МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 2003

УДК 533.72

© 2003 г. А. В. ЛАТЫШЕВ, В. Н. ПОПОВ, А. А. ЮШКАНОВ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ТЕПЛОВОМ СКОЛЬЖЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Получено аналитическое решение задачи о тепловом скольжении второго порядка. Основой решения служит развиваемый метод решения полупространственной граничной задачи для неоднородного линеаризованного кинетического БГК-уравнения. Общее решение исходного уравнения построено в виде разложения по собственным функциям соответствующего характеристического уравнения. Подстановка решения в граничные условия приводит к краевой задаче Римана. Искомая скорость теплового скольжения находится из условия разрешимости краевой задачи. Проведенный численный анализ подтверждает существование отрицательного (в направлении градиента температуры) термофореза для высокотеплопроводных аэрозольных частиц при малых значениях чисел Кнудсена.

Ключевые слова: аналитическое решение, тепловое скольжение второго порядка, неоднородное кинетическое уравнение.

Вопрос о граничных условиях скольжения к уравнениям гидродинамики имеет принципиально важное значение для проблемы обтекания разреженным газом твердых тел [1, 2]. Известно [3], что градиенты гидродинамических величин (температуры, массовой скорости газа, концентрации) вызывают такое явление, как скольжение газа вдоль обтекаемой поверхности. Такого рода скольжения разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности исследованы к настоящему времени достаточно подробно как точными, так и приближенными методами [2]. Менее изучен вопрос об учете в граничных условиях производных второго порядка от гидродинамических величин, что необходимо для построения теории термофореза высокотеплопроводных частиц, где эти величины играют доминирующую роль. Учет такого рода эффектов позволил теоретически предсказать возможность отрицательного (в направлении градиента температуры) термофореза для высокотеплопроводных аэрозольных частиц при малых значениях чисел Кнудсена ($0.01 < \mathrm{Kn} < 0.3$) [4–7].

Учитывая, что имеющиеся результаты получены либо численными [5, 6], либо приближенными [4, 7] методами, исследование данного вопроса с помощью точных аналитических методов представляется весьма актуальным и в теоретическом, и в прикладном аспектах.

Искомая скорость теплового скольжения второго порядка разреженного газа вдоль поверхности твердой сферической аэрозольной частицы определяется соотношением [7]

$$\mathrm{Kn} = \frac{\lambda}{R}, \quad k = \frac{1}{T_\omega}\frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta}\bigg|_S$$

Здесь S, $R(2p/3\mu_g)\beta^{1/2}$, T_ω – поверхность, размерный радиус и температура частицы, $U_\theta\beta^{1/2}$ – тангенциальная к поверхности компонента массовой скорости газа, λ – длина свободного пробега частиц газа, μ_g – динамическая вязкость газа, $r(2p/3\mu_g)\beta^{1/2}$ – размерный радиус-вектор, K_T – коэффициент теплового скольжения разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности, β_R – коэффициент теплового скольжения второго порядка, Kn – число Кнудсена, $\beta = m/2k_BT_\omega$, p – статическое давление, k_B – постоянная Больцмана, m – масса частиц газа.

Учитывая, что K_T известно, поставленная задача сводится к нахождению коэффициента β_R.

1. Постановка задачи и вывод основных уравнений. Рассмотрим разреженный газ, заполняющий пространство вокруг сферической аэрозольной частицы радиуса R. Состояние газа будем описывать функцией распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{C})$, которая является решением линеаризованного кинетического уравнения Больцмана с оператором столкновений в форме БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модели, которое в сферической системе координат записывается в виде

$$C_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[C_\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{C_\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + (C_\theta^2 + C_\varphi^2)\frac{\partial f}{\partial C_r} +\right.$$

$$\left. + (C_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta - C_rC_\theta)\frac{\partial f}{\partial C_\theta} - (C_\varphi C_\theta \operatorname{ctg}\theta + C_rC_\varphi)\frac{\partial f}{\partial C_\varphi}\right] =$$

