

УДК 532.526.5:532.527

© 2003 г. В. Б. ЗАМЕТАЕВ, М. А. КРАВЦОВА

ВЛИЯНИЕ ТОНКОГО НЕВЯЗКОГО ПРОДОЛЬНОГО ВИХРЯ НА ДВУМЕРНЫЙ ПРЕДОТРЫВНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Получено асимптотическое решение уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса, описывающее влияние тонкого продольного вихря постоянной циркуляции на развитие двумерного стационарного ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости на плоской пластине. Установлено, что в узкой области на поверхности пластины, вытянутой вдоль вихревой нити, вязкое течение описывается уравнениями трехмерного пограничного слоя. Изучено решение этих уравнений при малых значениях циркуляции вихревой нити. Обнаружен коллапс решения уравнений двумерного предотрывного пограничного слоя, вызванный сингулярным поведением трехмерных возмущений вблизи точек нулевого продольного трения.

Ключевые слова: пограничный слой, взаимодействие, отрыв.

Асимптотический подход к построению решений уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса является в настоящее время одним из мощнейших средств анализа в механике жидкости и газа. Несмотря на неустойчивость большинства известных течений, что, казалось бы, ограничивает область применимости этого метода для ламинарных потоков, с его помощью удается вскрыть физические механизмы и особенности развития вязких течений. Наиболее эффективно асимптотический подход в течение последних 30 лет используется в современной теории отрывных течений. Именно благодаря методу сращиваемых асимптотических разложений удалось обнаружить явление локального взаимодействия между вязкими и невязкими областями потока и понять иерархию построения решения полной задачи обтекания тел. Монография [1] содержит наиболее полное и ясное изложение двумерной теории отрывных течений со взаимодействием.

Особое место в многообразии течений со взаимодействием занимает теория кромочного (marginal) отрыва, созданная при анализе пограничного слоя на передней кромке тонкого профиля, установленного под углом атаки [2]. Обнаружено критическое значение угла атаки, при котором градиент давления неблагоприятен, а напряжение трения на поверхности тела обращается в нуль лишь в одной точке, оставаясь во всех остальных положительным. Решение уравнений пограничного слоя имеет в этой точке слабую особенность, но является продолжимым через нее вниз по потоку. Как было показано в [3, 4], в окрестности точки нулевого трения вследствие реакции внешнего потенциального потока на сингулярное поведение в ней гидродинамических функций формируется область взаимодействия пограничного слоя с внешним течением протяженностью $\Delta x = O(Re^{-1/5})$, где Re – характерное число Рейнольдса. При этом задачу о взаимодействии удается свести к нелинейному интегродифференциальному уравнению относительно поверхностного трения $A(x)$. Численное решение уравнения выявило два важнейших его свойства: несуществование решений при превышении критического угла атаки и неединственность [4–6]. Теория кромочного отрыва, обьяснившая структуру решения уравнений Навье–Стокса вблизи точки бифуркации по параметру, инициировала исследование целого ряда схожих физических задач.

Наиболее интересным представляется дальнейшее развитие этой теории в область пространственных течений. Короткая зона отрыва на верхней поверхности парабо-

ида вращения под углом атаки исследована в [7] в плоскости симметрии. Установлено, что пространственное влияние пограничного слоя (стекание жидкости к плоскости симметрии или растекание от нее) приводит к незначительному изменению уравнения для $A(x)$ и не меняет решение качественно. Первая чисто пространственная версия кромочного отрыва разработана в [8, 9] при исследовании зарождения отрыва на тонком конусе, установленном под малым углом атаки. Автомодельные переменные позволили свести пространственную задачу пограничного слоя к задаче от двух переменных и, как следствие, получить слабую особенность в решении при критическом угле атаки подобно плоскому случаю. Однако эволюция пограничного слоя вдоль конуса привела к тому, что уравнение для доминирующей трансверсальной компоненты трения A оказалось уравнением с частными производными. Численное решение показало, что отрыв пограничного слоя происходит не на носике конуса, а на некотором конечном расстоянии от него вниз по потоку. Далее в решении развивается особенность на конечном расстоянии от носика конуса, которая означает неприменимость исходных предпосылок и, по-видимому, означает выброс вихревой пелены за пределы пограничного слоя.

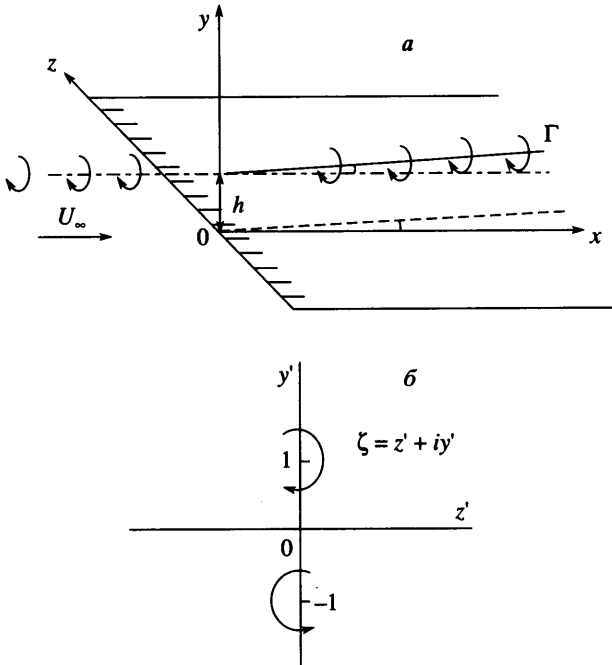
Вновь серьезный интерес исследователей привлек пограничный слой на верхней поверхности парабооида вращения под углом атаки в [10–12]. Формирование особенностей в трехмерном пограничном слое вблизи точки нулевого продольного трения исследовано в [10]. Впоследствии в [11] эти результаты были распространены на случай взаимодействия пограничного слоя с внешним невязким потоком. Расчет пространственного кромочного течения для специальным образом заданных краевых условий выполнен в [12].

Интересное исследование [13] посвящено влиянию малого возмущения (бугорок или впадина) обтекаемой поверхности в окрестности точки нулевого трения на уравнения кромочной теории. Пространственный случай такого возмущения поверхности описан в [14], а кромочная теория, обусловленная неоднородностью поверхности тела вращения, изучена в [15].

Теория кромочного отрыва изобилует неединственными решениями, подробно описанными уже в первых работах. Пространственные случаи не оказались исключениями [12], а в [16] для вязкой плоской пристенной струи несжимаемой жидкости помимо двумерного решения найдено и пространственное.

