

УДК 532.59+539.3:534.1

© 2003 г. Л. А. ТКАЧЕВА

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ДИФРАКЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА УПРУГОЙ ПЛАВАЮЩЕЙ ПЛАСТИНЕ

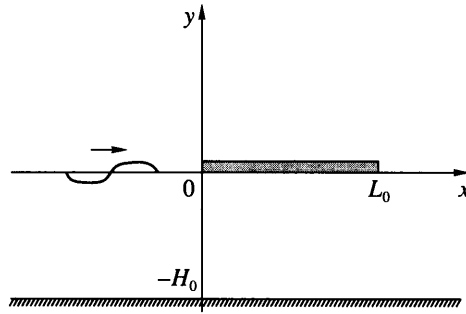
Рассматривается задача о поведении плавающей упругой пластины в виде полосы на волнах. Предложен новый численный метод решения этой задачи, основанный на методе Винера – Хопфа. Решение краевой задачи сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которая удовлетворяет условиям редукции. Результаты расчетов сравниваются с экспериментом, а также с расчетами других авторов. Полученная система уравнений сильно упрощается в случае коротких набегающих волн. Предложены три коротковолновых приближения: одномодовое, четырехмодовое и равномерное, которые дают хорошее соответствие с расчетами по полной модели. Для одномодового и равномерного приближений получены простые явные формулы.

Ключевые слова: поверхностные волны, дифракция, упругая пластина, метод Винера – Хопфа.

Задача о гидроупругом поведении пластины, плавающей на поверхности жидкости, в последние годы привлекает к себе интерес в связи с проектами построения плавающих платформ различного назначения: островов, аэродромов, космодромов и т.п. Гигантские размеры таких объектов затрудняют выполнение критериев подобия при экспериментальных исследованиях. Поэтому численное моделирование играет большую роль в изучении таких объектов.

Существуют различные численные методы решения таких задач, например [1–6]. Однако все эти методы дают достоверные результаты только для достаточно длинных набегающих волн. В случае коротких волн результаты, полученные этими методами, не согласуются между собой и дают большое расхождение с экспериментальными наблюдениями. Экспериментальное и численное исследование данной задачи проводилось в работах [7, 8]. Попытки построения аналитических решений данной задачи методом Винера – Хопфа предпринимались рядом авторов [9–12]. Однако никому из них не удалось получить решение в явном виде. Особенностью возникающей краевой задачи является высокий порядок производной в одном из краевых условий и дополнительные условия в кромке пластины. В рамках метода Винера – Хопфа необходимо продолжить решение на всю комплексную плоскость. При этом появляются константы, которые должны определяться из условий в кромках. Найти эти константы оказалось не так просто. В [13, 14] предложен новый подход к определению констант, что позволило получить точные решения плоской задачи о дифракции поверхностных волн на упругой полуплоскости в жидкости конечной глубины и бесконечно глубокой жидкости. В данной работе метод Винера – Хопфа применяется для пластины конечной ширины. В литературе по методу Винера – Хопфа не было аналогов применения этого метода к краевым задачам с высоким порядком производной и тремя участками различных краевых условий.

1. Постановка задачи. В рамках линейной теории исследуется гидроупругое поведение плавающей пластины на волнах в жидкости конечной глубины H_0 . Пластина имеет постоянную толщину h и длину L_0 . Периодические по времени колебания пластины вызваны набегающими слева поверхностными волнами малой амплитуды A



Фиг. 1. Схема течения

(фиг. 1). Левый край пластины принимается за начало декартовой системы координат x, y . Концы пластины не закреплены. Осадкой пластины в воду будем пренебрегать, граничные условия сносятся на невозмущенную поверхность воды. Жидкость предполагается идеальной несжимаемой, а ее течение безвихревым.

Пусть толщина пластины значительно меньше длины набегающих волн. В действительности это предположение не вносит существенных ограничений. Поверхностные волны сосредоточены в тонком слое на поверхности жидкости и экспоненциально затухают в глубину. Толщина слоя порядка длины волны. Если длина волны сравнима с толщиной пластины, то необходимо учитывать осадку пластины в воду и отражение волн от торца пластины, в этом случае поверхностные волны будут почти полностью отражаться. Поверхностные волны могут проходить в пластину, если их длина существенно больше толщины пластины.

Потенциал скоростей жидкости ϕ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям в виде

$$\Delta \phi = 0, \quad (-H_0 < y < 0)$$

$$\phi_y = 0, \quad (y = -H_0), \quad \phi_y = w_t, \quad (y = 0)$$

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p, \quad (y = 0, 0 < x < L_0) \quad (1.1)$$

$$p = -\rho(\phi_t + gw)$$

$$\phi_t + gw = 0, \quad (y = 0, x \in (-\infty, 0) \cup (L_0, \infty))$$

Здесь w – вертикальное смещение верхней поверхности жидкости (пластины), p – гидродинамическое давление, g – ускорение свободного падения, D – цилиндрическая жесткость пластины, ρ, ρ_0 – плотности жидкости и пластины, t – время. На краях пластины должны обращаться в ноль момент и перерезывающая сила

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad (y = 0, x = 0, L_0) \quad (1.2)$$

Зависимость всех функций от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$. Введем безразмерные переменные

$$\phi' = \frac{\phi}{A\sqrt{gl}}, \quad x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad p' = \frac{p}{\rho g A}, \quad t' = \omega t$$

где A – амплитуда падающей волны, $l = g/\omega^2$ – характерная длина. Штрихи в дальнейшем будем опускать. Представим потенциал φ в виде

$$\varphi = (\varphi_0 + \varphi_1)e^{-it}, \quad \varphi_0 = \frac{e^{i\gamma x} \operatorname{ch}\gamma(y+H)}{\operatorname{ch}\gamma H}$$

где φ_0 – потенциал падающей волны, φ_1 – дифрагированный потенциал, γ – волновое число в набегающей волне. Значение γ определяется из дисперсионного соотношения для поверхностных волн на воде глубины H

$$\gamma \operatorname{th}(\gamma H) - 1 = 0$$

Тогда из (1.1), (1.2) получим краевую задачу для φ_1

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0, \quad (y = -H) \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0, \quad (-H < y < 0) \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \varphi_1 = 0, \quad (y = 0, x \in (-\infty, 0) \cup (L, \infty))$$

$$\left(\beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1 - \delta \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \varphi_1 = B e^{i\gamma x}, \quad (y = 0, 0 < x < L) \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3 \partial y} = 0, \quad (y = 0, x = 0, L) \tag{1.6}$$

$$L = \frac{L_0}{l}, \quad H = \frac{H_0}{l}, \quad \beta = \frac{D}{\rho g l^4}, \quad \delta = \frac{\rho_0 h}{\rho l}, \quad B = \delta - \beta \gamma^4$$

Здесь L, H, β и δ – безразмерные параметры задачи: безразмерные длина пластины и глубина жидкости и приведенные жесткость и погонная масса пластины. Кроме этого должны выполняться условия излучения при $|x| \rightarrow \infty$ и условия регулярности вблизи кромок (локальная ограниченность энергии). Ввиду сделанных предположений параметр $\delta \ll 1$. В дальнейшем положим δ равным нулю.

Рассмотрим характер распространения волн в жидкости со свободной поверхностью и под пластиной. Найдем решения уравнения Лапласа с условием (1.3) на дне и соответствующим условием на верхней границе вида $e^{i\alpha x} \operatorname{ch}(\alpha(y+H))/\operatorname{ch}(\alpha H)$.

Для поверхностных волн значения α должны удовлетворять дисперсионному соотношению

$$K_1(\alpha) \equiv \alpha \operatorname{th}(\alpha H) - 1 = 0$$

Это дисперсионное соотношение имеет два действительных корня $\pm \gamma$ и счетное множество чисто мнимых корней $\pm \gamma_n$ ($n = 1, 2, \dots$), расположенных симметрично относительно действительной оси [6], при $n \rightarrow \infty \gamma_n \rightarrow i n \pi / H$.