$$= f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{C})[1 + \beta^{-3/2}\iiint K(\mathbf{C}, \mathbf{C}')f(\mathbf{r}, \mathbf{C}')d\mathbf{C}'] - f(\mathbf{r}, \mathbf{C})$$

$$K(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = 1 + 2\mathbf{C}\mathbf{C}' + \frac{2}{3}\left(C^2 - \frac{3}{2}\right)\left(C'^2 - \frac{3}{2}\right)$$

$$f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}\exp(-C^2)$$

Здесь $f(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ – функция распределения молекул газа по координатам и скоростям; $f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ – абсолютный максвеллиан.

Пусть в газе создается нормальный к поверхности частицы градиент температуры. Предположим, что этот градиент не постоянен, а медленно меняется вдоль ее поверхности. Таким образом, в задаче отличны от нуля величины $\partial T/\partial r$ и $\partial^2 T/\partial r\partial\theta$. Первая из этих величин приводит к скачку температуры на поверхности частицы, а вторая – к так называемому тепловому скольжению второго порядка. Будем считать эти величины малыми, т.е. полагать, что

$$\frac{\lambda}{T_\omega}\left|\frac{\partial T}{\partial r}\right| \ll 1, \quad \frac{\lambda}{T_\omega}\left|\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial\theta}\right| \ll 1$$

Тогда задача допускает линеаризацию и функцию распределения частиц газа по координатам и скоростям можно записать в виде

$$f = f^{(0)}[1 + Y(r, \theta, \mathbf{C})]$$

Здесь $f^{(0)}$ – локально-равновесная функция распределения, записанная в приближении Чепмена – Энскога [8]. В качестве граничного условия на поверхности частицы примем модель диффузного отражения.

Разложим $Y(r, \theta, \mathbf{C})$ в ряд по малому параметру $1/R$

$$Y(r, \theta, \mathbf{C}) = Y^{(1)}(r, \theta, \mathbf{C}) + R^{-1}Y^{(2)}(r, \theta, \mathbf{C}) + \ldots$$

Тогда, приравнивая слагаемые при $1/R$, приходим к уравнению для нахождения функции $Y^{(2)}(r, \theta, \mathbf{C})$

$$
\begin{aligned}
&C_r\frac{\partial Y^{(2)}}{\partial r} + Y^{(2)}(r, \theta, \mathbf{C}) = \pi^{-3/2}\iiint K(\mathbf{C}, \mathbf{C}')Y^{(2)}(r, \theta, \mathbf{C}')d\mathbf{C}' - \\
&-\left[(C_\theta^2 + C_\varphi^2)\frac{\partial Y^{(1)}}{\partial C_r} + (C_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta - C_r C_\theta)\frac{\partial Y^{(1)}}{\partial C_\theta} - \right. \\
&\left. -(C_\varphi C_\theta \operatorname{ctg}\theta + C_r C_\varphi)\frac{\partial Y^{(1)}}{\partial C_\varphi}\right] - C_\theta\frac{\partial Y^{(1)}}{\partial \theta}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

с граничными условиями

$$
Y^{(2)}(R, \theta, C_i) = -2C_\theta U_\theta^{(2)}(\theta) \quad (C_r > 0), \quad Y^{(2)}(\infty, \theta, \mathbf{C}) = 0 \tag{1.2}
$$

Здесь

$$
Y^{(1)}(r, \theta, \mathbf{C}) = Y_1(r, \theta, C_r) + (C_\theta^2 + C_\varphi^2 - 1)Y_2(r, \theta, C_r) \tag{1.3}
$$

совпадает с решением задачи о скачке температуры на границе твердой поверхности [9].

Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$
Y^{(2)}(r, \theta, \mathbf{C}) = C_\theta\varphi(r, \theta, C_r) + \sum_k b_k(C_\theta, C_\varphi)Y_k^{(2)}(r, \theta, C_r) \tag{1.4}
$$

где C_θ в совокупности с $b_k(C_\theta, C_\varphi)$ образует полную систему ортогональных (в смысле равенства нулю скалярного произведения) многочленов.