В данной работе рассматривается двумерный пограничный слой несжимаемой жидкости на плоской пластине, подверженный действию неблагоприятного градиента давления. Указанное течение возмущается тонкой продольной вихревой нитью постоянной циркуляции, принесенной набегающим потоком и находящейся на малом расстоянии от поверхности. Изучается сингулярное развитие слабых вязких трехмерных возмущений, порождаемых тонким вихрем, вблизи точки нулевого трения двумерного пограничного слоя. Важно отметить, что трехмерные возмущения могут вноситься самыми разными способами, например искривлением передней кромки пластины или падением следа на крыло. При этом механизм развития трехмерных возмущений в пограничном слое одинаков для всех этих случаев, а тонкая вихревая нить взята ввиду простоты внешнего потенциального решения.

1. Рассматривается двумерное стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости около плоской пластины, установленной под нулевым углом атаки в неоднородном набегающем потоке (фиг. 1, а). Пусть тонкий продольный вихрь с постоянной вдоль своей оси циркуляцией $LU_\infty\Gamma$ расположен на малом расстоянии Lh от плоской поверхности. Обозначим через Lx, Ly, Lz прямоугольные координаты, через $U_\infty u, U_\infty v, U_\infty w$ и $p_\infty + \rho U_\infty^2 p$ – соответствующие проекции вектора скорости и давление. Здесь U_∞, p_∞ – скорость и давление в набегающем потоке, ρ – плотность жидкости, L – характерный размер пластины. Введем число Рейнольдса $Re = U_\infty L/\nu$, где ν – коэффициент кинема-



Фиг. 1. Обтекание потоком вязкой несжимаемой жидкости плоской пластины (а), вблизи которой расположена тонкая вихревая нить с постоянной циркуляцией Γ; схематическое изображение точечного вихря, взаимодействующего с плоскостью (б)

тической вязкости, в дальнейшем полагаем $Re \rightarrow \infty$. Пространственное потенциальное течение, порожаемое вихревой нитью вблизи пластины, будет использовано как внешнее при исследовании пограничного слоя на поверхности пластины.

Двумерное невязкое решение известно а priori и вблизи твердой поверхности координатные разложения для компонент скорости имеют вид

$$u = u_0(x) + yu_1(x) + \dots$$

$$v = -u'_0(x)y - \frac{1}{2}u'_1(x)y^2 + \dots$$

Соответственно наклон линий тока при $y \rightarrow 0$

$$\frac{v}{u} = \frac{u'_0(x)}{u_0}y + O(y^2)$$

Введем искомые координаты положения вихревой нити по формулам

$$y_v = hy_0(x), \quad z_v = hz_0(x), \quad \Gamma = h^2\Gamma_1 > 0, \quad y_0(0) = 1, \quad z_0(0) = 0, \quad h \rightarrow 0$$

Заметим, что в главном порядке функция $y_0(x)$ совпадает со свободной линией тока, а $z_0(x)$ является линейной функцией (это свойство следует из решения, полученного ниже):

$$y_0(x) = \frac{u_0(0)}{u_0(x)}, \quad z_0(x) = -\frac{\Gamma_1}{4\pi}x \tag{1.1}$$

Чтобы найти потенциал течения, обусловленного вихревой нитью, удобно ввести новые переменные в узкой области вдоль нее

$$x' = x, \quad y' = \frac{1}{hy_0(x)}y, \quad z' = \frac{1}{hy_0(x)}z - \frac{z_0(x)}{y_0(x)}$$

Разложения компонент скорости и давления представим в виде

$$u = u_0(x') + hy_0(x')y'u_1(x') + h^2u_0u_2 + \dots$$

$$v = -hu_0'y_0y' + hu_0v' + \dots$$

$$w = hz_0'u_0 + hu_0w' + \dots$$

$$p = p_0(x') + hp_1 + h^2u_0^2p_2 + \dots, \quad z_0(x') = -\frac{\Gamma_1}{4\pi}x', \quad \Gamma = h^2\Gamma_1 > 0$$

Подставляя указанные разложения в уравнения Эйлера и совершая предельный переход при $h \rightarrow 0$, получим уравнение неразрывности и условие сохранения продольной компоненты завихренности

$$\frac{\partial v'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0$$

которые являются условиями Коши–Римана для комплексно-сопряженной скорости $V^*(\zeta) = w' - iv'$, $\zeta = z + iy'$. Здесь и далее звездочкой обозначены комплексно-сопряженные функции. Таким образом, пространственная задача потенциального обтекания пластины сводится к двумерной задаче о взаимодействии точечного вихря с бесконечной плоскостью. Вихрь с циркуляцией Γ_1 расположен в точке $y' = 1$, $z' = 0$ (фиг. 1, б). Тогда решение для комплексного потенциала скорости имеет вид

$$\phi = -\frac{\Gamma_1}{2\pi i} \ln(\zeta - i) + \frac{\Gamma_1}{2\pi i} \ln(\zeta + i) + \frac{\Gamma_1}{4\pi} \zeta$$

Из выражения для комплексно-сопряженной скорости

$$V^* = \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = \frac{\Gamma_1}{4\pi} - \frac{\Gamma_1}{\pi} \frac{1}{1 + \zeta^2} = w' - iv'$$

находим распределение поперечной скорости $w(z')$ на поверхности пластины

$$w = -h \frac{\Gamma_1}{4\pi} u_0(x') + hu_0(x') \left[\frac{\Gamma_1}{4\pi} - \frac{\Gamma_1}{\pi} \frac{1}{1 + z'^2} \right] + \dots \quad (1.2)$$

Отметим, что $w' = 0$ при $z' = \pm \sqrt{3}$.

Используя найденные компоненты скорости и уравнение Бернулли, определим продольное возмущение скорости и распределение давления на поверхности пластины

$$u_2 = -\frac{\Gamma_1^2}{4\pi^2} \frac{1}{1 + z'^2} + y_0'(x') \frac{\Gamma_1}{\pi} \frac{z'}{1 + z'^2}, \quad y' = 0 \quad (1.3)$$

$$p_2 = \frac{\Gamma_1^2}{4\pi^2} \frac{z'^2 - 1}{(1 + z'^2)^2} - y_0'(x') \frac{\Gamma_1}{\pi} \frac{z'}{1 + z'^2}, \quad y' = 0 \quad (1.4)$$

2. Рассмотрим трехмерный пограничный слой около твердой поверхности, решение в котором ищем в виде

$$u = U + \dots, \quad v = \text{Re}^{-1/2} V + \dots$$

$$w = -h \frac{\Gamma_1}{4\pi} U + hW + \dots, \quad p = p_0(x_1) + h^2 u_e^2 p_2 + \dots$$

$$x_1 = x, \quad y_1 = \text{Re}^{1/2} y, \quad z_1 = \frac{z}{h} + \frac{\Gamma_1}{4\pi} x$$

$$\Gamma = h^2 \Gamma_1 > 0, \quad \Gamma_1 = O(1)$$

В итоге получаем, что течение описывается уравнениями классического трехмерного пограничного слоя с заданным градиентом давления

