление (3.1) является аналогом интеграла Фурье для случайных функций, которые не затухают при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$. Для дальнейшего рассмотрения потребуются три следующих свойства интеграла Стильеса (3.1).

Действие на X любого линейного оператора L , содержащего дифференцирование по пространственным координатам, аналогично интегралу Фурье, сводится к его действию на подынтегральное выражение. Иначе говоря, место равенство

$$L[X] = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(i\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})} d^3 X_{*\mathbf{k}}; \quad L[e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})}] = \Phi(i\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})}$$

Для вычисления дисперсии полученной случайной функции $\langle L[X]^2 \rangle$ необходимо поменять местами операции интегрирования и осреднения и применить равенство (3.2). В результате получается соотношение

$$\langle L[X]^2 \rangle = \langle L[X] * L[X] \rangle = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi * \Phi \langle X^2 \rangle_{\omega\beta\gamma} d^3 \mathbf{k} \tag{3.3}$$

Вычисление этим способом дисперсии исходной случайной функции X дает выражение, объясняющее смысл спектральной плотности

$$\langle X^2 \rangle = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \langle X^2 \rangle_{\omega\beta\gamma} d^3 \mathbf{k}$$

Если случайная функция $L[X]$ является однородной, то ее спектральная плотность дается подынтегральным выражением в (3.3)

$$\langle L[X]^2 \rangle_{\omega\beta\gamma} = \Phi * \Phi \langle X^2 \rangle_{\omega\beta\gamma} \tag{3.4}$$

Как было показано выше, определяющее воздействие на пограничный слой оказывают продольные вихревые моды. Продольную завихренность в набегающем потоке при $x = 0$ представим в виде

$$G_x(0, y, z, t) = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})} d^3 G_{x*\mathbf{k}} \tag{3.5}$$

Тогда возмущения скорости в пограничном слое u , порождаемые этой завихренностью, выражаются аналогичным интегралом от решения для вихревой моды, даваемого вторым слагаемым равенства (2.1)

$$u(x, y, z, t) = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\beta^2} U(X, \eta, \Omega, \Gamma) e^{i(\omega(x-t) + \beta y)} d^3 G_{x*\mathbf{k}}$$

Согласно (3.3), дисперсия u или среднеквадратичные пульсации скорости в пограничном слое выражаются интегралом

$$\langle u^2 \rangle = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\beta^4} |U(X, \eta, \Omega, \Gamma)|^2 \langle G_x^2 \rangle_{\omega\beta\gamma} d\omega d\beta d\gamma \tag{3.6}$$

где $\langle G_x^2 \rangle_{\omega\beta\gamma}$ – спектральная плотность продольной компоненты завихренности в набегающем потоке при $x = 0$.

В отличие от турбулентных пульсаций в набегающем потоке возмущения скорости в пограничном слое не являются однородной случайной функцией z . Это следует хотя бы из того, что их дисперсия $\langle u^2 \rangle$ зависит от z из-за зависимости от z подынтегрального выражения в (3.6). Пульсации скорости в пограничном слое являются однородной случайной функцией только двух переменных y и t , и поэтому их наиболее полной характеристикой является спектральная плотность в двумерном (по β и ω) фурье-пространстве $\langle u^2 \rangle_{\omega\beta}$. Она связана с дисперсией $\langle u^2 \rangle$ интегралом

$$\langle u^2 \rangle = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \langle u^2 \rangle_{\omega\beta} d\omega d\beta$$

сравнение которого с (3.6) дает

$$\langle u^2 \rangle_{\omega\beta} = \frac{1}{\beta^4} \int_{-\infty}^{+\infty} |U(X, \eta, \Omega, \Gamma)|^2 \langle G_x^2 \rangle_{\omega\beta\gamma} d\gamma \quad (3.7)$$