Для волн, распространяющихся в пластине (так называемых изгибно-гравитационных волн), получаем дисперсионное соотношение

$$K_2(\alpha) \equiv (\beta \alpha^4 + 1) \alpha \operatorname{th}(\alpha H) - 1 = 0$$

Оно имеет два действительных корня $\pm\alpha_0$, счетное множество чисто мнимых корней $\pm\alpha_n$ ($n = 1, 2, \dots$), симметричных относительно действительной оси, а также четыре комплексных корня, симметричных относительно действительной и мнимой осей [6]. Обозначим через α_{-1} корень, лежащий в первом квадранте, через α_{-2} – корень во втором квадранте. При $n \rightarrow \infty$ $\alpha_n \rightarrow in\pi/H$.

Дисперсионные функции $K_1(\alpha)$ и $K_2(\alpha)$ четные. Действительные корни дисперсионных соотношений определяют распространяющиеся волны, остальные корни определяют краевые волны, экспоненциально затухающие вдали от кромки пластины.

2. Интегральные уравнения. Решение задачи будем строить методом Винера – Хопфа в интерпретации Джонса [15]. Введем в рассмотрение функции комплексной переменной α

$$\Phi_+(\alpha, y) = \int_L^\infty e^{i\alpha(x-L)} \varphi_1(x, y) dx, \quad \Phi_-(\alpha, y) = \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x} \varphi_1(x, y) dx \quad (2.1)$$

$$\Phi_1(\alpha, y) = \int_0^L e^{i\alpha x} \varphi_1(x, y) dx, \quad \Phi(\alpha, y) = \Phi_-(\alpha, y) + \Phi_1(\alpha, y) + e^{i\alpha L} \Phi_+(\alpha, y)$$

Функция $\Phi_+(\alpha, y)$ определена в верхней полуплоскости $\text{Im}\alpha > 0$, а функция $\Phi_-(\alpha, y)$ – в нижней полуплоскости $\text{Im}\alpha < 0$. С помощью аналитического продолжения эти функции можно определить во всей комплексной плоскости.

Исследуем поведение функций $\Phi_\pm(\alpha, y)$. При $x \rightarrow -\infty$ дифрагированный потенциал представляет собой отраженную волну вида $\text{Re}^{-i\gamma x}$ и множество экспоненциально затухающих волн. Наименее затухающая волна соответствует корню γ_1 . Поэтому $\Phi_-(\alpha, y)$ аналитична в полуплоскости $\text{Im}\alpha < |\gamma_1|$ за исключением полюса при $\alpha = -\gamma$. При $x \rightarrow \infty$ потенциал φ_1 представляет собой проходящую волну вида $T e^{i\gamma x}$ и множество экспоненциально затухающих мод. Поэтому функция $\Phi_+(\alpha, y)$ аналитична в полуплоскости $\{\text{Im}\alpha > -|\gamma_1|\}$ за исключением полюса в точке $\alpha = \gamma$.

Функция $\Phi(\alpha, y)$ представляет собой образ Фурье для функции $\varphi_1(x, y)$ и удовлетворяет уравнению $\partial^2 \Phi / \partial y^2 - \alpha^2 \Phi = 0$. Общее решение этого уравнения с условием (1.3) на дне имеет вид

$$\Phi(\alpha, y) = C(\alpha) \text{ch}(\alpha(y+H)) / \text{ch}(\alpha H) \quad (2.2)$$

Обозначим через $D_\pm(\alpha)$, $D_1(\alpha)$ интегралы типа (2.1), где функция φ_1 под интегралом заменяется левой частью краевого условия (1.4), а через $F_\pm(\alpha)$, $F_1(\alpha)$ – аналогичные выражения, в которых в качестве подынтегральной функции берется левая часть выражения (1.5). Введем функции $D(\alpha)$ и $F(\alpha)$

$$D(\alpha) = D_-(\alpha) + D_1(\alpha) + e^{i\alpha L} D_+(\alpha), \quad F(\alpha) = F_-(\alpha) + F_1(\alpha) + e^{i\alpha L} F_+(\alpha)$$

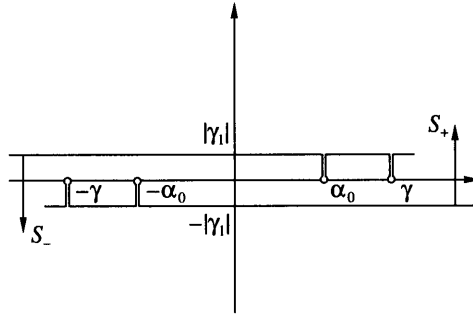
Функции $D(\alpha)$ и $F(\alpha)$ представляют собой образы Фурье, которые будем понимать в смысле обобщенных функций [16]. Для них выполняются соотношения

$$D(\alpha) = C(\alpha) K_1(\alpha), \quad F(\alpha) = C(\alpha) K_2(\alpha)$$

Из краевых условий (1.4) и (1.5) имеем

$$D_-(\alpha) = D_+(\alpha) = 0, \quad D_1(\alpha) = D(\alpha) = C(\alpha) K_1(\alpha)$$

$$F_1(\alpha) = \frac{B[e^{i(\alpha+\gamma)L} - 1]}{i(\alpha+\gamma)}, \quad F_-(\alpha) + F_1(\alpha) + e^{i\alpha L} F_+(\alpha) = C(\alpha) K_2(\alpha) \quad (2.3)$$



Фиг. 2. Области S_{\pm} аналитичности функций $\Phi_{\pm}(\alpha)$

Исключая $C(\alpha)$, получаем уравнение

$$F_{-}(\alpha) + \frac{B[e^{i(\alpha+\gamma)L} - 1]}{i(\alpha + \gamma)} + e^{i\alpha L} F_{+}(\alpha) = D_1(\alpha)K(\alpha), \quad K(\alpha) = \frac{K_2(\alpha)}{K_1(\alpha)} \quad (2.4)$$

В соответствии с методом Винера – Хопфа необходимо факторизовать функцию $K(\alpha)$, т.е. представить ее в виде

$$K(\alpha) = K_{+}(\alpha)K_{-}(\alpha) \quad (2.5)$$

где функции $K_{\pm}(\alpha)$ регулярны в тех же областях, что и функции $\Phi_{\pm}(\alpha, y)$. Функция $K(\alpha)$ имеет соответственно нули и полюса на действительной оси в точках $\pm\gamma$ и $\pm\alpha_0$. Поэтому будем рассматривать области аналитичности S_{+} и S_{-} , где S_{+} – полуплоскость $\text{Im}\alpha > -|\gamma|$ с разрезами, исключающими точки α_0 и γ , S_{-} – полуплоскость $\text{Im}\alpha < |\gamma|$ с разрезами, исключающими точки $-\alpha_0$ и $-\gamma$ (фиг. 2).