Подставим (1.4) в (1.1) и (1.2). Домножая полученные соотношения на $C_\theta \exp(-C_\theta^2 - C_\varphi^2)$ и интегрируя по C_θ и C_φ от $-\infty$ до $+\infty$ с учетом (1.3), приходим к уравнению и граничным условиям для нахождения функции $\varphi(r, \theta, C_r)$

$$
\begin{aligned}
&\mu\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2)\varphi(x, \mu')d\mu' - \\
&-k\left[Z_1(x, \mu) + \gamma\left(\mu^2 + \frac{1}{2}\right)Z_2(x, \mu)\right]
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

$$
\varphi(0, \mu) = 0 \quad (\mu > 0), \quad \varphi(\infty, \mu) = 2U_0 \tag{1.6}
$$

Здесь $\mu = C_r$, $x = r - R$, $U_0 = U^{(2)}(\theta)$, для краткости в записи функций опущен аргумент θ, $Z_1(x, \mu)$ и $Z_2(x, \mu)$ – функции распределения, полученные в задаче о температурном скачке [9] и связанные с $Y_1(x, \mu)$ и $Y_2(x, \mu)$ соотношениями

$$
Y_1(x, \mu) = Z_1(x, \mu) + \gamma\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right)Z_2(x, \mu), \quad Y_2(x, \mu) = \gamma Z_2(x, \mu)
$$

$$
Z(x, \mu) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)F(\eta, \mu)A(\eta)d\eta
$$

$$
F(\eta, \mu) = \eta P\frac{1}{\eta - \mu}E + \exp(\eta^2)\Omega(\eta)\delta(\eta - \mu)
$$

$$\Omega(\eta) = \sqrt{\pi}\Delta^{-1}(\eta) + \eta t(\eta)E,$$

$$\Delta^{-1}(\eta) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\left(\eta^2 - \frac{5}{2}\right) & -\gamma\left(\eta^2 - \frac{3}{2}\right) \\ \gamma^{-1} & 3 \end{bmatrix}$$

$$t(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\mu^2)d\mu}{\mu - \eta} = -2\sqrt{\pi}\exp(-\eta^2)\int_0^{\eta}\exp(t^2)dt$$

$$A(\mu) = [A_1(\mu), A_2(\mu)]^t, \quad Z(x, \mu) = [Z_1(x, \mu), Z_2(x, \mu)]^t$$

$$\mu A_1(\mu) = \mp\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu^2 + 1/2}{r(\mu)}\right)\Phi_1(\mu) + \frac{\gamma(\mu^2 - 3/2)}{r(\mu)}\Phi_2(\mu)\right]U_1^{-1}(\mu)\sin\theta_1(\mu) \mp$$

$$\mp\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu^2 + 1/2}{r(\mu)}\right)\Phi_1(\mu) - \frac{\gamma(\mu^2 - 3/2)}{r(\mu)}\Phi_2(\mu)\right]U_2(\mu)^{-1}\sin\theta_2(\mu)$$

$$\mu A_2(\mu) = \mp\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\gamma r(\mu)}\Phi_1(\mu) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu^2 + 1/2}{r(\mu)}\right)\Phi_2(\mu)\right]U_1^{-1}(\mu)\sin\theta_1\mu \mp$$

$$\mp\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\gamma r(\mu)}\Phi_1(\mu) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu^2 + 1/2}{r(\mu)}\right)\Phi_2(\mu)\right]U_2^{-1}(\mu)\sin\theta_2(\mu)$$

$$\Phi_1(z) = \alpha_1 z + \alpha_0 + \frac{\alpha_{-1}}{z - \mu_0}, \quad \Phi_2(z) = \beta_1 z + \beta_0 + \frac{\beta_{-1}}{z - \mu_0}$$

$$U_j^{-1}(z) = \exp(-A(z) + (-1)^j r(z)[B(z) - R(z)]), \quad j = 1, 2$$

$$A(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{a(\tau)d\tau}{\tau - z}, \quad R(z) = \int_0^{\mu_0}\frac{d\tau}{r(\tau)(\tau - z)}d\tau$$

