

УДК 532.516 + 532.591

© 2003 г. Д. Ф. БЕЛОНОЖКО, А. И. ГРИГОРЬЕВ

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Предложено асимптотическое решение задачи о временной эволюции формы периодической волны на поверхности вязкой бесконечно глубокой жидкости в квадратичном по амплитуде волны приближении.

*Ключевые слова:* гравитационно-капиллярные волны, нелинейные волны, вязкая жидкость.

Несмотря на длительную историю изучения нелинейных периодических волн на поверхности жидкости, аналитические исследования различных вариантов задачи о распространении линейной гравитационно-капиллярной волны проводятся только в приближении идеальной жидкости (см., например, [1–5] и указанную там литературу). В то же время очевидно, что корректный учет вязкости в такой задаче может привести к обнаружению многих интересных физических эффектов. В связи со сказанным ниже приводится аналитический вывод выражения, описывающего распространение нелинейной периодической гравитационно-капиллярной волны на поверхности ньютоновой жидкости произвольной вязкости.

**1. Математическая формулировка задачи.** Пусть в декартовой системе координат  $x, y, z$  несжимаемая жидкость с плотностью  $\rho$ , кинематической вязкостью  $\nu$ , и поверхностным натяжением  $\gamma$  заполняет полупространство  $z \leq 0$  и находится в поле тяжести  $\mathbf{g}$ , направленном против оси  $z$ . Внешнее по отношению к жидкости давление постоянно и равно  $P_0$ . Требуется найти формы профиля волны, которая свободно распространяется по поверхности жидкости.

Движение жидкости будем считать не зависящим от координаты  $y$ . Пусть  $u = u(x, z, t)$  и  $v = v(x, z, t)$  – горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей, а  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_z$  – орты горизонтали и вертикали. Тогда профиль волны  $\xi = \xi(x, t)$  и поле скоростей  $\mathbf{U} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_z$  должны быть решением начально-краевой задачи

$$\partial_t \mathbf{U} - \mathbf{U} \times \text{rot} \mathbf{U} = -\text{grad} \left( \frac{1}{\rho} p + \frac{U^2}{2} + gz \right) + \nu \Delta \mathbf{U} \quad (1.1)$$

$$\text{div} \mathbf{U} = 0 \quad (1.2)$$

$$z = \xi: \partial_t \xi + u \partial_x \xi = v \quad (1.3)$$

$$p - 2\rho \nu \mathbf{n}((\mathbf{n} \nabla) \mathbf{U}) - P_0 = \gamma \text{div} \mathbf{n} \quad (1.4)$$

$$\tau((\mathbf{n} \nabla) \mathbf{U}) + \mathbf{n}((\tau \nabla) \mathbf{U}) = 0 \quad (1.5)$$

$$z \rightarrow -\infty: \mathbf{U} \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

$$t = 0: \xi = F(x) \quad (1.7)$$

$$z \leq \xi: \mathbf{U} = \mathbf{U}^\circ = \mathbf{U}^\circ(x, z) = u^\circ(x, z)\mathbf{e}_x + v^\circ(x, z)\mathbf{e}_z \quad (1.8)$$

Здесь  $t$  – время, символы  $\partial_t$  и  $\partial_x$  обозначают операцию взятия частных производных по времени и координате,  $\tau$  и  $n$  – орты касательной и нормали к поверхности.

**2. Трудность выбора корректного начального условия.** Соотношение (1.8) – общий вид начального условия для задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости [6] (гл. 2, § 6). В связи с изменяемостью свободной поверхности его естественно дополнить условием (1.7), определяющим начальную форму области, в которой рассчитывается поле скоростей. С точки зрения механики, (1.1)–(1.6) есть система уравнений движения набора материальных частиц, взаимодействующих за счет внутренних сил при наличии внешнего потенциального поля силы тяжести. Начальными условиями для такой системы являются начальные положения и скорости частиц. Из (1.7) можно определить положения всех жидких частиц (они расположены при  $z \leq \xi$ ), а (1.8) задает поле начальных скоростей.

Степень сложности задачи (1.1)–(1.8) тесно связана с видом функций  $F(x)$ ,  $u^\circ(x, z)$  и  $v^\circ(x, z)$ , входящих в начальные условия. Можно попытаться поступить с начальными условиями так же, как это сделано при моделировании нелинейных колебаний капли в [7], где задача упрощена, благодаря двум свойствам начального условия. Во-первых, в начальный момент времени во всей капле скорость считалась равной нулю. Во-вторых, начальное отклонение формы капли от равновесной в точности совпадало с деформацией, вызванной одной-единственной модой, в качестве которой была выбрана основная как наиболее легко возбуждающаяся при реализации различных неустойчивостей.

Если применить первое из перечисленных положений к анализируемой проблеме, то при анализе линеаризованного варианта задачи получится решение в виде стоячей волны. Это не то решение, которое хотелось бы исследовать. Значит, начальное условие такого вида для наших целей не годится и в начальный момент нельзя положить  $U^\circ = 0$ .