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x_1} + V \frac{\partial U}{\partial y_1} + W \frac{\partial U}{\partial z_1} &= -p_0'(x_1) + \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} \\ U \frac{\partial W}{\partial x_1} + V \frac{\partial W}{\partial y_1} + W \frac{\partial W}{\partial z_1} &= -u_e^2 \frac{\partial p_2}{\partial z_1} - \frac{\Gamma_1}{4\pi} p_0' + \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial W}{\partial z_1} = 0$$

Для данной системы уравнений необходимо задать условия прилипания на поверхности

$$U = V = W = 0, \quad y_1 = 0 \quad (2.2)$$

а также условия сращивания с решением во внешнем невязком потоке (1.1), (1.2)–(1.4)

$$U = u_e(x_1), \quad W = u_e \left(\frac{\Gamma_1}{4\pi} - \frac{\Gamma_1}{\pi} (1 + Z^2)^{-1} \right), \quad y_1 \rightarrow +\infty$$

$$Z = \frac{z_1}{y_0}, \quad y_0(x_1) = \frac{u_e(0)}{u_e(x_1)}, \quad p_0' = -u_e u_e' \quad (2.3)$$

$$p_2 = \frac{\Gamma_1^2}{4\pi^2} \frac{Z^2 - 1}{(1 + Z^2)^2} - y_0'(x_1) \frac{\Gamma_1}{\pi} \frac{Z}{1 + Z^2}$$

Простой анализ показывает, что при $x_1 \rightarrow 0$ в качестве начальных данных для продольной компоненты скорости следует использовать решение Блазиуса на пластине, как следствие находится и асимптотика поперечной компоненты скорости. В общем случае задача (2.1)–(2.3) может быть решена только численно.

3. Для изучения влияния вихря малой интенсивности представим решение задачи (2.1)–(2.3) при $\Gamma_1 \rightarrow 0$ в виде асимптотических разложений

$$U = U_0 + \Gamma_1 U_1 + \dots, \quad V = V_0 + \Gamma_1 V_1 + \dots$$

$$W = \Gamma_1 W_1 + \Gamma_1^2 W_2 + \dots, \quad p_2 = \Gamma_1 p_{21} + \Gamma_1^2 p_{22}$$

В результате оказывается, что течение в главном приближении для функций U_0, V_0 описывается системой уравнений, не отличающейся от плоского пограничного слоя при заданном градиенте давления

$$U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x_1} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y_1} = -p_0'(x_1) + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y_1^2}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial x_1} + \frac{\partial V_0}{\partial y_1} = 0 \quad (3.1)$$

$$U_0 = V_0 = 0, \quad y_1 = 0, \quad U_0 = u_e(x_1), \quad y_1 \rightarrow +\infty$$

В кромочной теории плоских пограничных слоев с заданным неблагоприятным градиентом давления задача (3.1) играет ключевую роль, так как помимо гладкого ее решение допускает непродолжимую особенность Гольдштейна, а иногда более слабую – продолжимую [2]. Очень важно использовать адекватную численную схему для решения (3.1), которая гарантирует достаточную точность расчета вблизи сингулярных точек. Такая специальная схема нужна и для расчета последующих приближений пограничного слоя W_1, U_1, V_1 , также содержащих особенности. Предлагается неявная расчетная схема, специально сконструированная для описанного случая.

Для удобства зададимся распределением скорости на внешней границе пограничного слоя вида

$$u_e = 1 + \alpha[1 + (x_1 - x_0)^2]^{-1}, \quad V_0 = -u_e'(x_1)y_1 + \Delta'(x_1) + \dots \quad (3.2)$$

Параметр α позволяет регулировать интенсивность неблагоприятного градиента давления.

Введем равномерную разностную сетку (x_i, y_j) и запишем уравнение импульсов в конечных разностях со вторым порядком точности в каждом узле сетки (i, j)

$$u_{i,j} \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2\Delta x} + v_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + p_{0i}' - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + 4u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (3.3)$$

Уравнение неразрывности аппроксимируем таким образом, чтобы вычислять вертикальную скорость, продвигаясь от поверхности тела, и использовать при этом уже известные значения продольной скорости в данном и двух предыдущих сечениях по x

$$v_{i,j} = v_{i,j-1} - \frac{1}{4\Delta x} \{3(u_{i,j} + u_{i,j-1}) - 4(u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1}) + u_{i-2,j} + u_{i-2,j-1}\} \quad (3.4)$$

Расчет организуем маршевым методом по продольной координате x начиная с $i = 3$, причем в каждом последующем сечении продольную скорость вначале задаем экстраполяцией

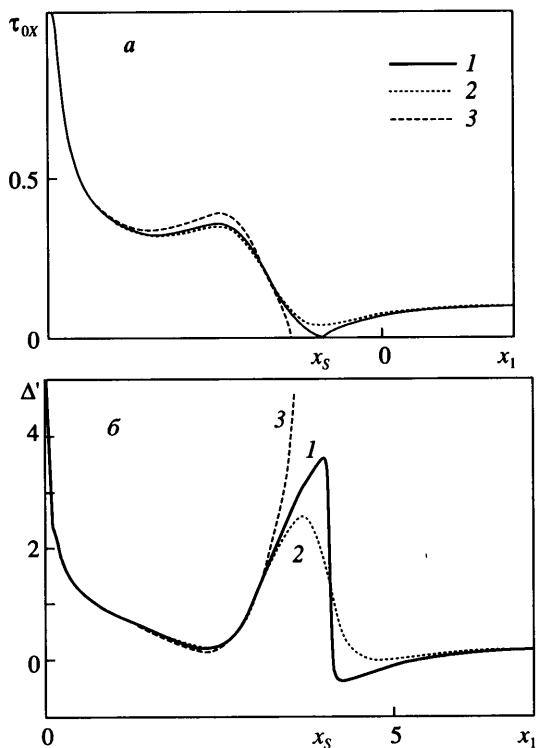
$$u_{i,j} = 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j}$$

Для вычисления решения в искомом i -м сечении введем сеточную функцию F_j , получив ее из уравнения импульсов (3.3) умножением на $(\Delta y)^2$

$$F_j = \frac{(\Delta y)^2}{2\Delta x} u_{i,j} (3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}) + \Delta y \frac{v_{i,j}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})}{2} +$$

$$+ (\Delta y)^2 p_{0i}' - u_{i,j+1} + 2u_{i,j} - u_{i,j-1} = 0, \quad j = 2, \dots, NY-1 \quad (3.5)$$

