МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 2003

УДК 532.5.011:532.135

Памяти
Александра Юльевича Ишлинского

© 2003 г. Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, Д. М. КЛИМОВ, А. Г. ПЕТРОВ

ЗАДАЧИ О БЕЗЫНЕРЦИОННОМ ТЕЧЕНИИ СЛАБОНЕОДНОРОДНЫХ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

Исследуется безынерционное течение вязкопластической среды со скалярным определяющим соотношением в форме Бингама–Ильюшина. Учитывается наличие жестких зон и их формоизменение в процессе движения. Приводится постановка линеаризованной начально-краевой задачи первого приближения по параметру неоднородности. Рассмотрены случаи трехмерного и плоского процессов деформирования. В последнем случае введение функции тока позволяет провести аналогию с уравнениями гамильтоновой механики и понятием хаоса. Нахождение закона движения или траектории каждой частицы позволяет судить о хаотизации и наступлении перемешивания.

Ключевые слова: вязкопластичность, предел текучести, жесткая зона, перемешивание, хаотизация.

Одним из подходов в задачах о перемешивании неоднородных сплошных сред является модель слабонеоднородной среды, в которой плотность и материальные функции в каждой точке и в каждый момент времени мало отличаются от своих средних по объему значений. Проводятся разложения в асимптотические ряды по возникающему малому параметру, причем нулевое приближение этих разложений соответствует движению однородной среды. В [1, 2] такой подход применен к квазистатическим течениям несжимаемой слабонеоднородной вязкой жидкости.

1. Пространственное деформирование слабонеоднородной среды. Пусть несжимаемая вязкопластическая среда занимает при $t > 0$ область $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega = \Sigma$. Плотность $\rho(\mathbf{x}, t)$ и динамическая вязкость $\mu(\mathbf{x}, t)$ среды – функции эйлеровых координат и времени, $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i$ – радиус-вектор частиц, x_i – координаты в декартовой системе. Предел текучести при сдвиге τ_s не зависит от координат и времени. Несжимаемость означает постоянство плотности каждой лагранжевой частицы, находившейся при $t = 0$ в точке $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{0i}\mathbf{e}_i$, при ее движении в Ω

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}_0, t) \equiv \rho^\circ(\mathbf{x}_0) \tag{1.1}$$

Начальное распределение $\rho^\circ(\mathbf{x}_0)$ известно в Ω. Равенство (1.1) является первым интегралом уравнения

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\rho = 0 \tag{1.2}$$

где $\mathbf{v} = v_i\mathbf{e}_i$ – вектор скорости частиц.

Векторные определяющие соотношения вязкопластической среды

$$s_{ij} = \frac{2T}{U}v_{ij} \tag{1.3}$$

говорят о соосности девиатора $s_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ тензора напряжений $\sigma_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ и тензора скоростей деформаций $v_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, совпадающего в силу несжимаемости со своим девиатором. Связь квадратичных инвариантов этих тензоров – максимального касательного напряжения $T = (s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ и максимальной скорости деформации сдвига $U = (2v_{ij}v_{ij})^{1/2} = [v_{i,j}(v_{i,j} + v_{j,i})]^{1/2}$ – соответствует материалу Бингама–Ильюшина

$$T = \tau_s + \mu U \tag{1.4}$$

Определяющие соотношения (1.3), (1.4) имеют место в той заранее неизвестной подобласти $\Omega_f \subset \Omega$, точки которой удовлетворяют неравенству $T(\mathbf{x}, t) > \tau_s$. Граница Σ_r, отделяющая Ω_f от жесткой зоны Ω_r ($\Omega = \Omega_f \cup \Omega_r$), которая движется как абсолютно твердое тело, находится из уравнения

$$\Sigma_r = \{\mathbf{x}(t)\colon T(\mathbf{x}, t) = \tau_s\} \tag{1.5}$$

Представим уравнение (1.5) поверхности Σ_r также в виде набора поверхностей

$$x_3 = \bigcup_{\nu=1}^{N} \xi_\nu(x_1, x_2, t) \tag{1.6}$$

Запишем уравнения равновесия (безынерционного деформирования) в скоростях для неоднородной вязкопластической среды и условие несжимаемости

$$\begin{gathered} -p_{,i} + \left(\frac{\tau_s}{U} + \mu\right)\Delta v_i + \left(\frac{\tau_s}{U} + \mu\right)_{,j}(v_{i,j} + v_{j,i}) + \rho F_i = 0 \\ v_{i,i} = 0 \end{gathered} \tag{1.7}$$

где p – давление, $F(\mathbf{x}, t)$ – заданные в Ω массовые силы.