Введем функцию

$$g(\alpha) = \frac{K(\alpha)(\alpha^2 - \gamma^2)}{\beta(\alpha^2 - \alpha_0^2)(\alpha^2 - \alpha_{-1}^2)(\alpha^2 - \alpha_{-2}^2)}$$

Функция $g(\alpha)$ на действительной оси не имеет нулей, ограничена и стремится на бесконечности к единице. Факторизуем $g(\alpha)$ следующим образом [15]

$$g(\alpha) = g_{+}(\alpha)g_{-}(\alpha), \quad g_{\pm}(\alpha) = \exp\left[\pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{\ln g(x)}{x - \alpha} dx\right], \quad \sigma < |\gamma|$$

Определим функции $K_{\pm}(\alpha)$ формулой

$$K_{\pm}(\alpha) = \frac{\sqrt{\beta}(\alpha \pm \alpha_0)(\alpha \pm \alpha_{-1})(\alpha \pm \alpha_{-2})g_{\pm}(\alpha)}{(\alpha \pm \gamma)}$$

При этом $K_{+}(\alpha) = K_{-}(-\alpha)$. Умножим уравнение (2.4) на $e^{-i\alpha L}[K_{-}(\alpha)]^{-1}$ и преобразуем его к виду

$$\frac{F_{+}(\alpha)}{K_{+}(\alpha)} + \frac{Be^{i\gamma L}}{i(\alpha + \gamma)K_{+}(\alpha)} + U_{+}(\alpha) - V_{+}(\alpha) = D_1(\alpha)K_{-}(\alpha)e^{-i\alpha L} + V_{-}(\alpha) - U_{-}(\alpha) \quad (2.6)$$

$$U_{+}(\alpha) + U_{-}(\alpha) = \frac{e^{-i\alpha L}F_{-}(\alpha)}{K_{+}(\alpha)}, \quad V_{+}(\alpha) + V_{-}(\alpha) = \frac{Be^{-i\alpha L}}{i(\gamma + \alpha)K_{+}(\alpha)}$$

Функции $U_{\pm}(\alpha)$, $V_{\pm}(\alpha)$ определяются выражениями [15]

$$U_{\pm}(\alpha) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L} F_{\pm}(\zeta) d\zeta}{K_{\pm}(\zeta)(\zeta - \alpha)}, \quad V_{\pm}(\alpha) = \mp \frac{B}{2\pi} \int_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L} d\zeta}{K_{\pm}(\zeta)(\zeta + \gamma)(\zeta - \alpha)}$$

$$(\sigma < |\gamma_1|)$$

Теперь разделим уравнение (2.4) на $K_{-}(\alpha)$ и преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} \frac{F_{-}(\alpha)}{K_{-}(\alpha)} - D_1(\alpha)K_{+}(\alpha) + R_{+}(\alpha) + R_{-}(\alpha) &= \frac{B}{i(\alpha + \gamma)K_{-}(\alpha)} + S_{+}(\alpha) + S_{-}(\alpha) \\ \frac{F_{-}(\alpha)}{K_{-}(\alpha)} + R_{-}(\alpha) - S_{-}(\alpha) - \frac{B}{i(\alpha + \gamma)} \left[\frac{1}{K_{-}(\alpha)} - \frac{1}{K_{-}(-\gamma)} \right] &= \\ = D_1(\alpha)K_{+}(\alpha) - R_{+}(\alpha) + S_{+}(\alpha) + \frac{B}{i(\alpha + \gamma)K_{-}(-\gamma)} & \quad (2.7) \\ R_{+}(\alpha) + R_{-}(\alpha) = \frac{e^{i\alpha L} F_{+}(\alpha)}{K_{-}(\alpha)}, \quad S_{+}(\alpha) + S_{-}(\alpha) = -\frac{B e^{i(\alpha + \gamma)L}}{i(\gamma + \alpha)K_{-}(\alpha)} \end{aligned}$$

$$R_{\pm}(\alpha) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{e^{i\zeta L} F_{\pm}(\zeta) d\zeta}{K_{\pm}(\zeta)(\zeta - \alpha)}, \quad S_{\pm}(\alpha) = \pm \frac{B}{2\pi} \int_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{e^{i(\zeta + \gamma)L} d\zeta}{K_{\pm}(\zeta)(\zeta + \gamma)(\zeta - \alpha)}$$

$$(\sigma < |\gamma_1|)$$

В левой части уравнения (2.6) имеем функцию, аналитическую в области S_{+} , а в правой части – функцию, аналитическую в S_{-} . Их аналитическим продолжением можно определить функцию во всей комплексной плоскости. Согласно теореме Лиувилля, эта функция является полиномом. Степень полинома определяется поведением функций при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Из условия локальной ограниченности энергии следует, что вблизи кромки пластины скорости имеют особенность не выше $O(r^{-\lambda})$ ($\lambda < 1$, r – расстояние до кромки пластины). Тогда функция $F_{-}(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ имеет порядок не выше $O(|\alpha|^{\lambda+3})$, а $D_{+}(\alpha)$ – не выше $O(|\alpha|^{\lambda-1})$ [16]. Функции $K_{\pm}(\alpha)$ имеют на бесконечности порядок $O(|\alpha|^2)$, так как $g_{\pm}(\alpha) \rightarrow 1$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Следовательно, степень полинома равна единице и

$$\frac{F_{+}(\alpha)}{K_{+}(\alpha)} + \frac{B e^{i\gamma L}}{i(\alpha + \gamma)K_{+}(\alpha)} + U_{+}(\alpha) - V_{+}(\alpha) = a_1 \alpha + b_1 \quad (2.8)$$

Аналогично из уравнения (2.7) получаем

$$\frac{F_{-}(\alpha)}{K_{-}(\alpha)} + R_{-}(\alpha) - S_{-}(\alpha) - \frac{B}{i(\alpha + \gamma)} \left[\frac{1}{K_{-}(\alpha)} - \frac{1}{K_{-}(-\gamma)} \right] = a_2 \alpha + b_2 \quad (2.9)$$

Здесь a_1, b_1, a_2, b_2 – неизвестные константы, которые будем определять из условий в кромках (1.6).

Введем новые искомые функции

$$\Psi_{+}(\alpha) = F_{+}(\alpha) + \frac{B e^{i\gamma L}}{i(\alpha + \lambda)}, \quad \Psi_{-}^{*}(\alpha) = F_{-}(\alpha) - \frac{B}{i(\alpha + \gamma)}$$

Звездочка указывает, что функция Ψ_-^* (α) регулярна в области S_- за исключением точки $-\gamma$, где она имеет полюс. Переходя к функциям $\Psi_+(\alpha)$, $\Psi_-^*(\alpha)$, из уравнений (2.8), (2.9) получим следующую систему

$$\frac{\Psi_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\sigma}^{\infty-i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L} \Psi_-^*(\zeta) d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta-\alpha)} = a_1\alpha + b_1 \tag{2.10}$$

$$\frac{\Psi_-^*(\alpha)}{K_-(\alpha)} + \frac{B}{i(\alpha+\gamma)K_(-\gamma)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{e^{i\zeta L} \Psi_+(\zeta) d\zeta}{K_-(\zeta)(\zeta-\alpha)} = a_2\alpha + b_2$$

$$(\sigma < |\gamma_1|)$$

Перейдем к определению констант a_1 и b_1 . Имеем

$$D_1(\alpha)K_-(\alpha)e^{-i\alpha L} + V_-(\alpha) - U_-(\alpha) = a_1\alpha + b_1$$

Подставляя сюда выражения для $U_-(\alpha)$, $V_-(\alpha)$, получим

$$D_1(\alpha) = \frac{e^{i\alpha L}}{K_-(\alpha)} \left[a_1\alpha + b_1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L} \Psi_-^*(\zeta) d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta-\alpha)} \right]$$

С учетом (2.2) и (2.3) и с помощью обратного преобразования Фурье получаем выражение для дифрагированного потенциала

$$\varphi_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha(x-L)} \operatorname{ch}(\alpha(y+H))}{\operatorname{ch}(\alpha H) K_-(\alpha) K_1(\alpha)} \left[a_1\alpha + b_1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L} \Psi_-^*(\zeta) d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta-\alpha)} \right] d\alpha$$

Домножим числитель и знаменатель на $K_+(\alpha)$, получим

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha(x-L)} \operatorname{th}(\alpha H) K_+(\alpha)}{K_2(\alpha)} \left[a_1\alpha + b_1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L} \Psi_-^*(\zeta) d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta-\alpha)} \right] d\alpha \tag{2.11}$$

Контур интегрирования во внешнем интеграле должен быть выбран таким образом, чтобы он полностью лежал в пересечении областей S_+ и S_- . Можно выбрать контур интегрирования на действительной оси, обходя точки α_0 и γ снизу, а точки $-\alpha_0$ и $-\gamma$ сверху.