Система уравнений $F_j = 0$ есть не что иное, как нелинейная система уравнений относительно неизвестных значений продольной скорости во всех точках j . Используем метод Ньютона для



Фиг. 2. Продольное поверхностное трение τ_{0x} обращается в нуль в точке x_s при критическом значении параметра $\alpha_s = 0.09762$ (а); при $\alpha = \alpha_s$ в функции Δ' формируется скачок (б): 1–3 – $\alpha = 0.09672$; 0.09; 1.2

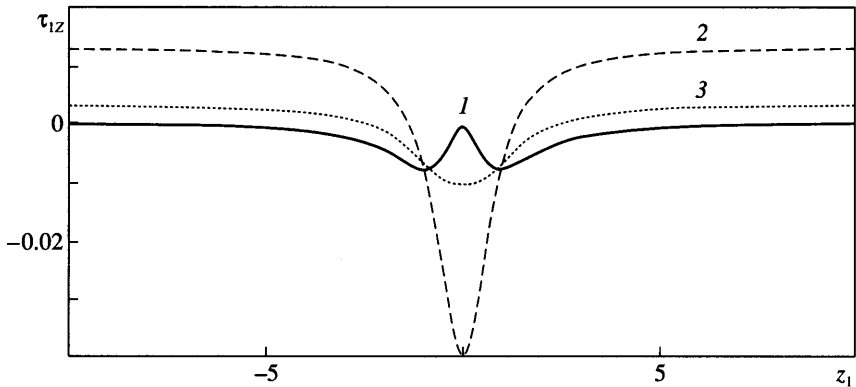
решения этой системы. Будем добиваться сходимости итераций, вычисляя поправки к решению по формуле

$$F_j^n + \left[\frac{\partial F_j}{\partial u_k} \right]_n \delta u_k = 0 \quad (3.6)$$

Заметим, что подстановка в (3.5) выражений (3.4) дает возможность аналитического вычисления матрицы Якоби на каждой n -й итерации.

На фиг. 2 представлены результаты расчета продольного напряжения трения τ_{0x} (а) и производной толщины вытеснения $\Delta'(x_1)$ (б) при значениях $\alpha = 0.09672$; 0.09; 1.2 (кривые 1–3). Число точек расчетной сетки $NX \times NY = 281 \times 301$, $\Delta x = 0.025$; $\Delta y = 0.5$. Благодаря действию положительного градиента давления, величина трения на поверхности пластины убывает и в некотором сечении достигает минимального значения. При $\alpha = \alpha_s$ минимум трения в сечении $x_1 = x_s$ обращается в нуль, во всех же остальных точках трение положительно. Решение в этом случае содержит слабую особенность в точке нулевого трения. Когда $\alpha > \alpha_s$, решение невозможно продолжить вниз по потоку, так как оно содержит непроходимую особенность Гольдштейна.

В настоящем исследовании основное внимание уделено решениям уравнений Навье–Стокса вблизи точки бифуркации по параметру α , критическое значение которого $\alpha_s = 0.09762$.



Фиг. 3. Поведение поперечного поверхностного трения τ_{1z} : 1-3 - $x = x_s$, $x = x_s/2$, $x = 1.4x_s$

Зная U_0 , V_0 , можно найти поперечную скорость W_1 , решая для нее краевую задачу

$$U_0 \frac{\partial W_1}{\partial x_1} + V_0 \frac{\partial W_1}{\partial y_1} = -u_e^2 \frac{\partial p_{21}}{\partial z_1} - \frac{1}{4\pi} p_0' + \frac{\partial^2 W_1}{\partial y_1^2}$$

$$p_{21} = -\frac{y_0'}{\pi} \frac{Z}{1+Z^2}, \quad y_0 = \frac{u_e(0)}{u_e(x_1)} \quad (3.7)$$

$$W_1 = 0, \quad y_1 = 0; \quad W_1 = u_e \left(\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+Z^2} \right), \quad y_1 \rightarrow +\infty$$

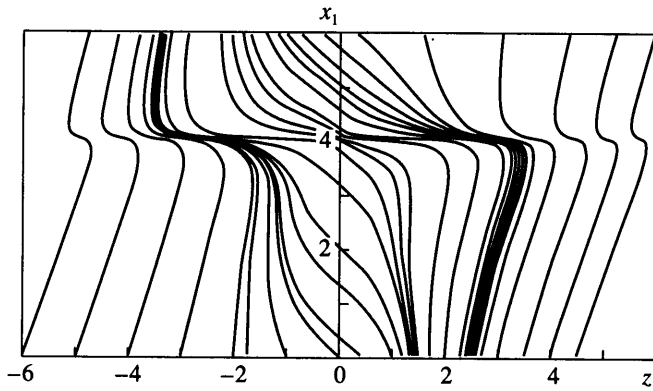
Это уравнение содержит известные коэффициенты и зависит от переменной z_1 как от параметра, начальные данные следуют из асимптотики Блазиуса вблизи передней кромки пластины. В результате ее решение может быть вычислено маршевым методом по переменной x_1 для каждого заданного значения z_1 . В силу гладкости функций, содержащихся в задаче (3.7) по переменной z_1 , следует ожидать гладкости решения $w_1(z_1)$.

На фиг. 3 приведены результаты расчета задачи (3.7) при критическом значении параметра $\alpha = \alpha_s$. Зависимость поперечного напряжения трения τ_{1z} от z_1 показана в сечении $x_1 = x_s$ (кривая 1), а также на некоторых расстояниях от него. Для наглядности на фиг. 4 представлены линии поверхностного трения, которые описываются уравнением

$$\frac{dx_1}{\tau_{0x}} = \frac{dz_1}{\tau_{1z}}$$

В силу асимптотически малых значений поперечного трения масштаб изображения вытянут по переменной z_1 . Вблизи линии нулевого продольного трения $x_1 = x_s$ предельные линии тока содержат точки перегиба. Отметим заметное сгущение линий тока в левой части фиг. 4, что в определенном смысле означает линию стекания или, скорее, ее формирование. Аналог же линии растекания в правой части усмотреть трудно.

Приближение U_1 , V_1 для уравнений пограничного слоя можно получить, решая соответствующую краевую задачу маршевым методом для каждого значения z_1 , при уже



Фиг. 4. Картина линий поверхностного трения для трехмерного пограничного слоя в присутствии слабого вихря

вычисленных функциях U_0 , V_0 и W_1

$$U_0 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_1 \frac{\partial U_0}{\partial x_1} + V_0 \frac{\partial U_1}{\partial y_1} + V_1 \frac{\partial U_0}{\partial y_1} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial y_1^2}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_1}{\partial z_1} = 0$$

(3.8)

$$U_1 = V_1 = 0, \quad y_1 = 0; \quad U_1 = 0, \quad y_1 \rightarrow +\infty$$

$$U_1 = 0, \quad x_1 = 0$$

Несмотря на то что эта линейная система уравнений имеет нулевые краевые условия, решение ее нетривиально, так как второе уравнение в (3.8) содержит неоднородность в виде уже вычисленного вынуждающего члена $\partial W_1 / \partial z_1$.