Закон движения частиц определяется из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = v_i, \quad x_i(0) = x_{0i} \tag{1.8}$$

Восемь уравнений (1.1), (1.7), (1.8) в Ω при $t > 0$ относительно девяти неизвестных v_i, x_i, p, ρ, μ представляют собой незамкнутую систему. Уравнения (1.8) не отделяются от этой системы в силу того, что аргументами всех функций являются неизвестные компоненты вектора $\mathbf{x}$. Для замыкания системы (1.1), (1.7), (1.8) необходимо выписать одно уравнение для вязкости $\mu(\mathbf{x}, t)$.

Физического закона, аналогичного закону сохранения массы, из которого для несжимаемых материалов следует (1.1) или (1.2), для вязкости в механике сплошной среды не существует. Один из путей замыкания системы – введение в рассмотрение температуры $T(\mathbf{x}, t)$, т.е. новой неизвестной функции. При этом система дополняется двумя уравнениями – теплопроводности и эмпирической связью вязкости и температуры. Однако для заведомо изотермических процессов часто используется гипотеза о том, что в стратифицированных жидкостях при небольших скоростях деформации кинематическую вязкость $\nu = \mu/\rho$ можно считать постоянной величиной. Данная гипотеза обосновывается в [3] со ссылкой на допущение Шлихтинга [4]. Она бралась за основу и в более поздних исследованиях [1, 2, 5].

Итак, аналогично (1.1) и (1.2), будем считать, что динамическая вязкость каждой лагранжевой частицы постоянна при движении этой частицы в Ω

$$\mu(\mathbf{x}, t) = \mu(\mathbf{x}_0, t) \equiv \mu^\circ(\mathbf{x}_0) \tag{1.9}$$

или

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}\mu = 0 \tag{1.10}$$

На всей границе Σ заданы кинематические условия

$$\mathbf{x} \in \Sigma\colon\ v_i = v_i^{(\Sigma)}(\mathbf{x}, t) \tag{1.11}$$

Представим функции, входящие в постановку начально-краевой задачи (1.1), (1.7), (1.8), (1.9), (1.11), следующим образом

$$\begin{aligned}
\rho &= (1 + \alpha\rho_1(\mathbf{x}, t) + \ldots)\rho_0 \\
\mu &= (1 + \alpha\mu_1(\mathbf{x}, t) + \ldots)\mu_0 \\
v_i &= V_{(0)i}(\mathbf{x}, t) + \alpha V_{(1)i}(\mathbf{x}, t) + \ldots \\
v_{ij} &= V_{(0)ij}(\mathbf{x}, t) + \alpha V_{(1)ij}(\mathbf{x}, t) + \ldots \\
p &= P_{(0)}(\mathbf{x}, t) + \alpha P_{(1)}(\mathbf{x}, t) + \ldots
\end{aligned} \tag{1.12}$$

где ρ_0 и μ_0 – известные средние по объему Ω плотность и вязкость, ρ_1, μ_1, $V_{(0)i}$, $V_{(1)i}$, $P_{(0)}$, $P_{(1)}$ подлежат определению. Будем считать среду слабонеоднородной и представим функцию в виде асимптотического ряда по малому параметру α

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_{(0)} + \alpha\mathbf{X}_{(1)} + \ldots \tag{1.13}$$

Тогда, например

$$V_{(0)i}(\mathbf{x}, t) = V_{(0)i}(\mathbf{X}_{(0)}, t) + \alpha V_{(0)i,j}(\mathbf{X}_{(0)}, t)X_{(1)j} + \ldots \tag{1.14}$$