Во внутреннем интеграле $\operatorname{Im}\alpha < \sigma$. Однако этот интеграл как функция от α аналитическим продолжением может быть определен во всей комплексной плоскости. Вычислим этот интеграл с помощью теории вычетов. Функция $K_+(\zeta)$ имеет нули в точках $-\alpha_j$, $j = -2, -1, 0, \dots$ и полюса в точках $-\gamma_j$, $j = 1, 2, \dots$. Подынтегральное выражение имеет полюса в точках $\zeta = -\alpha_j$, $j = -2, -1, 0, \dots$ и в точке $\zeta = \alpha$. Полюс функции $\Psi_-^*(\zeta)$ в точке $\zeta = -\gamma$ уничтожается полюсом функции $K_+(\zeta)$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L} \Psi_-^*(\zeta) d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta-\alpha)} = -\frac{e^{-i\alpha L} \Psi_-^*(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} \Psi_-^*(-\alpha_j)}{K'_+(-\alpha_j)(\alpha_j + \alpha)}$$

Рассмотрим случай $0 < x < L$. Внешний интеграл в (2.11) также вычислим с помощью теории вычетов. В первом и третьем интеграле контур интегрирования по α за-

мыкаем в верхней полуплоскости, а во втором интеграле – в нижней. Набегающая волна компенсируется вычетом в полюсе $\alpha = -\gamma$ функции $\Psi_-^*(\alpha)$. Получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, 0) = i \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\alpha_m \operatorname{th}(\alpha_m H) K_+(\alpha_m)}{K_2'(\alpha_m)} \left[(a_1 \alpha_m + b_1) e^{-i\alpha_m(x-L)} - \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} \Psi_-^*(-\alpha_j)}{K_+'(-\alpha_j)(\alpha_j + \alpha_m)} \right] - i \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\alpha_m \operatorname{th}(\alpha_m H) e^{i\alpha_m x} \Psi_-^*(-\alpha_m)}{K_2'(-\alpha_m)}$$

Подставляя данное выражение в краевые условия (1.6) при $x = l$, получим два уравнения

$$\sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\alpha_m^n \operatorname{th}(\alpha_m H) K_+(\alpha_m)}{K_2'(\alpha_m)} \left[a_1 \alpha_m + b_1 - \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} \Psi_-^*(-\alpha_j)}{K_+'(-\alpha_j)(\alpha_j + \alpha_m)} \right] + (-1)^n \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_m L} \alpha_m^n \operatorname{th}(\alpha_m H) \Psi_-^*(-\alpha_m)}{K_2'(-\alpha_m)} = 0, \quad n = 3, 4 \quad (2.12)$$

Из дисперсионного соотношения под пластиной имеем

$$\alpha_m^n \operatorname{th}(\alpha_m H) = -\frac{K_1(\alpha_m)}{\beta \alpha_m^{5-n}}$$

Подставим это выражение в (2.12) и заменим суммы по m интегралами

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{K_1(\alpha) K_+(\alpha)}{\alpha^n K_2(\alpha)} (a_1 \alpha + b_1) d\alpha + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{e^{-i\alpha L} K_1(\alpha) \Psi_-^*(\alpha) d\alpha}{\alpha^n K_2(\alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} \Psi_-^*(-\alpha_j)}{K_+'(-\alpha_j)} \int_{C_+} \frac{K_1(\alpha) K_+(\alpha) d\alpha}{\alpha^n K_2(\alpha)(\alpha + \alpha_j)} = 0, \quad n = 1, 2 \quad (2.13)$$

Контур интегрирования C_{\pm} берется от $-\infty$ до ∞ таким образом, чтобы он полностью лежал в пересечении областей S_+ и S_- . Индекс "+" означает, что контур интегрирования лежит выше нуля, соответственно индекс "-" означает, что он ниже нуля. Можно брать интеграл по действительной оси с соответствующим обходом точек $\pm\gamma$, $\pm\alpha_0$ и нуля.

Уравнения (2.13) с учетом (2.5) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{(a_1 \alpha + b_1) d\alpha}{\alpha^n K_-(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{e^{-i\alpha L} \Psi_-^*(\alpha) d\alpha}{\alpha^n K(\alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} \Psi_-^*(-\alpha_j)}{K_+'(-\alpha_j)} \int_{C_+} \frac{d\alpha}{\alpha^n K_-(\alpha)(\alpha + \alpha_j)} = 0, \quad n = 1, 2$$

Теперь замыкаем контур интегрирования в первом и третьем интеграле в нижней полуплоскости и после преобразований получаем

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{e^{-i\alpha L} \Psi_-^*(\alpha) d\alpha}{\alpha^2 K_+(\alpha)}, \quad b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{e^{-i\alpha L} \Psi_-^*(\alpha) d\alpha}{\alpha K_+(\alpha)} \quad (2.14)$$

Найдем теперь константы a_2 и b_2 . Имеем

$$D_1(\alpha) K_+(\alpha) - R_+(\alpha) + S_+(\alpha) + \frac{B}{i(\alpha + \gamma) K_+(\gamma)} = a_2 \alpha + b_2$$

Подставляя сюда выражения для $R_+(\alpha)$ и $S_+(\alpha)$, получим

$$D_1(\alpha) = \frac{1}{K_+(\alpha)} \left[a_2 \alpha + b_2 - \frac{B}{i(\alpha + \gamma) K_+(\gamma)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\sigma}^{\infty - i\sigma} \frac{e^{i\zeta L} \Psi_+(\zeta) d\zeta}{K_-(\zeta)(\zeta - \alpha)} \right]$$

С помощью обратного преобразования Фурье и с учетом (2.2), (2.3) находим представление для потенциала ϕ_1

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x} \operatorname{ch}(\alpha(y+H))}{\operatorname{ch}(\alpha H) K_+(\alpha) K_1(\alpha)} \left[a_2 \alpha + b_2 - \frac{B}{i(\alpha + \gamma) K_+(\gamma)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\sigma}^{\infty - i\sigma} \frac{e^{i\zeta L} \Psi_+(\zeta) d\zeta}{K_-(\zeta)(\zeta - \alpha)} \right] d\alpha \end{aligned}$$

Для производной потенциала получаем выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x, 0) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x} \operatorname{th}(\alpha H) K_-(\alpha)}{K_2(\alpha)} \left[a_2 \alpha + b_2 - \frac{B}{i(\alpha + \gamma) K_+(\gamma)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\sigma}^{\infty - i\sigma} \frac{e^{i\zeta L} \Psi_+(\zeta) d\zeta}{K_-(\zeta)(\zeta - \alpha)} \right] d\alpha \end{aligned} \quad (2.15)$$

Рассмотрим случай $0 < x < L$. Чтобы вычислить внешний интеграл в (2.15) с помощью теории вычетов, надо контур интегрирования замкнуть в нижней полуплоскости. Однако внутренний интеграл определен в области S_+ . Вычислим внутренний интеграл, замкнув контур интегрирования в верхней полуплоскости, а затем полученное выражение с помощью аналитического продолжения определим во всей комплексной плоскости. Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x, 0) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x} \operatorname{th}(\alpha H) K_-(\alpha)}{K_2(\alpha)} \left[a_2 \alpha + b_2 - \frac{B}{i(\alpha + \gamma) K_+(\gamma)} + \right. \\ & \left. + \frac{e^{i\alpha L} \Psi_+(\alpha)}{K_-(\alpha)} + \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} \Psi_+(\alpha_j)}{K'_-(\alpha_j)(\alpha_j - \alpha)} \right] d\alpha \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0) = -i \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_m x} \alpha_m \operatorname{th}(\alpha_m H) K_-(-\alpha_m)}{K_2'(-\alpha_m)} \left[-a_2 \alpha_m + b_2 - \frac{B}{i(\gamma - \alpha_m) K_+(\gamma)} + \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} \Psi_+(\alpha_j)}{K_1'(\alpha_j)(\alpha_j + \alpha_m)} \right] + i \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha_m(x-L)} \alpha_m \operatorname{th}(\alpha_m H) \Psi_+(\alpha_m)}{K_2'(\alpha_m)}$$