Отметим, что решение задачи (3.8) содержит важную особенность, такую же, как и в двумерной кромочной теории, а именно возмущение продольного трения ведет себя особым образом при $x_1 \rightarrow x_S$

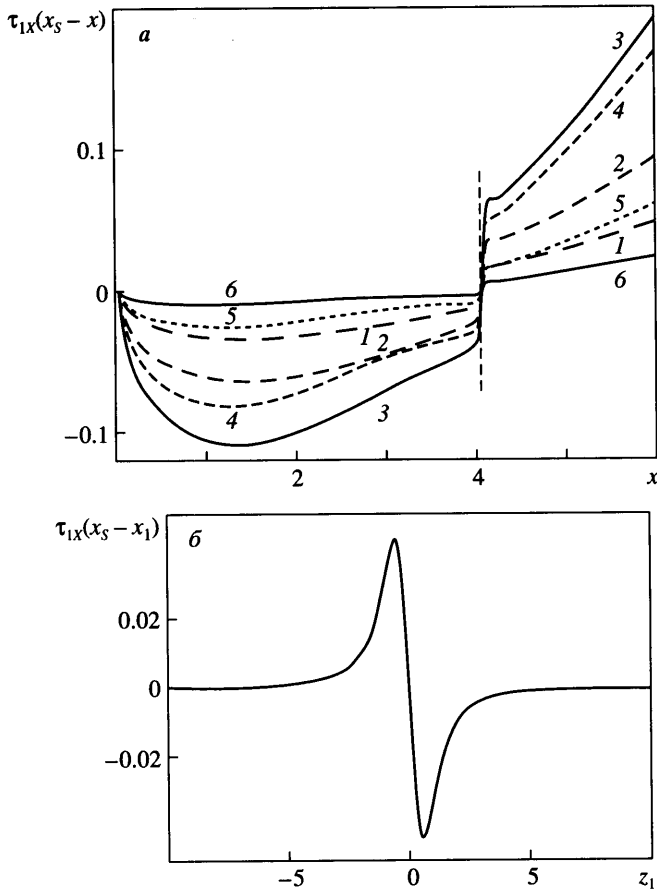
$$\left[\frac{\partial U_1}{\partial y_1} \right]_{y_1=0} = \frac{0.5\tau(z_1)}{x_S - x_1} + \dots$$

(3.9)

Приведенные на фиг. 5 результаты расчетов подтверждают такое сингулярное поведение возмущенного продольного трения при приближении к точке x_S . Графики $\tau_{1x}(x_S - x_1)$ (а) в зависимости от x_1 для набора значений координаты z_1 имеют конечные пределы при $x_1 \rightarrow x_S \pm 0$. Функция $\tau(z_1)$, полученная в расчетах, оказалась знакопеременной (б).

В плоских течениях особенность такого типа явилась причиной построения самой теории кромочного отрыва со взаимодействием. Естественно предположить, что в пространственном случае возникает схожий эффект.

4. Расчеты уравнений пограничного слоя при воздействии на течение слабой вихревой нити показывают, что вязкие возмущения малы во всей области от начала пластины и вплоть до малой окрестности точки нулевого продольного трения. При этом поперечная координата оказывается параметром во всех сформулированных и решен-



Фиг. 5. Сингулярное поведение возмущения продольного трения $\tau_{1x}(x_S - x_1)$ (а) при приближении к точке x_S в разных поперечных сечениях z : 1–6 – $z_1 = 0.1; 0.2; 0.6; 1; 2; 3$; поведение функции $\tau(z_1) = \tau_{1x}(x_S - x_1)$ из формулы (3.9) вблизи точки нулевого трения (б)

ных линейных задачах. В результате пространственное течение проявляет свойства, очень близкие к описанным двумерной кромочной теорией. Введенный в (3.9) коэффициент τ перед сингулярной собственной функцией зависит от координаты z_1 и затухает при $|z_1| \rightarrow \infty$. В то же время в плоском случае этот коэффициент означал нормированное отклонение угла атаки профиля от критического значения и задавался в качестве параметра. При решении задачи (3.1) был найден этот критический параметр $\alpha = \alpha_S$ для данного двумерного течения. Из расчетов следует, что возмущать критическое решение можно двумя независимыми способами: варьируя параметр α вблизи α_S при $\Gamma_1 = 0$ или задавая ненулевую циркуляцию вихревой нити при $\alpha = \alpha_S$. Результаты оказываются схожими – в пограничном слое развиваются возмущения, имеющие сингулярность при $x_1 \rightarrow x_S$. Следуя рассуждениям [2], укажем решение уравнений пограничного слоя в малой окрестности точки $x_1 = x_S$ при $\alpha \rightarrow \alpha_S$ и $\Gamma_1 \rightarrow 0$. Полагаем $\Delta\alpha \sim \Gamma_1$, тогда в приведенных переменных напряжение продольного трения принимает вид

$$A = \sqrt{(x_1 - x_S)^2 - \Delta\alpha - \Gamma_1 \tau(z_1)} \quad (4.1)$$

При $\Gamma_1 = 0$ указанное решение в точности совпадает с двумерным. Удобно анализировать поведение функции A , начиная с безотрывных режимов, т.е. полагая $\Delta\alpha < 0$. В этом случае напряжение продольного трения будет всюду положительным, но, по мере роста циркуляции, у функции A появится локальный минимум. Оказывается, что для заданного $\Delta\alpha$ можно подобрать такое значение Γ_1 , при котором продольное трение обращается в нуль в изолированной точке и в главном приближении решение будет

$$A = \sqrt{(x_1 - x_s)^2 + c(z_1 - z_s)^2} + \dots, \quad c > 0$$

Решение такого вида было использовано при расчетах течения со взаимодействием в [12] в качестве граничных условий. Заметим, что если Γ_1 возрастает далее, то подкоренное выражение в (4.1) становится отрицательным в некоторой замкнутой области и функция A в ней не определена. Если же в области существования решения нарисовать предельные линии тока на обтекаемой поверхности, то окажется, что граница области недоступности является огибающей этих линий. Само решение вблизи огибающей – это своеобразный трехмерный аналог двумерной особенности Гольдштейна.