Это соотношение устанавливает связь спектральных плотностей пульсаций скорости в пограничном слое и завихренности в набегающем потоке и является наиболее общим решением задачи восприимчивости. Прямое сравнение (3.7) с известными данными эксперимента невозможно, так как в него входит трудноизмеримая величина – спектральная плотность пульсаций продольной завихренности. Ее можно связать со спектральными плотностями пульсаций поперечных составляющих скорости, используя выражение для продольной завихренности $G_x = \partial w/\partial y - \partial v/\partial z$ и правила операций со случайными функциями (3.2), (3.4). В результате получим

$$\langle G_x^2 \rangle_{\omega\beta\gamma} = \beta^2 \langle w^2 \rangle_{\omega\beta\gamma} + \gamma^2 \langle v^2 \rangle_{\omega\beta\gamma} - 2\beta\gamma \langle vw \rangle_{\omega\beta\gamma} \quad (3.8)$$

где $\langle vw \rangle_{\omega\beta\gamma}$ – взаимная спектральная плотность v и w .

Дальнейшее упрощение этого выражения возможно, если предположить, что турбулентность является изотропной. Тогда спектральные плотности всех составляющих скорости и их взаимные спектральные плотности выражаются через одну функцию – плотность энергетического спектра $E(k)$, которая зависит только от модуля волнового вектора (см., например, [14])

$$\langle v^2 \rangle_{\omega\beta\gamma} = \frac{\omega^2 + \gamma^2}{4\pi k^4} E(k); \quad \langle w^2 \rangle_{\omega\beta\gamma} = \frac{\omega^2 + \beta^2}{4\pi k^4} E(k); \quad \langle vw \rangle_{\omega\beta\gamma} = -\frac{\beta\gamma}{4\pi k^4} E(k)$$

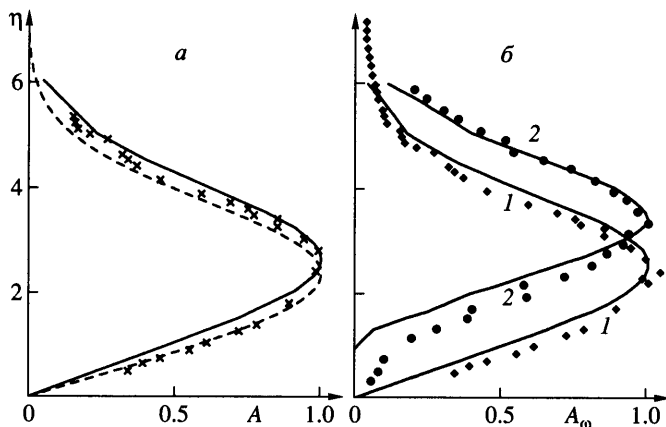
$$\frac{E(k)}{4\pi k^2} = \frac{1}{2} (\langle u^2 \rangle_{\omega\beta\gamma} + \langle v^2 \rangle_{\omega\beta\gamma} + \langle w^2 \rangle_{\omega\beta\gamma}); \quad k = \sqrt{\omega^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

Подставляя это в (3.8), выразим спектральную плотность продольной завихренности через легко измеряемую функцию $E(k)$

$$\langle G_x^2 \rangle_{\omega\beta\gamma} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{4\pi k^2} E(k)$$

Для дальнейшего упрощения задачи предположим, что спектральная плотность энергии соответствует закону Колмогорова-Обухова для инерционного интервала волновых чисел

$$E(k) = c\varepsilon_*^{2/3} k^{-5/3}$$



Фиг. 3. Профили пульсаций скорости порожденных внешней турбулентностью: *a* – интегральная амплитуда, *б* – амплитуда низкочастотных ($\omega = 4 \cdot 10^{-6}$) и высокочастотных ($\omega = 19 \cdot 10^{-6}$) пульсаций (1, 2). Сплошные линии – расчет, штриховая – решение при $X \ll 1$ (2.5), точки – эксперимент