В нулевом по α приближении, соответствующем деформированию однородной вязкопластической среды с параметрами ρ_0, μ_0, τ_s, имеем четыре уравнения для величин $V_{(0)i}(\mathbf{X}_{(0)}, t)$, $P_{(0)}(\mathbf{X}_{(0)}, t)$

$$-P_{(0),i} + \left(\frac{\tau_s}{U_{(0)}} + \mu_0\right)\Delta V_{(0)i} + \tau_s\left(\frac{1}{U_{(0)}}\right)_{,j}(V_{(0)i,j} + V_{(0)j,i}) + \rho_0 F_i = 0 \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}
&V_{(0)i,i} = 0 \\
&x \in \Sigma\colon\ V_{(0)i} = v_i^{(\Sigma)}(\mathbf{X}_{(0)}, t)
\end{aligned} \tag{1.16}$$

После решения задачи (1.15), (1.16) находим из системы

$$\dot{X}_{(0)i} = V_{(0)i}, \quad X_{(0)i}(0) = x_{0i} \tag{1.17}$$

закон движения или траектории частиц.

Каждая из набора поверхностей (1.6), являющихся границами жесткой зоны, задается в нулевом приближении в виде

$$x_3 = \xi_{(0)\nu}(x_1, x_2, t), \quad \nu = 1, \ldots, N \tag{1.18}$$

Сформулируем теперь задачу первого приближения по α. Для этого разложим в ряд по α максимальную скорость скольжения U

$$\begin{aligned}
&U = U_{(0)} + \alpha U_{(1)} + \ldots, \quad \frac{1}{U} = \frac{1}{U_{(0)}} - \alpha\frac{U_{(1)}}{U_{(0)}^2} + \ldots \\
&U_{(1)} = \frac{2}{U_{(0)}}V_{(0)ij}V_{(1)ij}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

С учетом (1.12)–(1.14), (1.18) имеем

$$
\begin{aligned}
&-(P_{(0),j}X_{(1)j}+P_{(1)})_{,i}+\left(-\frac{\tau_s}{U_{(0)}^2}(U_{(0),j}X_{(1)j}+U_{(1)})+\mu_0\mu_1\right)\Delta V_{(0)i}+\\
&+\left(\frac{\tau_s}{U_{(0)}}+\mu_0\right)\Delta(V_{(0)i,j}X_{(1)j}+V_{(1)i})+\left(-\frac{\tau_s}{U_{(0)}^2}(U_{(0),l}X_{(1)l}+U_{(1)})+\mu_0\mu_1\right)_{,j}\times \qquad (1.20)\\
&\times(V_{(0)i,j}+V_{(0)j,i})+\tau_s\left(\frac{1}{U_{(0)}}\right)_{,j}[(V_{(0)i,jk}+V_{(0)j,ik})X_{(1)k}+V_{(1)i,j}+V_{(1)j,i}]+\rho_0\rho_1F_i = 0
\end{aligned}
$$

$$
V_{(1)i,i} = 0 \qquad (1.21)
$$

$$
\begin{aligned}
\rho_1(\mathbf{x},t) &= \rho_1(\mathbf{x_0},t)\equiv\overset{\circ}{\rho}_1(\mathbf{x_0})\\
\mu_1(\mathbf{x},t) &= \mu_1(\mathbf{x_0},t)\equiv\overset{\circ}{\mu}_1(\mathbf{x_0})
\end{aligned} \qquad (1.22)
$$

$$
\dot{X}_{(1)i} = V_{(0)i,j}X_{(1)j}+V_{(1)i},\quad X_{(1)i}(0) = 0 \qquad (1.23)
$$

$$
\mathbf{x}\in\Sigma:\ V_{(1)i} = 0 \qquad (1.24)
$$

Все величины в (1.19)–(1.23) берутся на известных из (1.17) траекториях $\mathbf{X}_{(0)}(t)$. Девять уравнений (1.20)–(1.23) в Ω_f при $t>0$ образуют замкнутую систему для определения девяти функций $V_{(1)i}$, $X_{(1)i}$, $P_{(1)}$, ρ_1, μ_1.