На этом этапе, чтобы построить гладкое решение для ключевой функции $A(x, z)$, естественно ввести область взаимодействия течения в пограничном слое с внешним потенциальным потоком. Наиболее просто рассмотреть квадратную область, продольный размер которой Δx совпадает с поперечным h и является величиной порядка $Re^{-1/5}$. Полное уравнение взаимодействия для функции $A(x, z)$ при таких предположениях впервые было выписано в [14], более подробный обзор см. в [17]. В изучаемом случае краевая задача для кромочной области взаимодействия примет вид

$$A^2 - x^2 + k + \gamma\tau(z) = - \int_{-\infty}^x \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \int_{-\infty}^t \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} du \right) \frac{dt}{\sqrt{x-t}}$$

$$p(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_{\xi\xi}(\xi, \infty) - A_{\xi\xi}(\xi, \zeta)}{((x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2)^{1/2}} d\xi d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_{\xi}(\xi, \infty)}{x-\xi} d\xi \quad (4.2)$$

$$A = A(x, \infty), \quad |z| \rightarrow \infty; \quad A = x + \dots, \quad x \rightarrow +\infty$$

$$A = -x + \frac{k + \gamma\tau(z)}{2x} + \dots, \quad x \rightarrow -\infty$$

В задаче введены параметр k , регулирующий силу неблагоприятного двумерного градиента давления

$$\alpha = \alpha_s + kRe^{-2/5} d$$

и нормированная величина циркуляции вихревой нити γ

$$\Gamma = h^2 d Re^{-2/5} \gamma = d Re^{-4/5} \gamma; \quad d = \text{const}$$

Кромочный режим взаимодействия реализуется в окрестности точки минимума поверхностного трения, причем величина минимума асимптотически мала. Этот факт означает весьма узкие и специальные рамки применимости кромочной теории отрыва.

В настоящем исследовании ставится вопрос о возможности отрыва "более" присоединенного двумерного пограничного слоя, минимум трения которого не настолько мал и постулаты кромочной теории взаимодействия не применимы в полном объеме. Оказывается, что для таких более присоединенных пограничных слоев можно ввести вытянутую в продольном и суженную в поперечном направлениях область взаимодей-

ствия, в отличие от обычного кромочного режима (4.2). Взаимодействие в указанном случае носит специфичный характер и описано, например, в [18]. В вязкой зоне области взаимодействия продольный градиент давления выпадает и остается только поперечная его составляющая. В потенциальной же зоне области взаимодействия решение отыскивается в рамках теории тонкого тела.

В данной постановке задача содержит произвольный параметр $\Delta\alpha \gg \text{Re}^{-2/5}$. Однако более удобно работать с характерной длиной изучаемой области $\delta = |\Delta\alpha|^{1/2}$ как с параметром. Поперечный размер $h \ll \delta$ находится однозначно из требования, чтобы индуцированное давление $p_i \sim \text{Re}^{-1/2} h \delta^{-1}$ воздействовало на течение в вязком подслое области взаимодействия

$$h = \text{Re}^{-1/2} \delta^{-3/2}, \quad \text{Re}^{-1/5} \ll \delta \ll 1, \quad \text{Re}^{-1/5} \gg h \gg \text{Re}^{-1/2}$$

Опуская промежуточные выкладки, традиционные для теории кромочного отрыва, выпишем задачу для искомой функции $A(x, z)$ в приведенных переменных

$$A^2 - x^2 + k + \gamma\tau(z) = - \int_{-\infty}^x \frac{dt}{\sqrt{x-t}} \int_{-\infty}^t \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} du$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^3 A}{\partial x^2 \partial \zeta} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad (4.3)$$

$$A = \sqrt{x^2 - k}, \quad |z| \rightarrow \infty; \quad A = -x + \frac{k + \gamma\tau(z)}{2x} + \dots, \quad x \rightarrow -\infty$$

В задаче указаны краевые условия по поперечной координате и начальные данные. Вопрос о постановке граничных условий вниз по потоку требует дополнительных исследований. С этой целью проведем линейный анализ интегродифференциального уравнения (4.3). Полагая $k = 0$ и $\gamma \rightarrow 0$, ищем решение в виде

$$A = -x + \gamma A_1 + \dots$$

После подстановки находим уравнение относительно A_1

$$-2xA_1 + \tau(z) = - \int_{-\infty}^x \frac{dt}{\sqrt{x-t}} \int_{-\infty}^t \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} du \quad (4.4)$$

Используем для решения преобразование Фурье, предполагая, что фурье-образ $\tau(z)$ существует

$$p^* = \int_{-\infty}^{\infty} p e^{-i\omega z} dz, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right)^* = |\omega| (A''_{xx})^*$$

Уравнение (4.4) принимает вид линейного неоднородного интегрального уравнения типа Вольтерра по переменной x

$$-2xA_1^* + \tau^* = -|\omega| \int_{-\infty}^x \frac{(A'_{1t})^* dt}{\sqrt{x-t}}$$

Его решение однозначно выписывается в интегральной форме

$$A_1^* = -\frac{\tau^*}{2} \int_0^{+\infty} \exp \left[-\frac{|\omega| \sqrt{\pi}}{3} k^{3/2} + xk \right] dk$$

Однородный оператор не содержит затухающих решений при $x \rightarrow -\infty$.

Таким образом, найденные гармоники не допускают затухающих собственных функций вверх по потоку, из чего следует, что решение обладает параболическими свойствами. Этот факт дает возможность рассчитывать нелинейное уравнение маршевым методом, используя заданные начальные и граничные данные.

5. Перед численным интегрированием удобно преобразовать уравнение взаимодействия к виду

$$\int_{-\infty}^x \frac{A^2 - t^2 - 1 + \gamma\tau(z)}{\sqrt{x-t}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial A}{\partial u} \frac{du}{u-z} \tag{5.1}$$

$$A = \sqrt{x^2 + 1}, \quad |z| \rightarrow \infty; \quad A = -x + \frac{-1 + \gamma\tau(z)}{2x} + \dots, \quad x \rightarrow -\infty$$

Для определенности в (5.1) зададим значение параметра $k = -1$, это соответствует безотрывному поведению пограничного слоя на границах рассматриваемой области течения. Циркуляция γ остается единственным параметром, влияющим на решение.