Здесь ϵ_* – безразмерная скорость диссипации энергии в единице объема жидкости, c – константа. В этих предположениях, если пренебречь членами ω^2 по сравнению с $\beta^2 + \gamma^2$ и считать $k^2 = \beta^2 + \gamma^2$, выражение для спектральной плотности квадрата пульсаций скорости в пограничном слое (3.7) примет вид

$$\langle u^2 \rangle_{\beta\omega} = \frac{c}{4\pi\beta^{17/3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon_*^{2/3} |U(X, \eta, \Omega, \Gamma)|^2}{(1 + \Gamma^2)^{5/6}} d\gamma \quad (3.9)$$

Проинтегрировав ее по β , ω и произведя в получившемся тройном интеграле замену переменных β , γ , ω на X , Γ , Ω , получим среднеквадратичную амплитуду пульсаций скорости в пограничном слое

$$\langle u^2 \rangle = c\epsilon_*^{2/3} x^{5/6} F(\eta), \quad F(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|U(X, \eta, \Omega, \Gamma)|^2}{X^{11/6} (1 + \Gamma^2)^{5/6}} d\Gamma \right] d\Omega dX \quad (3.10)$$

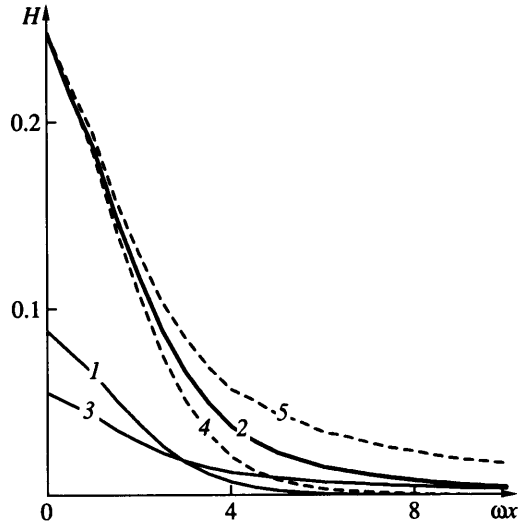
Используя известную оценку $\epsilon_* \sim Tu^3/L$, где L – интегральный масштаб турбулентности, выразим $\langle u^2 \rangle$ через наиболее распространенные характеристики внешней турбулентности

$$\langle u^2 \rangle = Tu^2 L^{-2/3} x^{5/6} F(\eta) \quad (3.11)$$

Этот закон нарастания возмущений слабо отличается от общепринятого эмпирического соотношения $\langle u^2 \rangle \sim Tu^2 x$, обычно используемого для представления данных эксперимента. Судить о том, является ли зависимость $\langle u^2 \rangle$ от x , полученная в известных экспериментах, действительно линейной весьма затруднительно. Расхождение закона нарастания (3.11) с данными эксперимента может быть также связано с отклонением реального спектра турбулентности от закона Колмогорова-Обухова.

Важным следствием полученного решения является универсальность профиля пульсаций скорости при использовании автомодельной переменной η в качестве вертикального масштаба. Этот факт широко известен из данных эксперимента, но до сих пор не объяснен теоретически с достаточной степенью строгости. Теоретический профиль среднеквадратичной амплитуды пульсаций скорости, даваемый функцией

$F_*(\eta) = \sqrt{F(\eta)/F_{\max}}$, найденный численным интегрированием, показан на фиг. 3, *a*.



Фиг. 4. Зависимость универсальной функции H , описывающей спектральную плотность квадрата пульсаций скорости от ωx при $\eta = 1, 2.6, 4$ (кривые 1–3). Нормированная H для $\eta = 1$ и 4 (кривые 4, 5)

Он хорошо совпадает как с данными эксперимента [2], так и с профилем возмущения продольной компоненты скорости при $X \ll 1$ (2.5), полученным в [11].