Набегающая волна компенсируется вычетом в точке $\alpha = -\gamma$. Подставляя полученное выражение в граничные условия (1.6), найдем после преобразований константы a_2 и b_2

$$a_2 = -\frac{i\beta\gamma^2}{K_-(-\gamma)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{e^{i\alpha L} \Psi_+(\alpha) d\alpha}{\alpha^2 K_-(\alpha)},$$

$$b_2 = \frac{i\beta\gamma^3}{K_-(-\gamma)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{e^{i\alpha L} \Psi_+(\alpha) d\alpha}{\alpha K_-(\alpha)}$$
(2.16)

Теперь подставим выражения (2.14), (2.16) для коэффициентов a_1 , b_1 , a_2 и b_2 в (2.10) и получим систему вида

$$\frac{\Psi_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\sigma}^{\infty-i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L} \Psi_-^*(\zeta) d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{e^{-i\zeta L} \Psi_-^*(\zeta)(\alpha + \zeta) d\zeta}{\zeta^2 K_+(\zeta)} = 0$$

$$\frac{\Psi_-^*(\alpha)}{K_-(\alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{e^{i\zeta L} \Psi_+(\zeta) d\zeta}{K_-(\zeta)(\zeta - \alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{e^{i\zeta L} \Psi_+(\zeta)(\alpha + \zeta) d\zeta}{\zeta^2 K_-(\zeta)} = -\frac{i\beta\gamma^2 \alpha^2}{(\alpha + \gamma) K_+(\gamma)}$$

Деформируем контуры интегрирования так, чтобы в каждом уравнении контур интегрирования был один. После преобразований получим систему интегральных уравнений

$$\frac{\Psi_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{\alpha^2}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{e^{-i\zeta L} \Psi_-^*(\zeta) d\zeta}{\zeta^2 (\zeta - \alpha) K_+(\zeta)} = 0$$

$$\frac{\Psi_-^*(\alpha)}{K_-(\alpha)} - \frac{\alpha^2}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{e^{i\zeta L} \Psi_+(\zeta) d\zeta}{\zeta^2 (\zeta - \alpha) K_-(\zeta)} = -\frac{i\beta\gamma^2 \alpha^2}{(\alpha + \gamma) K_+(\gamma)}$$
(2.17)

Для численного решения системы интегральных уравнений введем новые искомые функции

$$\xi(\alpha) = \frac{\Psi_+(\alpha)}{\alpha^2 K_+(\alpha)}, \quad \eta(\alpha) = \frac{\Psi_-^*(\alpha)}{\alpha^2 K_-(\alpha)}$$

Из (2.17) получим

$$\xi(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \eta(\zeta) \frac{e^{-i\zeta L} K_-(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \alpha) K_+(\zeta)} = 0$$

$$\eta(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \xi(\zeta) \frac{e^{i\zeta L} K_+(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \alpha) K_-(\zeta)} = -\frac{i\beta\gamma^2}{(\alpha + \gamma) K_+(\gamma)}$$

Интегралы можно вычислить с помощью теории вычетов. Тогда система интегральных уравнений сведется к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\xi_j - \sum_{m=-2}^{\infty} c_{jm} \eta_m = 0, \quad \eta_j - \sum_{m=-2}^{\infty} c_{jm} \xi_m = q_j$$

$$\xi_j = \xi(\alpha_j), \quad \eta_j = \eta(-\alpha_j), \quad q_j = \frac{i\beta\gamma^2}{(\gamma - \alpha_j)K_+(\gamma)} \tag{2.18}$$

$$c_{jm} = \frac{e^{i\alpha_m L} K_+(\alpha_m)}{(\alpha_m + \alpha_j)K'_-(\alpha_m)} = \frac{e^{i\alpha_m L} K_+^2(\alpha_m)}{(\alpha_m + \alpha_j)K'(\alpha_m)}$$

Система (2.18) удовлетворяет условиям редукции [17], и решение конечной редуцированной системы сходится к решению исходной системы, если порядок конечной системы стремится к бесконечности. Систему (2.18) можно свести к системе для η_j , исключив ξ_j . Получим матричное уравнение

$$(E - C^2)\eta = \mathbf{q} \tag{2.19}$$

где η – вектор с элементами η_j , E – единичная матрица, C – матрица с коэффициентами c_{jm} , \mathbf{q} – вектор с элементами q_j .

3. Коэффициенты отражения и прохождения, прогиб и деформация пластины. Коротковолновые приближения. Теперь можно найти отраженную и прошедшую волну. Возьмем представление для ϕ_1 в виде (2.15). При $x \rightarrow -\infty$ $\phi_1(x, 0) = \text{Re}^{-i\gamma x}$. Значение R определим, взяв в (2.15) вычет в точке $\alpha = \gamma$

$$R = \frac{i}{K'_1(\gamma)K_+(\gamma)} \left[a_2\gamma + b_2 + \frac{iB}{2\gamma K_+(\gamma)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\sigma}^{\infty - i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L} \Psi_-^*(\zeta) d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)} \right]$$

Подставляя сюда значения коэффициентов a_2 и b_2 и вычисляя интегралы, после преобразований получим

$$R = \frac{\gamma^2}{K'_1(\gamma)K_+(\gamma)} \left[\frac{\beta\gamma}{2K_+(\gamma)} + i \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} \Psi_+(\alpha_j)}{\alpha_j^2 (\alpha_j - \gamma) K'_-(\alpha_j)} \right] =$$

$$= \frac{\gamma^2}{K'_1(\gamma)K_+(\gamma)} \left[\frac{\beta\gamma}{2K_+(\gamma)} + i \sum_{j=-2}^{\infty} \xi_j \frac{e^{i\alpha_j L} K_+(\alpha_j)}{(\alpha_j - \gamma) K'_-(\alpha_j)} \right]$$

Найдем комплексную амплитуду проходящей волны. Возьмем представление для ϕ_1 в виде (2.11). При $x \rightarrow \infty$ $\phi(x, 0) = T e^{i\gamma x}$. Значение T определим, взяв в (2.11) вычет в точке $\alpha = -\gamma$

$$T = 1 - \frac{ie^{-i\gamma L}}{K_-(-\gamma)K'_1(-\gamma)} \left[b_1 - a_1\gamma - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + i\sigma}^{\infty + i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L} \Psi_-^*(\zeta) d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta + \gamma)} \right]$$

Функции $\Psi_-^*(\alpha)$ и $K_+(\zeta)$ имеют полюс в точке $\zeta = -\gamma$. Вычет в этой точке компенсирует набегающую волну. Подставляя значения коэффициентов a_1 и b_1 и вычисляя интегралы, получим

$$\begin{aligned} T &= -\frac{i\gamma^2 e^{-i\gamma L}}{K_+(\gamma)K_1'(-\gamma)} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} \Psi_-^*(-\alpha_j)}{\alpha_j^2 (\alpha_j - \gamma) K_+'(-\alpha_j)} = \\ &= -\frac{i\gamma^2 e^{-i\gamma L}}{K_+(\gamma)K_1'(\gamma)} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\eta_j e^{i\alpha_j L} K_+^2(\alpha_j)}{(\alpha_j - \gamma) K_+'(\alpha_j)} \end{aligned}$$

С учетом сделанной нормировки в данном случае амплитуды $|R|$ и $|T|$ представляют собой коэффициенты отражения и прохождения.