Учитывая полученное при расчетах пограничного слоя поведение функции $\tau(z)$ (фиг. 5, б), зададим ее вид удобной аналитической формулой

$$\tau(z) = \frac{x}{4+z^4}$$

Обе части уравнения (5.1) содержат интегралы с сингулярными ядрами, поэтому обычные формулы для аппроксимации этих интегралов типа формулы трапеций, дают результат, неравномерно зависящий от размера отрезка интегрирования. Верный способ вычисления таких интегралов – разбить область интегрирования на малые отрезки, на каждом таком отрезке искомую функцию представить разложением Тейлора и получившиеся выражения проинтегрировать аналитически с учетом вида ядра. Результат будет зависеть от дифференциальных свойств самой функции, но не ядра. Рассмотрим вначале аппроксимацию интеграла типа Коши в правой части (5.1) с равномерным шагом Δz и запишем его значение в точке (x_k, z_i)

$$I_k(z_i) = \int_{z_1}^{z_{\max}} \frac{\partial A}{\partial t} \frac{dt}{t-z_i} = \sum_{j=1}^{i_{\max}-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} F_{ij}, \quad F_{ij} = \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{\partial A}{\partial t} \frac{dt}{t-z_i}$$

Далее представим производную в подинтегральном выражении в виде разложения Тейлора в точке z_{j+1} и определим F_{ij}

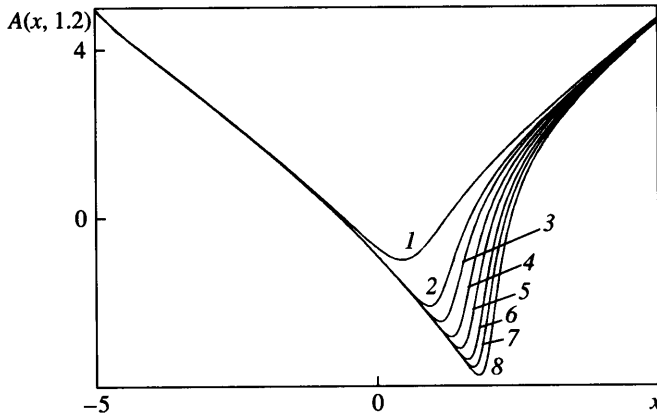
$$\frac{\partial A}{\partial t} = A'_{j+1} + A''_{j+1}(t-z_{j+1}) + \dots, \quad 1 \leq j \leq i-1, \quad i = 2 - i_{\max} - 1$$

$$F_{ij} = (A'_{j+1} + A''_{j+1}(z_i - z_{j+1})) \ln \frac{z_i - z_{j+1}}{z_i - z_j} + A''_{j+1} \Delta z$$

Аналогично в точке z_j

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A'_j + A''_j(t-z_j) + \dots, \quad i \leq j \leq i_{\max} - 1$$

$$F_{ij}^0 = (A'_j + A''_j(z_i - z_j)) \ln \frac{z_{j+1} - z_i}{z_j - z_i} + A''_j \Delta z$$



Фиг. 6. Поведение функции $A(x, z)$ при $z = 1.2$ при различных значениях циркуляции: $\gamma = 15; 15.64; 15.648; 15.649; 15.64908; 15.64909; 15.649091; 15.6490912$ (1–8)

Таким образом, интеграл в правой части (5.1) в конечных разностях записывается в виде

$$I_k(z_i) = \sum_{j=2}^{i-2} F_{ij} + 2A_i'' \Delta z + \sum_{j=i+1}^{i_{\max}-1} F_{ij}^0, \quad 3 \leq i \leq i_{\max} - 2 \quad (5.2)$$

Интеграл в левой части (5.1) также представим в виде суммы интегралов по элементарным отрезкам

$$M_i(x_k) = \int_{x_1}^{x_k} \frac{G dt}{\sqrt{x_k - t}} = \sum_{l=1}^{k-1} \int_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{G dt}{\sqrt{x_k - t}}$$

Разложив функцию G в ряд Тейлора в средней точке каждого отрезка до линейного члена включительно и взяв интегралы аналитически, получим формулу

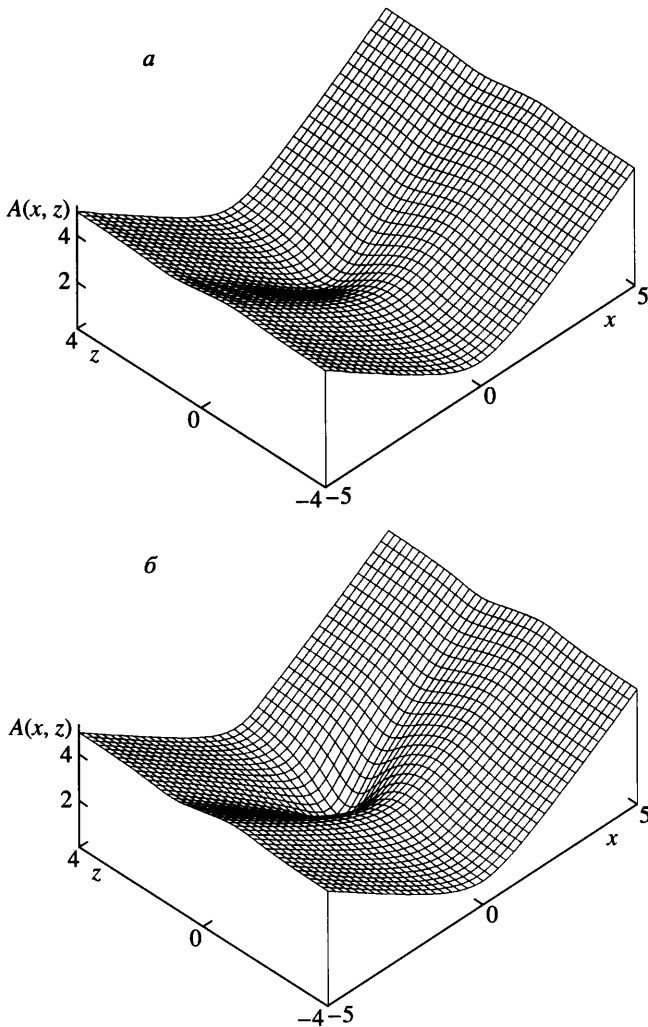
$$M_i(x_k) = \sum_{l=1}^{k-1} \left[\left(G_l^i + G_{l+1}^i + \frac{2}{\Delta x} (G_{l+1}^i - G_l^i) \left(x_k - \frac{x_l + x_{l+1}}{2} \right) \right) (\sqrt{x_k - x_l} - \sqrt{x_k - x_{l+1}}) + \frac{2}{3\Delta x} (G_{l+1}^i - G_l^i) ((x_k - x_{l+1})^{3/2} - (x_k - x_l)^{3/2}) \right] \quad (5.3)$$

При расчете интегрального уравнения маршевым методом по переменной x используем метод Ньютона для решения нелинейной дискретной системы уравнений в каждом сечении x_k : $\Phi_i = I_k(z_i) - M_i(x_k) = 0$. Для достижения наибольшей скорости сходимости вычисляем поправки в соответствии с формулой Ньютона

$$\Phi_i^m + \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial A_j} \right]_m \delta A_j = 0$$

где I_k, M_i вычисляются по формулам (5.2)–(5.3), m – номер итерации.