С целью описания данных эксперимента, связанных с частотными спектрами, найдем из (3.9) плотность частотного спектра пульсаций скорости. Для этого проинтегрируем (3.9) по β , сделаем замену переменных β, γ на X, Γ и выразим Ω через ω, x и X . В результате имеем

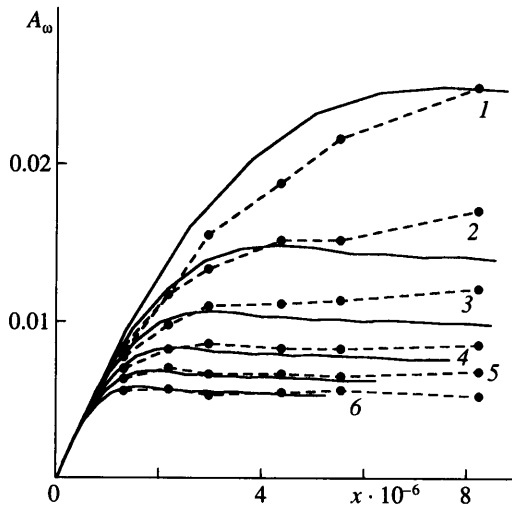
$$\langle u^2 \rangle_\omega = c \varepsilon_*^{2/3} x^{11/6} H(\eta, \omega x) \quad (3.12)$$

$$H = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|U(X, \eta, \omega x/X, \Gamma)|^2}{X^{17/6} (1 + \Gamma^2)^{5/6}} d\Gamma dX$$

Найденное решение показывает, что спектры пульсаций "сужаются" пропорционально $1/x$ по мере удаления от передней кромки. Зависимости $H(\omega x)$ при различных расстояниях от стенки η показаны на фиг. 4. Они соответствуют (с точностью до выбора масштаба по оси абсцисс) спектрам пульсаций скорости при фиксированном x , измеренным в [2]. Из фиг.4 видно, что спектры "сужаются" при приближении к стенке. Эта закономерность становится более заметной, если рассматривать спектры, нормированные так, чтобы они совпадали при $\omega = 0$ (штриховые линии на фиг. 4). Такая же зависимость спектра пульсаций скорости от вертикальной координаты наблюдалась в экспериментах [2, 3].

Универсальное решение (3.12) также описывает зависимости спектральной плотности пульсаций скорости от x и η при фиксированной частоте. Такие зависимости среднеквадратичной амплитуды пульсаций скорости A_ω , заключенных в узких диапазонах частот, найдены в эксперименте Кендалла и опубликованы в [4]. Амплитуда A_ω связана со спектральной плотностью пульсаций скорости очевидным соотношением

$$A_\omega = k_* \sqrt{\langle u^2 \rangle_\omega} = k_1 x^{11/12} H(\eta, \omega x)^{1/2}$$



Фиг. 5. Зависимости от x амплитуды пульсаций скорости для частот $\omega = (4, 7, 11, 15, 19, 21) \cdot 10^{-6}$ (кривые 1–6). Сплошные линии – расчет, штриховые – эксперимент Кендалла

Измеренные Кендаллом и рассчитанные по этой формуле зависимости максимальной по η среднеквадратичной амплитуды A_ω от x для разных значений частоты показаны на фиг. 5. Коэффициент k_1 был выбран из условия наилучшего совпадения теории с данными эксперимента. Из фиг. 5 видно, что при одном эмпирически подобранном коэффициенте построенная теория обеспечивает хорошее описание результатов эксперимента. На фиг. 3, б построены рассчитанные и измеренные Кендаллом профили амплитуды пульсаций скорости при $x = 8.9 \cdot 10^6$ и двух значениях частоты $\omega = 4 \cdot 10^{-6}$ и $19 \cdot 10^{-6}$ (амплитуды отнесены к их максимумам по η). Отчетливо видно, что профили высокочастотных и низкочастотных пульсаций различны. Профиль низкочастотных пульсаций практически совпадает с профилем интегральных по ω или среднеквадратичных пульсаций, показанным на фиг. 3, а. Это неудивительно, так как подавляющая часть энергии возмущений пограничного слоя сосредоточена в низких частотах. Максимум высокочастотных пульсаций сдвинут к внешней границе пограничного слоя. Этот сдвиг связан с аналогичным свойством решения (2.3) $U(X, \eta, \Omega, \Gamma)$ при больших Ω (см. фиг. 1). В целом рассчитанные профили высокочастотных и низкочастотных пульсаций удовлетворительно соответствуют измеренным в эксперименте.