Найдем выражение для потенциала, удобное для вычисления прогиба пластины. Имеем

$$C(\alpha) = \frac{1}{K_2(\alpha)} \left[F_+(\alpha) e^{i\alpha L} + \frac{B(e^{i(\alpha+\gamma)L} - 1)}{i(\alpha + \gamma)} + F_-(\alpha) \right]$$

Переходя к функциям $\Psi_+(\alpha)$, $\Psi_-^*(\alpha)$, получим

$$C(\alpha) = \frac{1}{K_2(\alpha)} [\Psi_+(\alpha) e^{i\alpha L} + \Psi_-^*(\alpha)]$$

С помощью обратного преобразования Фурье находим

$$\Phi_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha(x-L)} \operatorname{ch}(\alpha(y+H)) \Psi_+(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch}(\alpha H) K_2(\alpha)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x} \operatorname{ch}(\alpha(y+H)) \Psi_-^*(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch}(\alpha H) K_2(\alpha)}$$

На пластине $0 < x < L$. Первый интеграл замыкаем в верхней полуплоскости, а второй – в нижней. Функция $\Psi_-^*(\alpha)$ имеет полюс в точке $\alpha = -\gamma$. Вычет в этой точке компенсирует набегающую волну. Для прогиба пластины получаем следующую формулу

$$\begin{aligned} w(x) &= i \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, 0) = - \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j \operatorname{th}(\alpha_j H)}{K_2'(\alpha_j)} [e^{-i\alpha_j(x-L)} \Psi_+(\alpha_j) + e^{i\alpha_j x} \Psi_-^*(-\alpha_j)] = \\ &= - \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j^3 \operatorname{th}(\alpha_j H) K_+(\alpha_j)}{K_2'(\alpha_j)} [e^{-i\alpha_j(x-L)} \xi_j + e^{i\alpha_j x} \eta_j] \end{aligned}$$

Это выражение представляет собой разложение прогиба пластины по собственным модам. Таким образом, значения $\Psi_+(\alpha_j)$ и ξ_j определяют комплексные амплитуды волн, бегущих с правой кромки пластины, а $\Psi_-^*(-\alpha_j)$ и η_j – с левой кромки.

Деформации пластины в размерных переменных вычисляются по формуле

$$e_{xx} = -\frac{h}{2l^2} w''(x), \quad w''(x) = -\frac{1}{\beta} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{K_1(\alpha_j) K_+(\alpha_j)}{K_2'(\alpha_j)} [e^{-i\alpha_j(x-L)} \xi_j + e^{i\alpha_j x} \eta_j]$$

Если длина пластины существенно больше длины набегающих волн, то $L \gg 1$. В этом случае можно рассмотреть коротковолновые приближения, если число учитываемых мод ограничено.

Четырехмодовое приближение получается, если мы оставим в системе (2.18) четыре моды, соответствующие действительному корню α_0 , комплексным корням α_{-1} , α_{-2} и первому мнимому корню α_1 . Все остальные моды затухают гораздо быстрее, и учитываться не будут.

Одномодовое приближение получается, если оставить в системе (2.18) только распространяющиеся моды, соответствующие действительному корню α_0 . В этом случае можно получить явные формулы для всех интересующих величин. Имеем

$$\eta_0 = -\frac{i\beta\gamma^2}{(\gamma - \alpha_0)K_+(\gamma)(1 - c^2)}, \quad \xi_0 = -\frac{i\beta\gamma^2 c}{(\gamma - \alpha_0)K_+(\gamma)(1 - c^2)}$$

$$w(x) = \frac{i\beta\gamma^2 \alpha_0^3 \text{th}(\alpha_0 H) K_+(\alpha_0)}{(\gamma - \alpha_0) K_+(\gamma) K_2'(\alpha_0) (1 - c^2)} (e^{i\alpha_0 x} + c e^{-i\alpha_0(x-L)}) \quad (3.1)$$

$$R = \frac{\beta\gamma^3}{2K_+(\gamma)K_1'(\gamma)(1 - c^2)} \left(1 - c^2 \frac{(\gamma + \alpha_0)^2}{(\gamma - \alpha_0)^2} \right), \quad c = c_{00} = \frac{e^{i\alpha_0 L} K_+(\alpha_0) K_1(\alpha_0)}{2\alpha_0 K_2'(\alpha_0)}$$

Легко показать, что $|c|^2 = |\gamma - \alpha_0|^2 / (\gamma + \alpha_0)^2$. Поэтому коэффициент отражения имеет нули, для которых получаем простую формулу

$$\alpha_0 L + \text{Arg}(K_+(\alpha_0)) = \pi k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Найдем максимальное значение амплитуды прогиба пластины. С учетом соотношений

$$|K_+(\gamma)| = \sqrt{\frac{(\gamma + \alpha_0)K_2(\gamma)}{2\gamma(\gamma - \alpha_0)K_1'(\gamma)}}, \quad |K_+(\alpha_0)| = \sqrt{\frac{2\alpha_0(\gamma - \alpha_0)K_2'(\alpha_0)}{(\gamma + \alpha_0)|K_1(\alpha_0)|}}$$

из (3.1) получаем

$$\max_x |w(x)| = \frac{4\alpha_0\gamma}{(\gamma + \alpha_0)^2 |1 - c^2|} \sqrt{\frac{\gamma K_1'(\gamma) \text{th}(\alpha_0 H)}{K_2'(\alpha_0)}} \quad (3.3)$$

$$\max_L \max_x |w(x)| = \sqrt{\frac{\gamma K_1'(\gamma) \text{th}(\alpha_0 H)}{K_2'(\alpha_0)}}$$

Максимальное значение амплитуды прогиба пластины достигается при тех значениях L , которые удовлетворяют соотношению (3.2), т.е. при нулевых значениях коэффициента отражения. Найдем теперь минимальное значение амплитуды прогиба

$$\min_x |w(x)| = \frac{4\alpha_0^2}{(\gamma + \alpha_0)^2 |1 - c^2|} \sqrt{\frac{\gamma K_1'(\gamma) \text{th}(\alpha_0 H)}{K_2'(\alpha_0)}} \quad (3.4)$$

$$\min_L \min_x |w(x)| = \frac{2\alpha_0^2}{\gamma^2 + \alpha_0^2} \sqrt{\frac{\gamma K_1'(\gamma) \text{th}(\alpha_0 H)}{K_2'(\alpha_0)}}$$

Минимальное значение амплитуды прогиба достигается при тех значениях L , которые соответствуют максимальным значениям коэффициента отражения, т.е.

$$\alpha_0 L + \arg(K_+(\alpha_0)) = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Максимальные и минимальные амплитуды деформаций пластины определяются соответственно формулами

$$\max_L \max_x |e_{xx}| = \frac{h\alpha_0^2}{2l^2} \sqrt{\frac{\gamma K_1'(\gamma) \operatorname{th}(\alpha_0 H)}{K_2'(\alpha_0)}} \quad (3.5)$$

$$\min_L \min_x |e_{xx}| = \frac{h\alpha_0^4}{l^2(\gamma^2 + \alpha_0^2)} \sqrt{\frac{\gamma K_1'(\gamma) \operatorname{th}(\alpha_0 H)}{K_2'(\alpha_0)}} \quad (3.6)$$

Рассмотрим равномерное приближение. При $L \gg 1$ все элементы матрицы C экспоненциально малы, за исключением столбца, соответствующего действительному корню α_0 . Положим все остальные элементы матрицы равными нулю. Тогда система (2.19) легко обращается. В результате получим явное представление для всех интересующих величин

$$\eta_m = \frac{i\beta\gamma^2}{(\gamma - \alpha_0)K_+(\gamma)} \left[\frac{\gamma - \alpha_0}{\gamma + \alpha_0} + \frac{2\alpha_0 c^2}{(1 - c^2)(\alpha_0 + \alpha_m)} \right], \quad \xi_m = c_{m0}\eta_0$$

$$w(x) = \frac{i\beta\gamma^2}{K_+(\gamma)(1 - c^2)} \sum_{m=-2}^N \frac{\alpha_m^3 \operatorname{th}(\alpha_m H) K_+(\alpha_m)}{K_2'(\alpha_m)} \left[\frac{2\alpha_0 c e^{-i\alpha_m(x-L)}}{(\alpha_0 + \alpha_m)(\gamma - \alpha_0)} + \left(\frac{1}{\gamma - \alpha_m} + \frac{c^2(\alpha_0 - \alpha_m)(\alpha_0 + \gamma)}{(\gamma - \alpha_0)(\alpha_0 + \alpha_m)(\gamma - \alpha_m)} \right) e^{i\alpha_m x} \right]$$

$$R = \frac{\beta\gamma^3}{K_1'(\gamma)K_+(\gamma)} \left[\frac{1}{2} + \frac{4\gamma\alpha_0^2 c^2}{(\gamma - \alpha_0)(1 - c^2)} \sum_{j=-2}^N \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_j)(\alpha_j - \gamma)} \right]$$

где N – число учитываемых мод.