$$B(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{b(\tau)}{r(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z}$$

$$a(\tau) = \theta_1(\tau) + \theta_2(\tau) - 2\pi, \quad b(\tau) = \theta_1(\tau) - \theta_2(\tau)$$

$$\theta_i(\mu) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{D_i(\mu)}{\pi\mu\exp(\mu^2)}, \quad (i = 1, 2)$$

$$D_i(\mu) = \mu t(\mu) + \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\left(\frac{11}{2} - \mu^2 \mp r(\mu)\right)$$

$$r(z) = \sqrt{q(z)}, \quad q(z) = \left(z^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + 4$$

$$B_{-n} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{b(\tau)}{r(\tau)}\tau^{n-1}d\tau, \quad R_{-n} = -\int_0^{\mu_0}\frac{\tau^{n-1}}{r(\tau)}d\tau$$

$$A_{-n} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty a(\tau)\tau^{n-1}d\tau, \quad n = 1, 2, 3\ldots$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}\gamma\left[\mu_0^2 + \frac{1}{2} + r(\mu_0)\right], \quad \beta = -\mu_0\gamma\left[1 + \frac{\mu_0^2 - 3/2}{R(\mu_0)}\right]$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{p_0}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{p_0}\mu_0\left[1 - 2\frac{\gamma^2 + \beta\gamma\mu_0 - \alpha^2}{(\alpha-\gamma)^2}\right]$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{\gamma p_0}, \quad \beta_0 = -\frac{1}{p_0}\frac{\mu_0}{\gamma}\left[1 + 2\frac{\gamma^2 + \beta\gamma\mu_0 - \alpha^2}{(\alpha-\gamma)^2}\right]$$

$$\alpha_{-1} = \frac{2}{p_0}\frac{\alpha\mu_0^2}{\alpha-\gamma}, \quad \beta_{-1} = \frac{2}{p_0}\frac{\mu_0^2}{\alpha-\gamma}$$

$$p_0 = \exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\tau b(\tau)d\tau}{r(\tau)} + \int\limits_0^{\mu_0}\frac{\tau d\tau}{r(\tau)}\right]$$

Здесь символ t означает транспонирование, $\gamma^2 = 2/3$, Px^{-1} – распределение главное значение интеграла при интегрировании x^{-1}, $\delta(x)$ – дельта функция Дирака, верхний знак относится к интервалу $0 \le \mu \le \mu_0$, нижний – к интервалу $\mu > \mu_0$, значение μ_0 находится из уравнения $B_{-1} = R_{-1}$ (частный случай задачи обращения Якоби для эллиптических интегралов).

Обозначим

$$a(\eta, \mu) = A_1(\eta) + \mu^2 A_2(\eta) \tag{1.7}$$

$$a_1(\eta) = \left[A_1(\eta) + \frac{1}{2}\gamma A_2(\eta)\right]k, \quad a_2(\eta) = \gamma k A_2(\eta) \tag{1.8}$$

$$b(\mu) = \sqrt{\pi}\left[a(\mu, \mu)\lambda(\mu) + \frac{k}{2}(A_1(\mu) + 2\gamma A_2(\mu))\right]\exp(\mu^2) \tag{1.9}$$

Тогда с учетом принятых обозначений (1.5) перепишем в виде

$$\begin{gathered} L\varphi(x, \mu) = -\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\frac{\eta a(\eta, \mu)}{\eta - \mu}d\eta - \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)b(\mu)\Theta_+(\mu) \\ L\varphi(x, \mu) = \mu\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi(x, \mu) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu'^2)\varphi(x, \mu')d\mu' \end{gathered} \tag{1.10}$$

где $\Theta_+(\mu) = 0$ при $\mu < 0$ и $\Theta_+(\mu) = 1$ при $\mu \ge 0$.

Таким образом, задача о вычислении скорости теплового скольжения второго порядка сводится к решению уравнения (1.10) с граничными условиями (1.6).