Имеющиеся на фиг. 3 и 5 различия с экспериментом могут быть вызваны многими факторами: нелинейным развитием возмущений в эксперименте при больших x , наличием пульсаций другой природы (волн Толлмина-Шлихтинга), конечным размером затупления передней кромки и другими. Однако наиболее вероятной причиной расхождений является существенное отличие спектра турбулентности в реальном потоке от закона Колмогорова-Обухова.

Заключение. Рассмотрена линейная задача о восприимчивости пограничного слоя на плоской пластине к турбулентности набегающего потока. Турбулентность представлена в виде набора вихревых мод – периодических по y, z и t вихревых возмущений, "вмороженных" в поток. При малом по сравнению с масштабом турбулентности размере затупления передней кромки возмущения пограничного слоя порождаются в основном низкочастотными модами продольной завихренности. Найдена связь спек-

ров пульсаций скорости в пограничном слое и завихренности набегающего потока. Для изотропной турбулентности со спектром, удовлетворяющим закону Колмогорова-Обухова, получено решение, описывающее зависимости среднеквадратичных пульсаций и их спектра от x и η . Эти решения можно трактовать как законы подобия. Построенная теория хорошо согласуется с данными эксперимента.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№№ 01-01-00614 и 00-15-96069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Morkovin M.V.* The many faces of transition// *Viscouse drag reduction* / Ed. C.S. Wells. N.Y.: Plenum Press, 1969. P. 1–30.
2. *Westin K.J.A., Boiko A.V., Klingmann B.G., Kozlov V.V., Alfredsson P.H.* Experiments in a boundary layer subjected to freestream turbulence. Pt I: Boundary layer structure and receptivity // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 281. P. 193–218.
3. *Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Кузнецов В.Р.* Минеев Б.И., Секундов А.Н. Взаимодействие ламинарного пограничного слоя с внешней турбулентностью // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1989. № 5. С. 55–65.
4. *Bertolotti F.P.* Response of the Blasius boundary layer to free-stream vorticity // *Phys. Fluids.* 1997. V.9. № 8. P. 2286–2299.
5. *Bertolotti F.P., Kendall J.M.* Response of the Blasius boundary layer to controlled free-stream vortices of axial form // *AIAA paper.* 1997. № 97–2018.
6. *Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Кузнецов В.Р.* Проникновение трехмерных низкочастотных пульсаций скорости внешнего потока в ламинарный пограничный слой на плоской пластине // *Тр. ЦИАМ.* 1991. № 1287. С. 197–236.
7. *Andersson P., Berggren M., Henningson D.S.* Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers // *Phys. Fluids.* 1999. V. 11. № 1. P. 134–150.
8. *Golgshtein M.E., Leib S.J., Cowley S.J.* Distortion of a flat plate boundary layer by free-stream vorticity normal to the plate // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 237. P. 231–260.
9. *Рыжов О.С., Тимофеев С.В.* О взаимодействии вихря с локальной шероховатостью на обтекаемой поверхности // *Мат. моделирование.* 1992. Т. 4. № 6. С. 27–49.
10. *Duck P.W., Ruban A.I., Zhikharev C.N.* The generation of Tollmien-Schlichting waves by free-stream turbulence // *J. Fluid Mech.* 1996. V. 312. P. 341–371.
11. *Crow S.C.* The spanwise perturbations of two-dimensional boundary layers // *J Fluid Mech.* 1965. V. 24. Pt 1. P. 153–164.
12. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
13. *Устинов М.В.* Восприимчивость пограничного слоя на плоской пластине с затупленной передней кромкой к стационарной неоднородности набегающего потока // *ПМТФ.* 2000. № 4. С. 93–100.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 С.

Москва
E-mail: ustinov@stb.aerocentr.msk.su

Поступила в редакцию
21.XII.2001