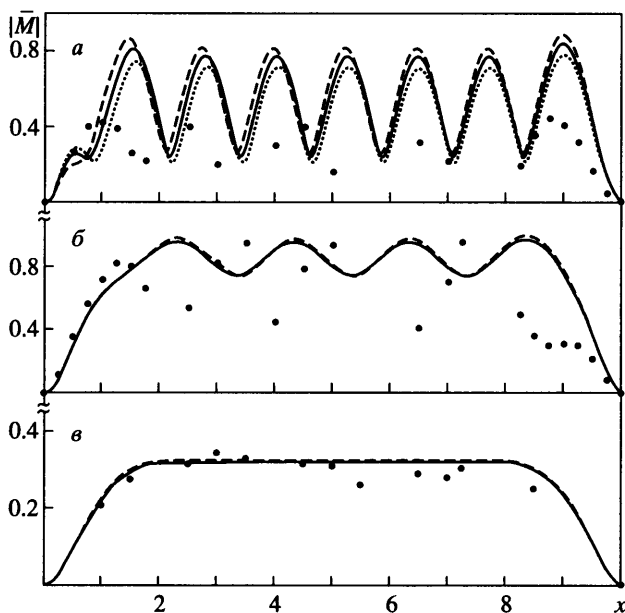
4. Численные результаты. Проведена серия расчетов для условий экспериментов [2] с однородной пластиной длиной $L_0 = 10$ м, толщиной $h = 38$ мм, осадкой $d = 8.36$ мм, модулем упругости $E = 103$ МПа. Глубина жидкости $H_0 = 1.1$ м, набегающие волны имели периоды: 2.875, 1.429 и 0.7 с.

Результаты расчетов хорошо согласуются с результатами, полученными другими методами [2, 3]. На фиг. 3 показаны результаты расчетов безразмерных изгибающих моментов \bar{M}

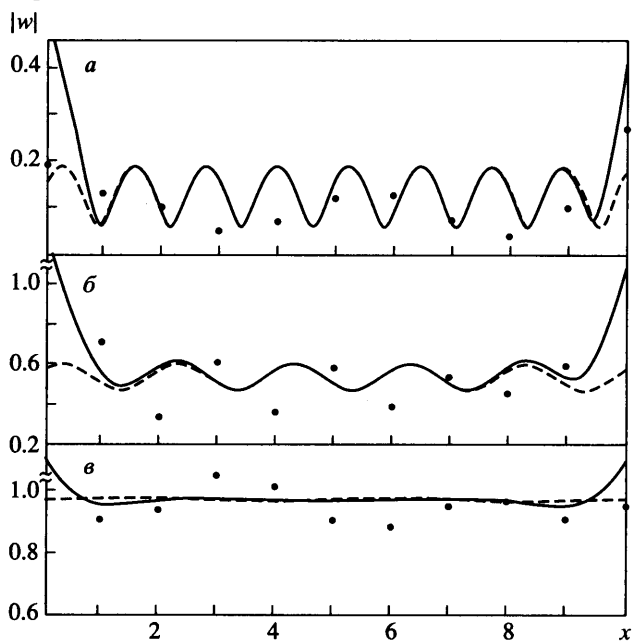
$$\bar{M}(x) = \frac{|M(x)|}{A\rho g L_0 d} = \frac{\beta l |w''(x)|}{Ld}$$

Из графиков видно, что результаты расчетов, полученные данными методами, хорошо согласуются между собой. Согласие с экспериментальными значениями достигается только для достаточно длинных набегающих волн.

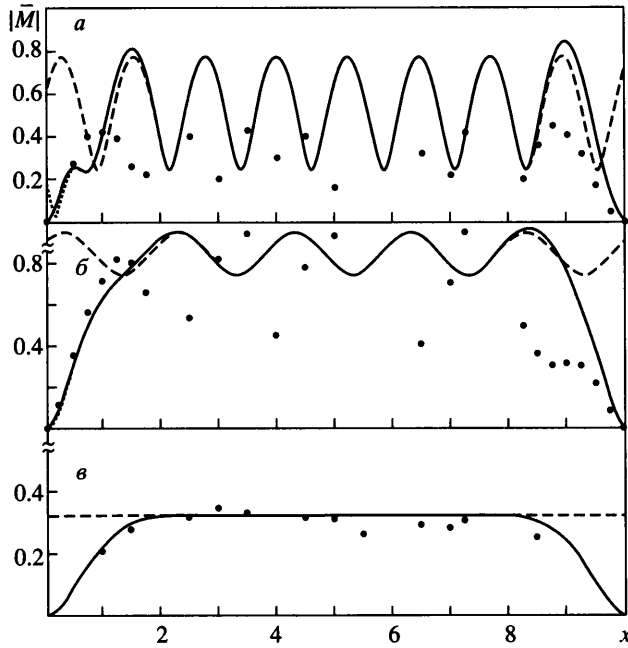
На фиг. 4 показаны амплитуды вертикальных смещений пластины. Кривые, соответствующие четырехмодовому и равномерному приближениям, совпадают с кривыми по полной модели (103 моды). Точки соответствуют экспериментальным значениям. На фиг. 5 приведены безразмерные изгибающие моменты для различных значений периодов. Из представленных графиков видно, что равномерное приближение дает хорошие результаты вплоть до кромок. Одномодовое приближение несправед-



Фиг. 3. Распределение амплитуд безразмерных изгибающих моментов $|\overline{M}(x)|$ на пластине: сплошные линии – расчет предложенным методом, штриховые – методом [2], пунктирные – методом [3], точки – экспериментальные значения, период $T = 0.7, 1.429, 2.875$ с (фиг. а, б, в)



Фиг. 4. Распределение амплитуд прогиба пластины $|w(x)|$: сплошные линии – расчет для общей системы, штриховые – по однодому приближению; кривые, соответствующие четырехмодовому и равномерному приближениям, совпадают со сплошными линиями, точки – экспериментальные значения, период $T = 0.7, 1.429, 2.875$ с (фиг. а, б, в)

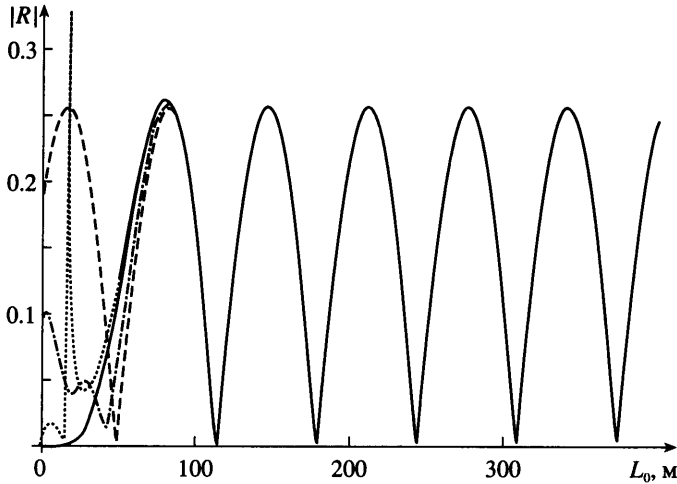


Фиг. 5. Распределение безразмерных изгибающих моментов $|\bar{M}(x)|$ на пластине: сплошные линии – расчет для общей системы, штриховые – по одномодовому приближению, пунктирные – по четырехмодовому; кривые, соответствующие равномерному приближению, совпали со сплошными линиями, точки – экспериментальные значения, период $T = 0.7, 1.429, 2.875$ с (фиг. а, б, в)