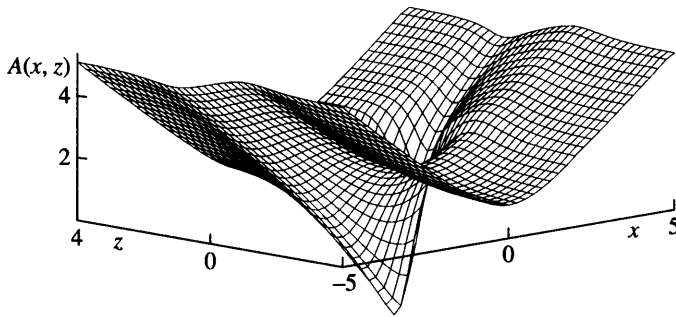
Расчеты выполнялись с постоянным шагом 0.1 по переменной z , число точек расчетной сетки составляло 201, размеры области – (–10, 10). По переменной x шаг под-



Фиг. 7. Пространственное изображение функции $A(x, z)$ в случае: *a* – слабовозмущенного присоединенного течения при $\gamma = 10$ и *б* – отрывного течения при $\gamma = 15$

бирался в процессе расчета в зависимости от дифференциальных свойств искомой функции и находился в пределах (0.001–0.1), размеры области – (–10, 10). В каждом сечении по переменной x решение находилось с погрешностью не более 10^{-7} . Для проверки точности полученных результатов проводился тест по уменьшению шага Δz вдвое при фиксированных размерах области, а также при исходном значении шага Δz вдвое увеличивались размеры расчетной области по x и z . В обоих случаях разница в результатах расчетов находилась в пределах ошибки аппроксимации исходного уравнения.

Результаты численных расчетов интегрального уравнения для поверхностного трения $A(x, z)$ при различных значениях циркуляции γ представлены на фиг. 6. Для наглядности на графике приведены кривые 1–8 в точке $z = 1.2$. Оказывается, что при малых значениях циркуляции течение безотрывно, с ее увеличением трение падает и при не-



Фиг. 8. Изометрическая проекция функции $A(x, z)$ при критическом значении циркуляции $\gamma_* = 15.6490912$, вид снизу

котором γ обращается в нуль. При дальнейшем увеличении циркуляции появляется область возвратного продольного течения. Однако решение, существующее во всей плоскости (x, z) , удастся построить только при $\gamma \leq \gamma_* = 15.6490912$. При больших значениях циркуляции маршевый расчет наталкивается на особенность в конечной точке по x . Пространственный характер функции A и ее эволюция в зависимости от величины циркуляции демонстрируются на фиг. 7. Наглядно видно формирование глубокой впадины с ростом циркуляции (фиг. 8). Такое поведение означает, что струйки тока, приходящие в область отрицательного продольного трения, закручиваются и одновременно сносятся в сторону, постепенно уходя вниз по потоку. Отметим отличие трехмерного отрывного течения от плоского: отсутствует замкнутая область, содержащая изолированные жидкие частицы. Весь эффект отрыва заключается в немонотонности поведения траекторий жидких частиц.

Заключение. Установлено, что влияние слабой вихревой нити на достаточно присоединенный двумерный пограничный слой носит радикальный характер. При определенной амплитуде малых вязких возмущений, порожденных вихрем, взаимодействие не позволяет продолжить решение вниз по потоку далее некоторой точки. Такой факт означает кардинальную перестройку течения и, по-видимому, выброс завихренности за пределы пограничного слоя. Естественно предположить зарождение вихревой пелены в данной точке.

Авторы благодарят А.В. Зубцова за большое внимание к работе и ряд полезных высказанных замечаний.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 99-01-00853).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sychev V.V., Ruban A.I., Sychev Vic.V., Korolev G.L. Asymptotic Theory of Separated Flows. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. 334 p.; Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик.В. и др. Асимптотическая теория отрывных течений / Под ред. В.В. Сычева. М.: Наука, 1987. 256 с.
2. Рубан А.И. Особое решение уравнений пограничного слоя, непрерывно продолжимое через точку нулевого поверхностного трения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 6. С. 42–52.
3. Рубан А.И. Асимптотическая теория коротких зон отрыва на передней кромке тонкого профиля // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 42–51.
4. Stewartson K., Smith F.T., Kaups K. Marginal separation // Stud. Appl. Math. 1982. V. 67. № 1. P. 45–61.

5. *Brown S.N., Stewartson K.* On an integral equation of marginal separation // *SIAM J. Appl. Math.* 1983. V. 43. № 5. P. 1119–1126.
6. *Заметаев В.Б.* Существование и неединственность локальных зон отрыва в вязких струях // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1986. № 1. С. 38–45.
7. *Brown S.N.* Marginal separation of a three-dimensional boundary layer on a line of symmetry // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 158. P. 95–111.
8. *Заметаев В.Б.* Особое решение уравнений пограничного слоя на тонком конусе // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1987. № 2. С. 65–72.
9. *Заметаев В.Б.* Локальный отрыв на тонком конусе, предшествующий появлению вихревой пелены // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1987. № 6. С. 21–28.
10. *Заметаев В.Б.* Формирование особенностей в пространственном пограничном слое // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1989. № 2. С. 58–64.
11. *Zametaev V.B.* Marginal separation in three-dimensional flows // *Theoret. Comput. Fluid Dynamics.* 1996. V. 8. № 3. P. 183–200.
12. *Duck P.W.* Three-dimensional marginal separation // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 202. P. 559–575.
13. *Hackmüller G., Kluwick A.* The effect of a surface mounted obstacle on marginal separation // *Z. Flugwiss. Weltraumforsch.* 1989. Bd 13. H. 6. S. 365–370.
14. *Hackmueller G., Kluwick A.* Effects of 3-D surface mounted obstacles on marginal separation // *Separated Flows and Jets / Eds V.V. Kozlov, A.V. Dovgal.* Berlin: Springer, 1991. P. 55–65.
15. *Заметаев В.Б., Сычев Вик. В.* О трехмерном отрыве около неровности на поверхности тела вращения // *Изв. РАН. МЖГ.* 1995. № 3. С. 67–79.
16. *Braun S., Kluwick A.* Two- and three-dimensional marginal separation of laminar, incompressible viscous jets // *ZAMM.* 2000. V. 80. Suppl. 3. S623–S624.
17. *Kluwick A.* Interacting laminar and turbulent boundary layers // *Recent Advances in Boundary Layer Theory / Ed. A. Kluwick.* Wien: Springer, 1998. P. 231–330.
18. *Рожко С.Б., Рубан А.И.* Продольно-поперечное взаимодействие в трехмерном пограничном слое // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1987. № 3. С. 42–50.

Москва

Поступила в редакцию
4.VI.2001