Условие (1.5), из которого определяется Σ_r, в силу (1.4), (1.12) можно переписать в виде

$$
\Sigma_r = \{\mathbf{x}(t)\colon (1+\alpha\mu_1)(U_{(0)}+\alpha U_1) = 0\} \qquad (1.25)
$$

Если $x_3 = \xi_{(0)\nu}(x_1,x_2,t)+\alpha\xi_{(1)\nu}(x_1,x_2,t)$ – составляющие поверхности Σ_r в задаче первого приближения, причем $\xi_{(0)\nu}$ известны из (1.18), то из условия (1.25) и того, что $U_0|_{x_3=\xi_{(0)\nu}} = 0$, нетрудно найти возмущения $\xi_{(1)\nu}$

$$
\xi_{(1)\nu} = -\frac{U_{(1)}}{U_{(0),3}}\bigg|_{x_3=\xi_{(0)\nu}} \qquad (1.26)
$$

где $U_{(1)}$ определяется в (1.19).

2. Плоское деформирование слабонеоднородной среды. В случае плоского безынерционного деформирования несжимаемой вязкопластической среды система (1.7) известным образом [6] редуцируется к одному уравнению относительно функции тока $\psi(x_1,x_2,t)$ ($v_1=\psi_{,2}$, $v_2=-\psi_{,1}$, $v_3\equiv 0$)

$$
\epsilon_{il}\left[\left(\frac{\tau_s}{U}+\mu\right)(\epsilon_{ik}\psi_{,kj}+\epsilon_{jk}\psi_{,ki})\right]_{,jl}+\epsilon_{il}(\rho F_i)_{,l} = 0 \qquad (2.1)
$$

где ϵ_{il} – двумерный символ Леви – Чивиты. Все индексы в (2.1) и во всех дальнейших соотношениях раздела **2** принимают значения 1 и 2. Квадратичный инвариант U, входящий в (2.1), выражается через ψ

$$
U = \sqrt{\psi_{,11}^2-2\psi_{,11}\psi_{,22}+\psi_{,22}^2+4\psi_{,12}^2}\equiv\sqrt{(L\psi)^2+(M\psi)^2} \qquad (2.2)
$$

где обозначено [7, 8]

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad M = 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{2.3}$$

С использованием операторов (2.3) уравнение (2.1) может быть переписано следующим образом

$$L\left[\left(\frac{\tau_s}{U} + \mu\right)L\psi\right] + M\left[\left(\frac{\tau_s}{U} + \mu\right)M\psi\right] = (\rho F_2)_{,1} - (\rho F_1)_{,2} \tag{2.4}$$

Для однородной вязкой среды ($\tau_s = 0$) оператор, стоящий в левой части (2.4), с точностью до множителя совпадает с бигармоническим, так как $L^2 + M^2 = \Delta\Delta$.

В терминах функции тока условия (1.2) и (1.10) записываются с помощью скобок Пуассона

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [\rho, \psi] = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + [\mu, \psi] = 0 \tag{2.5}$$

и по-прежнему имеют первые интегралы (1.1) и (1.9).

На контуре Σ плоской области Ω заданы компоненты градиента ψ

$$\mathbf{x} \in \Sigma: \psi_{,1} = -v_2^{(\Sigma)}(\mathbf{x}, t), \quad \psi_{,2} = v_1^{(\Sigma)}(\mathbf{x}, t) \tag{2.6}$$

Уравнения (1.8) формально приобретают гамильтонов вид

$$\dot{x}_1 = \psi_{,2}, \quad \dot{x}_2 = -\psi_{,1}, \quad x_i(0) = x_{0i} \tag{2.7}$$

Роль гамильтониана играет функция тока, а роль обобщенной координаты и обобщенного импульса – координаты x_i. Необходимо заметить, что физический смысл уравнений (2.7) заключается лишь в том, что исследуется плоская кинематика несжимаемой среды (независимо от того, вязкопластическое это тело или нет), и никак не связан с уравнениями Гамильтона классической механики. На это указывает и разница размерностей гамильтониана, т.е. энергии, и функции тока. Несмотря на то, что сходство имеется только математическое, некоторые выводы и результаты гамильтоновой механики применимы по существу и здесь [9].