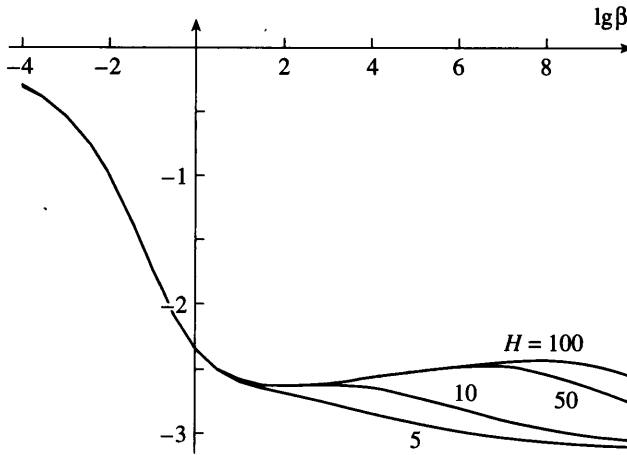
ливо вблизи краев, зато для него получены простые явные формулы. Вдали от краев прогиб пластины и напряжения с графической точностью совпадают с результатами, полученными для полной системы. Поэтому простые формулы (3.3)–(3.6) могут применяться для оценки амплитуд прогиба и напряжений в пластине.

Проведем также расчеты коэффициента отражения для ледяной пластины при следующих значениях физических величин: модуль Юнга $E = 6 \cdot 10^9$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность морской воды $\rho = 1025$ кг/м³. Аналогичные результаты, полученные другими методами, содержатся в работах [18, 19]. На фиг. 6 представлена зависимость коэффициента отражения $|R|$ от длины пластины L_0 в метрах, толщины льда $h = 1$ м при длине набегающей волны 100 м и глубине жидкости 1600 м. Равномерное приближение дает лучшие результаты на всем участке. Одномодовое приближение может быть использовано при $L > 80$.

Простота полученных формул позволяет легко проанализировать и объяснить полученные результаты. Так из формулы (3.1) следует, что немонотонность распределения амплитуд прогиба и напряжений в пластине, а также графика зависимости коэффициента отражения от длины пластины объясняются игрой фаз. Главная часть прогиба пластины представляет собой суперпозицию двух волн одинаковой длины: проходящей в пластину и отраженной от другого края. Если эти волны находятся в фазе, то амплитуда прогиба удваивается. Если же волны находятся в противофазе, то они гасят друг друга. Нули коэффициента отражения соответствуют полному прохождению волны и максимальным прогибам и напряжениям в пластине. Эти случаи



Фиг. 6. Зависимость коэффициента отражения $|R|$ от длины льдины L_0 (сплошные линии – расчет для общей системы, штриховые – по одномодовому приближению, пунктирные – по четырехмодовому, штрихпунктирные соответствуют равномерному приближению)



Фиг. 7. Зависимость аргумента $K_+^2(\alpha_0)$ от β при различных значениях глубины жидкости H

легко рассчитать с помощью формулы (3.2). Значение $K_+(\alpha_0)$ зависит только от параметров β и H и не зависит от L . На фиг. 7 представлена зависимость аргумента $\arg(K_+^2(\alpha_0))$ от β при различных значениях H .

Исследовались границы применимости коротковолновых приближений по точности расчета коэффициента отражения $|R|$. В таблице показаны нижние границы безразмерной длины пластины L при различных значениях β и H . Из этой таблицы видно, что с ростом β нижняя граница отодвигается в сторону больших значений. Четырехмодовое приближение имеет наиболее широкие границы, зато для одномодового и четырехмодового приближения получены явные формулы.

Тип приближения	lg β					
	-3	0	1	2	3	5
Четырехмодовое	0	20	100	160	220	500
Одномодовое	8	80	125	200	300	700
Равномерное	5	80	120	180	230	600

Заключение. Предложен новый численный метод, основанный на методе Винера–Хопфа, для расчета дифракции поверхностных волн на плавающей упругой пластине. Достоинством метода является широкая область его применимости как для длинных набегающих волн, так и для коротких. Результаты расчетов предложенным методом хорошо согласуются с результатами других авторов. Сравнение с экспериментом получило удовлетворительным только для достаточно длинных набегающих волн. Отличие расчетных данных для коротких волн, полученных различными методами, от экспериментальных значений, по-видимому, объясняется неадекватностью модели тонкой пластины в данном случае для описания упругих свойств.

Предложены три варианта коротковолновых приближений: четырехмодовое, одномодовое и равномерное. Определены границы их применения. Для одномодового и равномерного приближения получены простые явные формулы для прогиба и напряжений в пластине, коэффициента отражения. Получены также простые формулы для параметров задачи, соответствующих нулевым значениям коэффициента отражения, максимальных и минимальных амплитуд прогиба и напряжений.

Немонотонность распределения амплитуд прогиба и напряжений в пластине, а также так называемое "резонансное" взаимодействие поверхностных волн с плавающей упругой пластиной объясняется игрой фаз двух распространяющихся мод в пластине: проходящей и отраженной от противоположного края.

Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта № 1 СО РАН и гранта РФФИ (№ 02-01-00739).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стурова И.В. Косое набегание поверхностных волн на упругую полосу // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 4. С. 62–68.
2. Хабахпаева Т.И. Плоская задача об упругой плавающей пластине // Динамика сплошной среды. 2000. Вып. 116. С. 166–169.
3. Коробкин А.А. Численное и асимптотическое исследование плоской задачи о гидроупругом поведении плавающей пластины на волнах // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 2. С. 90–96.
4. Meylan M., Squire V.A. The response of ice floes to ocean waves // J. Geophys. Res. 1994. V. 99. № C1. P. 891–900.
5. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Набегание поверхностных волн на кромку сжатого льда // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3. С. 121–126.
6. Fox C., Squire V.A. Reflection and transmission characteristics at the edge of short fast sea ice // J. Geophys. Res. 1990. V. 95. № C7. P. 11. 629–11. 639.
7. Wu C., Watanabe E., Utsunomiya T. An eigenfunction expansion–matching method for analyzing the wave-induced responses of an elastic floating plate // Appl. Ocean Res. 1995. V. 17. № 5. P. 301–310.
8. Yago K., Ohmatsu S., Endo H. On the hydroelastic response of box-shaped floating structure with shallow draft // J. Soc. Naval Architects Japan. 1997. V. 182. P. 307–317.

9. *Evans D.V., Davies T.V.* Wave-ice interaction. New Jersey: Davidson lab., Stevens Inst. of Technol., 1968. rep. 1313. 103 p.
10. *Варламов В.В.* О рассеянии внутренних волн краем упругой пластины // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25. № 3. С. 413–421.
11. *Гольдштейн Р.В., Марченко А.В.* Дифракция плоских гравитационных волн на кромке ледяного покрова // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 924–930.
12. *Balmforth N.J., Craster R.V.* Ocean waves and ice sheets // J. Fluid Mech. 1999. V. 395. P. 89–124.
13. *Ткачева Л.А.* Рассеяние поверхностных волн краем плавающей упругой пластины // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 4. С. 88–97.
14. *Ткачева Л.А.* Дифракция поверхностных волн на плавающей упругой пластине // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 5. С. 121–135.
15. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
16. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
17. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
18. *Meylan M., Squire V.A.* Finite-floe wave reflection and transmission coefficients from a Semi-infinite model // J. Geophys. Res. 1993. V. 98. № C7. P. 12537–12542.
19. *Лавренов И.В., Новаков А.В.* Численное моделирование взаимодействия гравитационных волн с упругими льдинами // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 3. С. 123–131.

Новосибирск
E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию
14.II.2002