2. Построение общего решения. Общее решение неоднородного уравнения (1.10) будем искать в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного.

Случай A. Общее решение $\varphi_1(x, \mu)$ соответствующего однородного уравнения

$$L\varphi_1(x, \mu) = 0$$

имеет вид [2]

$$\varphi_1(x, \mu) = A_0 + A_1(x - \mu) + \int_0^\infty \exp(-x/\eta)\Phi(\eta, \mu)n(\eta)d\eta$$

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta P\frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2)\lambda(\eta)\delta(\eta - \mu) \tag{2.1}$$

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}z\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\eta^2)}{\eta - z}d\eta$$

A_0, A_1, $n(\eta)$ – неизвестные параметры, подлежащие дальнейшему определению, $\lambda(z)$ – дисперсионная функция Черчиньяни.

Случай B. Частное решение уравнения

$$L\varphi_2(x, \mu) = -\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\frac{\eta a(\eta, \mu)}{\eta - \mu}d\eta \tag{2.2}$$

ищем в виде

$$\varphi_2(x, \mu) = -x\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta, \mu)n_1(\eta)d\eta + \psi_1(x, \mu) \tag{2.3}$$

где $\Phi(\eta, \mu)$ определено соотношением (2.1), а $n_1(\eta)$ – некоторая функция, подлежащая дальнейшему определению.

Подставляя (2.3) в (2.2), приходим к уравнению

$$L\psi_1(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\frac{[\mu\eta n_1(\eta) - \sqrt{\pi}\eta a(\eta, \mu)]d\eta}{\eta - \mu} + \mu\exp\left(\mu^2 - \frac{x}{\mu}\right)\lambda(\mu)n_1(\mu)\Theta_+(\mu)$$

Для того чтобы избавиться от особого интеграла в правой части полученного уравнения, выберем $n_1(\mu)$ так, чтобы

$$\eta n_1(\eta) \equiv \sqrt{\pi}a(\eta, \eta)$$

С учетом (1.7) и (1.8) находим

$$L\psi_1(x, \mu) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)[\mu\eta a_2(\eta) - a_1(\eta)]d\eta + \\ + \sqrt{\pi}\exp\left(\mu^2 - \frac{x}{\mu}\right)\lambda(\mu)a(\mu, \mu)\Theta_+(\mu) \tag{2.4}$$

Частное решение (2.4) ищем в виде

$$\psi_1(x, \mu) = \frac{\sqrt{\pi}x}{\mu}\exp\left(\mu^2 - \frac{x}{\mu}\right)\lambda(\mu)a(\mu, \mu)\Theta_+(\mu) + \psi_2(x, \mu) \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.4), после преобразований находим

$$L\psi_2(x,\mu) = -\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)[a_1(\eta)-\mu\eta a_2(\eta)+(\eta\lambda(\eta)a(\eta,\eta))']d\eta \tag{2.6}$$

При записи (2.6) учтено, что

$$\eta\left[\exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\right]'_\eta = \frac{x}{\eta}\exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \tag{2.7}$$

Решение (2.6) ищем в виде

$$\psi_2(x,\mu) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi_1(\eta,\mu)d\eta \tag{2.8}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \exp(-\mu^2)\Phi_1(\eta,\mu)d\mu = 0 \tag{2.9}$$

Подставляя (2.8) в (2.6), приходим к характеристическому уравнению

$$\left(1-\frac{\mu}{\eta}\right)\Phi_1(\eta,\mu)+a_1(\eta)-\mu\eta a_2(\eta)+[\eta\lambda(\eta)a(\eta,\eta)]' = 0$$

решение которого в пространстве обобщенных функций имеет вид

$$\Phi_1(\eta,\mu) = -\eta[a_1(\eta)-\mu\eta a_2(\eta)+(\eta\lambda(\eta)a(\eta,\eta))']P\frac{1}{\eta-\mu}+g_1(\eta)\delta(\eta-\mu) \tag{2.10}$$