Начально-краевая задача плоского деформирования заключается в решении пяти уравнений (2.4), (2.5), (2.7) с граничными условиями (2.6) относительно пяти функций ψ, x_i, ρ, μ. Разложим, как и в трехмерном случае, все переменные в асимптотические ряды (1.12)–(1.14) по параметру слабонеоднородности α, в том числе и функцию тока

$$\psi(\mathbf{x}, t) = H_{(0)}(\mathbf{x}, t) + \alpha H_{(1)}(\mathbf{x}, t) + \ldots \tag{2.8}$$

$$H_{(0)}(\mathbf{x}, t) = H_{(0)}(\mathbf{X}_{(0)}, t) + \alpha \mathbf{X}_{(1)} \cdot \operatorname{grad} H_{(0)}(\mathbf{X}_{(0)}, t) + \ldots \tag{2.9}$$

В нулевом по α приближении имеем систему трех уравнений

$$\tau_s\left[L\left(\frac{LH_{(0)}}{U_{(0)}}\right) + M\left(\frac{MH_{(0)}}{U_{(0)}}\right)\right] + \mu_0 \Delta\Delta H_{(0)} = \rho_0(F_{2,1} - F_{1,2}) \tag{2.10}$$

$$\dot{X}_{(0)1} = H_{(0),2}, \quad \dot{X}_{(0)2} = -H_{(0),1}, \quad X_{(0)i}(0) = x_{0i} \tag{2.11}$$

с граничными условиями

$$\mathbf{x} \in \Sigma: H_{(0),1} = -v_2^{(\Sigma)}(\mathbf{X}_{(0)}, t), \quad H_{(0),2} = v_1^{(\Sigma)}(\mathbf{X}_{(0)}, t) \tag{2.12}$$

вытекающими из (2.6). В силу (2.2) инвариант $U_{(0)}$ выражается через $H_{(0)}$

$$U_{(0)} = \sqrt{(LH_{(0)})^2 + (MH_{(0)})^2} \tag{2.13}$$

Решив задачу (2.10), (2.12), (2.13) и найдя $H_{(0)}(\mathbf{X}_{(0)}, t)$, из (2.11) определяются траектории частиц в однородной среде.

В первом по α приближении задача относительно $H_{(1)}$, $X_{(1)i}$ имеет вид

$$\begin{gathered}
L\left[\left(-\frac{\tau_s}{U_{(0)}^2}(U_{(0),j}X_{(1)j} + U_{(1)}) + \mu_0\mu_1\right)LH_{(0)}\right] + \\
+ L\left[\left(\frac{\tau_s}{U_{(0)}} + \mu_0\right)L(H_{(0),j}X_{(1)j} + H_{(1)})\right] + M\left[\left(-\frac{\tau_s}{U_{(0)}^2}(U_{(0),j}X_{(1)j} + U_{(1)}) + \mu_0\mu_1\right)MH_{(0)}\right] + \\
+ M\left[\left(\frac{\tau_s}{U_{(0)}} + \mu_0\right)M(H_{(0),j}X_{(1)j} + H_{(1)})\right] = \rho_0(\rho_1 F_2)_{,1} - \rho_0(\rho_1 F_1)_{,2}
\end{gathered} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
\dot{X}_{(1)1} &= H_{(0),21}X_{(1)1} + H_{(0),22}X_{(1)2} + H_{(1),2} \\
\dot{X}_{(1)2} &= -H_{(0),11}X_{(1)1} - H_{(0),12}X_{(1)2} - H_{(1),1} \\
\dot{X}_{(1)i}(0) &= 0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

с граничными условиями (см. (1.24), (2.6), (2.12))

$$\mathbf{x} \in \Sigma: H_{(1),1} = H_{(1),2} = 0 \tag{2.16}$$

Все функции координат взяты в (2.14)–(2.16) на известных из нулевого приближения траекториях $x_i = X_{(0)i}$. Соотношения (1.18), (1.26), (1.27) принципиально остаются справедливыми и для плоского случая. В них лишь надо заменить $x_3 = \xi_{(0)\nu}(x_1, x_2, t)$ на $x_2 = \xi_{(0)\nu}(x_1, t)$.

3. Двумерное растяжение–сжатие неограниченной плоскости. Положим, что массовые силы отсутствуют ($\mathbf{F} = 0$), а функция $H_{(0)}(x_1, x_2, t)$ в плоском движении однородной вязкопластической среды записывается в виде

$$H_{(0)} = c(t)x_1x_2, \quad -\infty < x_1, x_2 < \infty, \quad t > 0 \tag{3.1}$$

где $c(t)$ – некоторая заданная функция. Очевидно, что нулевое по α приближение (3.1) удовлетворяет уравнению (2.10), а кинематика деформирования, задаваемая (3.1)

$$\begin{gathered}
V_{(0)1} = cx_1, \quad V_{(0)2} = -cx_2, \\
V_{(0)11} = -V_{(0)22} = c, \quad V_{(0)12} = 0, \quad U_{(0)} = 2|c|
\end{gathered} \tag{3.2}$$

соответствует двумерному растяжению–сжатию неограниченной плоскости (x_1x_2). Жесткие зоны Ω_r при этом отсутствуют. Интегрируя (2.11), выпишем закон движения

$$X_{(0)1} = x_{01}C(t), \quad X_{(0)2} = \frac{x_{02}}{C(t)}, \quad C(t) = \exp\int_0^t c(\tau)d\tau \tag{3.3}$$

из которого следует, что траекториями частиц являются гиперболы $X_{(0)1}(t)X_{(0)2}(t) = x_{01}x_{02}$.

Сформулируем теперь задачу первого приближения по α (2.14), (2.15) для слабонеоднородной вязкопластической среды. Вычисляя по (1.19) и (3.2) $U_{(1)}$, находим, что $U_{(1)} \equiv 0$, и данная задача приобретает компактный вид

$$\left(\frac{\tau_s}{2|c|} + \mu_0\right)\Delta\Delta H_{(1)}(\mathbf{X}_{(0)}, t) = -2\mu_0 c M \mu_1(\mathbf{X}_{(0)}, t) \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} &\dot{X}_{(1)1} = cX_{(1)1} + H_{(1),2}, \quad \dot{X}_{(1)2} = -cX_{(1)2} - H_{(1),1} \\ &X_{(1)i}(0) = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Правая часть неоднородного бигармонического уравнения (3.4) известна, так как в силу (1.22) и (3.3)

$$\mu_1(\mathbf{X}_{(0)}, t) = \mu_1^\circ(\mathbf{x}_0) = \mu_1^\circ\left(\frac{X_{(0)1}}{C(t)}, X_{(0)2}C(t)\right) \tag{3.6}$$

Интегрируя же (3.5), найдем связь $\mathbf{X}_{(1)}(t)$ и $H_{(1)}$

$$\begin{aligned} X_{(1)1}(t) &= \int_0^t H_{(1),2}(\mathbf{X}_{(0)}(\tau), \tau)\exp\int_\tau^t c(\tau')d\tau' d\tau \\ X_{(1)2}(t) &= -\int_0^t H_{(1),1}(\mathbf{X}_{(0)}(\tau), \tau)\exp\left(-\int_\tau^t c(\tau')d\tau'\right)d\tau \end{aligned} \tag{3.7}$$

4. Течение Куэтта в плоском слое. Рассмотрим другое классическое движение однородной вязкопластической среды – течение Куэтта в плоском слое $\Omega = \{\mathbf{x}: 0 < x_2 < h\}$. Для него

$$H_{(0)} = b(t)\frac{x_2^2}{2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0 \tag{4.1}$$

где $b(t)$ – некоторая заданная функция. Гамильтониан (4.1) соответствует однородному нестационарному сдвигу в Ω

$$\begin{aligned} &V_{(0)1} = bx_2, \quad V_{(0)2} = 0, \\ &V_{(0)11} = V_{(0)22} = 0, \quad V_{(0)12} = \frac{b}{2}, \quad U_{(0)} = |b| \end{aligned} \tag{4.2}$$

и удовлетворяет уравнению (2.10) ($\mathbf{F} = 0$). Жесткие зоны внутри слоя отсутствуют. На границе $\Sigma = \partial\Omega$ заданы условия

$$v_1^{(\Sigma)}\big|_{x_2=0} = 0, \quad v_1^{(\Sigma)}\big|_{x_2=h} = bh, \quad \mathbf{v}_2^{(\Sigma)}\big|_\Sigma = 0 \tag{4.3}$$

Закон движения

$$X_{(0)1} = x_{01} + x_{02}\int_0^t b(\tau)d\tau, \quad X_{(0)2} \equiv x_{02} \tag{4.4}$$

таков, что траектории частиц – прямые линии $X_{(0)2}(t) = x_{02}$.