Вид $g_1(\eta)$ найдем, подставляя (2.10) в условие нормировки (2.9).

$$g_1(\eta) = \sqrt{\pi}\exp(\eta^2)[a_1(\eta)+\{\eta\lambda(\eta)a(\eta,\eta)\}'-$$
$$-\{a_1(\eta)-\mu\eta a_2(\eta)+[\eta\lambda(\eta)a(\eta,\eta)]'\}\lambda(\eta)]$$

С учетом полученных результатов частное решение (2.2) имеет вид

$$\varphi_2(x,\mu) = -x\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\frac{a(\eta,\eta)d\eta}{\eta-\mu}-$$

$$-\sqrt{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu)[a_1(\eta)-\mu\eta a_2(\eta)+\{\eta\lambda(\eta)a(\eta,\eta)\}']d\eta+$$

$$+\sqrt{\pi}\exp(\eta^2)[a_1(\mu)+\{\mu\lambda(\mu)a(\mu,\mu)\}']\Theta_+(\mu)$$

Здесь $\Phi(\eta,\mu)$, $a(\eta,\mu)$, $a_1(\eta)$, $a_2(\eta)$ определены соответственно выражениями (2.1), (1.7), (1.8).

Случай С. Частное решение уравнения

$$L\varphi_3(x,\mu) = -\exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)b(\mu)\Theta_+(\mu) \tag{2.11}$$

где $b(\mu)$ определено выражением (1.9), ищем в виде

$$\varphi_3(x, \mu) = -\frac{x}{\mu}\exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)b(\mu)\Theta_+(\mu) + \psi_3(x, \mu) \tag{2.12}$$

Подставляя (2.12) в (2.11) после преобразований с учетом (2.7), находим

$$L\psi_3(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)[\eta b(\eta)\exp(-\eta^2)]'d\eta \tag{2.13}$$

Решение (2.13) ищем в виде

$$\psi_3(x, \mu) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi_2(\eta, \mu)d\eta \tag{2.14}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \exp(-\mu^2)\Phi_2(\eta, \mu)d\mu = 0 \tag{2.15}$$

Подставляя (2.14) в (2.13) после преобразований, приходим к характеристическому уравнению

$$\left(1-\frac{\mu}{\eta}\right)\Phi_2(\eta, \mu) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}[\eta b(\eta)\exp(-\eta^2)]' = 0$$

решение которого в пространстве обобщенных функций имеет вид

$$\Phi_2(\eta, \mu) = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta P\frac{1}{\eta-\mu} + g_2(\eta)\delta(\eta-\mu)\right][\eta b(\eta)\exp(-\eta^2)]' \tag{2.16}$$

Явный вид $g_2(\eta)$ найдем, подставляя (2.16) в условие нормировки (2.15)

$$g_2(\eta) = \exp(\eta^2)[\lambda(\eta) - 1]$$

Тогда

$$\varphi_3(x, \mu) = -\frac{x}{\mu}\exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)b(\mu)\Theta_+(\mu) +$$

$$+\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta, \mu)[\eta b(\eta)\exp(-\eta^2)]'d\eta -$$

$$-\exp\left(\mu^2 - \frac{x}{\mu}\right)[\mu b(\mu)\exp(-\mu^2)]'\Theta_+(\mu)$$

Здесь $\Phi(\eta, \mu)$ и $b(\mu)$ определены соотношениями (2.1) и (1.9). С учетом полученных результатов общее решение уравнения (1.10) записывается в виде

$$\varphi(x, \mu) = A_0 + A_1(x-\mu) + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)\Phi(\eta, \mu)n(\eta)d\eta -$$

$$-\sqrt{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta, \mu)[a_3(\eta) - \mu\eta a_2(\eta)]d\eta - x\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\frac{a(\eta, \eta)d\eta}{\eta-\mu} + \tag{2.17}$$

$$+\sqrt{\pi}\exp\left(\mu^2-\frac{x}{\mu}\right)a_3(\mu)\Theta_+(\mu)$$

$$a_3(\eta) = a_1(\eta)+\left[\eta\lambda(\eta)a(\eta,\eta)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta b(\eta)\exp(-\eta^2)\right]' \tag{2.18}$$

Входящие в (2.18) неизвестные параметры A_0, A_1 и $n(\eta)$ определяются из граничных условий (1.6) с помощью теории краевых задач.