Исходя из кинематики (4.2) и (1.19), имеем $U_{(1)} = 2V_{(1)12}\mathrm{sign}b = LH_{(1)}\mathrm{sign}b$. Задача первого приближения по α (2.14), (2.15) для слабонеоднородной среды имеет вид

$$\mu_0\Delta\Delta H_{(1)} + \frac{\tau_s}{|b|}M^2 H_{(1)} = -\mu_0 bL\mu_1 \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_{(1)1} &= bX_{(1)2} + H_{(1),2}, \quad \dot{X}_{(1)2} = -H_{(1),1} \\ X_{(1)i}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$H_{(1),i}\big|_\Sigma = 0 \tag{4.7}$$

Правая часть уравнения (4.5) известна, так как в силу (1.22) и (4.4)

$$\mu_1(\mathbf{X}_{(0)}, t) = \mu_1^\circ(\mathbf{x}_0) = \mu_1^\circ\left(X_{(0)1} - X_{(0)2}\int_0^b b(\tau)d\tau,\ X_{(0)2}\right) \tag{4.8}$$

Как и в разделе **3**, линейные уравнения (4.6) могут быть проинтегрированы, в результате чего найдена связь “поправок" $X_{(1)i}(t)$ к закону движения (4.4) с "поправкой" $H_{(1)}$ к гамильтониану (4.1)

$$\begin{aligned} X_{(1)1}(t) &= \int_0^t \left[-b(\tau)\int_0^\tau H_{(1),1}(\mathbf{X}_{(0)}(\tau'), \tau')d\tau' + H_{(1),2}(\mathbf{X}_{(0)}(\tau), \tau)\right]d\tau \\ X_{(1)2}(t) &= -\int_0^t H_{(1),1}(\mathbf{X}_{(0)}(\tau), \tau)d\tau \end{aligned} \tag{4.9}$$

В качестве процесса деформирования однородной вязкопластической среды могут быть выбраны и более сложные течения, содержащие жесткие зоны, такие, как например, вязкопластическое течение Пуазейля или течение в тонком слое между двумя сближающимися поверхностями [2, 10, 11].

Заключение. Эффект слабонеоднородности позволяет наложить на деформирование однородной вязкопластической среды малые возмущения плотности и вязкости. Постановки задач для определения данных возмущений, так же как и вариаций кинематики и напряженного состояния (“задач первого приближения"), линеаризованы по асимптотически малому параметру. В этих постановках все величины, являющиеся функциями эйлеровых координат и времени, определены на траекториях, которые находятся из решения задачи для однородной среды. Гамильтонов вид связи координат частиц и функции тока в плоской задаче дает возможность использовать основные положения и результаты гамильтоновой механики и, в частности, провести параллель между наступлением хаоса в динамической системе и началом перемешивания в несжимаемой сплошной среде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Георгиевский Д.В., Климов Д.М.* Энергетический анализ развития кинематических возмущений в слабонеоднородных вязких жидкостях // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 56–67.
2. *Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Петров А.Г.* О безынерционном деформировании слабонеоднородной вязкой среды // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2002. № 2. С. 37–41.
3. *Drazin P.G.* On stability of parallel flow of an incompressible fluid of variable density and viscosity // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1962. V. 58. No. 4. P. 646–661.

4. *Schlichting H.* Turbulenz bei Wärmeschichtung // ZAMM. 1935. Bd 15. H. 6. S. 313–338.
5. *Козырев О.Р., Степанянц Ю.А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 25. С. 3–89.
6. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: УРСС, 1998. 175 с.
7. *Ильюшин А.А.* Деформация вязко-пластичного тела // Учен. зап. МГУ. Механика. 1940. Вып. 39. С. 3–81.
8. *Ишлинский А.Ю.* Об устойчивости вязкопластического течения круглой пластины // ПММ. 1943. Т. 7. № 6. С. 405–412.
9. *Петров А.Г.* Об усреднении гамильтоновых систем с периодическим по времени гамильтонианом // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 4. С. 483–488.
10. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Петров А.Г., Чесноков В.М.* Плоское течение вязкопластичных сред в узких каналах с деформируемыми стенками // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 2. С. 23–31.
11. *Петров А.Г.* О движении частиц несжимаемой среды в области с периодически изменяющейся границей // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 4. С. 12–19.

Москва
E-mail: georgiev@mech.math.msu.su
web site: http://www.math.msu.su/~georgiev/

Поступила в редакцию
12.IX.2002