3. Определение параметров, входящих в решение. Построенное решение при $A_0 = 2U_0$ и $A_1 = 0$ удовлетворяет граничному условию (1.6) на бесконечности. С учетом граничного условия (1.6) на стенке сведем (2.17) к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши

$$\begin{aligned}-2U_0 &= \int_0^\infty \Phi(\eta,\mu)n(\eta)d\eta-\sqrt{\pi}\int_0^\infty \Phi(\eta,\mu)[a_3(\eta)-\mu\eta a_2(\eta)]d\eta+\\ &+\sqrt{\pi}\exp(\mu^2)a_3(\mu)\quad(\mu>0)\end{aligned} \tag{3.1}$$

Обозначим

$$\mu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\eta[a_3(\eta)-\eta z a_2(\eta)]}{\eta-z}d\eta$$

и введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\eta n(\eta)}{\eta-z}d\eta \tag{3.2}$$

аналитическую в комплексной плоскости с разрезом вдоль действительной положительной полуоси. Граничные значения этой функции сверху и снизу на разрезе $(0, +\infty)$, определяемые как

$$N^{\pm}(\mu) = \lim_{\epsilon\to 0+} N(\mu\pm\epsilon)$$

связаны между собой формулами Сохоцкого

$$N^+(\mu)-N^-(\mu) = \mu n(\mu),\quad N^+(\mu)+N^-(\mu) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\eta n(\eta)}{\eta-\mu}d\eta$$

Приведем такие же равенства для $M(z)$ и $\lambda(\mu)$

$$M^+(\mu)-M^-(\mu) = \mu[a_3(\mu)-\mu^2 a_2(\mu)]$$

$$M^+(\mu)+M^-(\mu) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\eta[a_3(\eta)-\eta z a_2(\eta)]}{\eta-\mu}d\eta$$

$$\lambda^+(\mu)-\lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi}i\mu\exp(-\mu^2),\quad \lambda^+(\mu)+\lambda^-(\mu) = 2\lambda(\mu)$$

С использованием записанных формул уравнение (3.1) сведем к неоднородной краевой задаче Римана на действительной полуоси

$$f(\mu) = [N^+(\mu) - \sqrt{\pi}M^+(\mu)]\lambda^+(\mu) - [N^-(\mu) - \sqrt{\pi}M^-(\mu)]\lambda^-(\mu) \quad (\mu > 0) \tag{3.3}$$

$$f(\mu) = -2U_0\mu\exp(-\mu^2) - \sqrt{\pi}\mu a_3(\mu) \tag{3.4}$$

Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \quad (\mu > 0) \tag{3.5}$$

В качестве ограниченного в нуле решения задачи (3.5) возьмем функцию

$$X(z) = \frac{1}{z}\exp V(z), \quad V(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\theta(\tau) - \pi}{\tau - z}d\tau$$

$$\theta(\tau) - \pi = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\tau\exp(-\tau^2)}$$

Здесь $\theta(\tau) = \arg\lambda^+(\tau)$ – регулярная ветвь аргумента функции $\lambda^+(\tau)$, фиксированная условием $\theta(0) = 0$.

С помощью однородной задачи (3.5) сведем краевую задачу (3.3) к задаче определения аналитической функции по заданному скачку

$$\frac{2f(\mu)}{X(-\mu)} = [N^+(\mu) - \sqrt{\pi}M^+(\mu)]X^+(\mu) - [N^-(\mu) - \sqrt{\pi}M^-(\mu)]X^-(\mu) \quad (\mu > 0)$$

решение которой с учетом поведения всех входящих в нее функций записывается в виде

$$N(z) = \frac{1}{X(z)}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{f(\mu)}{X(-\mu)}\frac{d\mu}{\mu - z} + \sqrt{\pi}M(z) \tag{3.6}$$

Функция $N(z)$, определяемая равенством (3.2), исчезает в бесконечно удаленной точке. Потребуем, чтобы этим свойством обладало и решение (3.6). Раскладывая (3.6) в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки, находим

$$U_0 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \eta^2 a_2(\eta)d\eta + \int_0^\infty \frac{\eta a_3(\eta)}{X(-\eta)}d\eta$$

Отсюда с учетом (1.7)–(1.9), (2.18) и (3.4) после интегрирования дважды по частям находим

$$U_0 = \frac{k}{2}\left[\gamma\int_0^\infty \eta^2 A_2(\eta)d\eta + \int_0^\infty \eta[4A_1(\eta) + 5\gamma A_2(\eta)]\frac{d\eta}{X(-\eta)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \eta^2[A_1(\eta) + 2\gamma A_2(\eta)]\frac{d\eta}{X(-\eta)}\int_0^\infty \frac{\theta(\tau) - \pi}{(\tau + \eta)^2}d\tau\right] \tag{3.7}$$

Итак, все свободные параметры решения (2.17) определены однозначно, в том числе однозначно определен и коэффициент U_0, отвечающий дискретному спектру. Коэффициенты непрерывного спектра $n(\eta)$ находим из формул Сохоцкого

$$\eta n(\eta) = N^+(\eta) - N^-(\eta)$$

Выражение (3.7) определяет искомую скорость теплового скольжения второго порядка.

4. Вычисление коэффициента теплового скольжения второго порядка. Проведенный численный анализ дает следующий результат

$$U_0 = 0.53805k \tag{4.1}$$

Переходя в (4.1) к размерным величинам, находим $\beta_R = 2.3768$. Учитывая, что для высокотеплопроводных аэрозольных частиц при малых числах Kn скорость термофореза определяется выражением [7]

$$\mathbf{U}_T = \tau\nu \mathrm{Kn} \nabla \ln T, \quad \tau = -2K_T(C_T + \beta_R - \beta_B)$$

$K_T = 1.14995$, $C_T = 2.204939$, $\beta_B = 5.798445$, находим $\tau = 2.798206$. Здесь C_T – коэффициент скачка температуры разреженного газа на границе твердой плоской поверхности, β_B – коэффициент барнеттовского скольжения. Отметим, что найденное значение коэффициента β_R теоретически подтверждает существование отрицательного (в направлении градиента температуры) термофореза. В [6] $\tau = 3.258$.

Заключение. Представлен аналитический метод решения полупространственной краевой задачи для неоднородного линеаризованного кинетического уравнения Больцмана с оператором столкновений в форме БГК-модели в задаче о тепловом скольжении второго порядка. Построено общее решение неоднородного кинетического уравнения. Найденное значение коэффициента теплового скольжения второго порядка теоретически подтверждает существование отрицательного (в направлении градиента температуры) термофореза.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (№ 03-01-00281).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.
3. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
4. *Dwyer H.A.* Thirteen-moment theory of the thermal force on a spherical particle // Phys. Fluids. 1967. V. 10. № 5. P. 976–984.
5. *Горелов С.Л.* Термофорез и фотофорез в разреженном газе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 5. С. 178–182.
6. *Takeo Soga.* A kinetic analysis of thermal force on a spherical particle of high thermal conductivity in monoatomic gas // Phys. Fluids. 1986. V. 29. № 4. P. 976–985.
7. *Маясов Е.Г., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* О термофорезе нелетучей сферической частицы в разреженном газе при малых числах Кнудсена // Письма в ЖТФ. 1988 Т. 14. № 6. С. 498–502.
8. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
9. *Латышев А.В.* Применение метода Кейза к решению линеаризованного кинетического БГК уравнения в задаче о температурном скачке // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 581–586.

Москва
Архангельск
E-mail: latyshev@orc.ru

Поступила в редакцию
25.IV.2002