Воспользуемся вторым из упомянутых положений. В задаче о распространении волны роль основной моды играет волна с волновым числом  $k$ , определяющимся капиллярной постоянной жидкости. Можно попробовать взять в качестве начального отклонения синусоиду  $\xi = a \cos(kx)$ , как это сделано в [8]. Но тогда построенное решение не будет продолжением простейшей теории волн конечной амплитуды на поверхности невязкой тяжелой жидкости (второе приближение для волн Стокса). Действительно, согласно [9], (§ 250), для произвольного волнового числа  $k$  в приближении гравитационных волн по поверхности невязкой жидкости могут свободно распространяться волны с профилем специального вида, который с ошибкой порядка  $(a/\lambda)^3$  описывается соотношением

$$\xi = \frac{1}{2}ka^2 + a \cos \theta + \frac{1}{2}ka^2 \cos 2\theta \quad (2.1)$$

$$\theta = k(x - ct), \quad c^2 = c_k^2(1 + k^2a^2), \quad c_k^2 = \frac{g}{k}$$

Выражение (2.1) справедливо, если вязкость равна нулю. Первое слагаемое в (2.1) связано с выбором нулевого уровня, от которого отсчитывается вертикальная координата. Если уравнение невозмущенной поверхности имеет вертикальную координату  $(1/2)ka^2$ , то проще становится выражение для потенциала. Если задача формируется так, что невозмущенная свободная поверхность проходит через начало координат, то первое слагаемое в (2.1) пропадает [3].

В случае решения Стокса под свободно распространяющейся волной в системе координат, двигающейся с этой волной, понимается периодический профиль, неизменный во времени. В такой системе отсчета задача становится стационарной и надобность в начальных условиях отпадает. Из (2.1) видно, что свободно распространяющаяся волна на поверхности идеальной жидкости в любой момент времени отлична от синусоиды.

Таким образом, бегущая волна на плоской поверхности идеальной жидкости и осцилляции капли идеальной жидкости – далеко не аналогичные явления. Капля может осциллировать так, что существует момент времени, когда ее форма описывается одной-единственной модой, а свободная волна в идеальной жидкости распространяется таким образом, что в уравнении, описывающем ее форму, в любой момент времени присутствует добавка второго порядка малости, имеющая такую же фазовую скорость, но с длиной волны вдвое меньшей, чем у основной моды.

Кроме перечисленных нюансов, возникающих при формулировке начального условия, непонятно, какое начальное условие можно назвать "условием свободного распространения волны". Определение, принятое для идеальной жидкости (волна, распространяющаяся без изменения формы), в данном случае не годится, поскольку амплитуда волны в вязкой жидкости должна уменьшаться со временем.

Из сказанного следует, что выбор начального условия оказывается весьма непростым вопросом. Имеет смысл придерживаться следующей стратегии. Начальный профиль и поле скоростей исходно не конкретизируются, но по мере формулировки задач различных порядков малости будет решено, какими должны быть эти функции, чтоб аналитическое решение задачи имело наиболее простой вид. Фактически исходная задача будет решена для определенного типа начальных условий, которые, в свою очередь, определятся в процессе решения.

**3. Выделение задач различных порядков малости.** Пусть начальное возмущение периодически по  $x$  и образует волнообразный рельеф с длиной волны  $\lambda = 2\pi/k$  и амплитудой  $a$ . Применение методов возмущений к задачам подобного типа подразумевает обезразмеривание переменных. Его можно выполнить по-разному. Не останавливаясь на конкретном способе обезразмеривания, введем малый безразмерный параметр  $\epsilon = ka$ , имеющий одно и то же значение при любом обезразмеривании. Далее все соотношения будут записаны в размерном виде, подразумевающим возможность перехода к безразмерной форме записи на любом этапе, посредством выбора любых трех переменных с независимыми размерностями за параметры обезразмеривания.

Считая  $\epsilon$  малым, решение задачи (1.1)–(1.8) будем искать в виде

$$U = U_1 + U_2 + O(\epsilon^3), \quad U_1 = O(\epsilon), \quad U_2 = O(\epsilon^2)$$

$$p = p_0 + p_1 + p_2 + O(\epsilon^3), \quad p_0 = O(1), \quad p_1 = O(\epsilon), \quad p_2 = O(\epsilon^2) \quad (3.1)$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + O(\epsilon^3), \quad \xi_1 = O(\epsilon), \quad \xi_2 = O(\epsilon^2)$$

Допустим, что начальный профиль возмущения свободной поверхности  $F(x)$  можно представить выражением

$$F = F_1 + F_2 + O(\epsilon^3), \quad F_1 = \epsilon k^{-1} \cos kx, \quad F_2 = O(\epsilon^2) \quad (3.2)$$

а начальное поле скоростей имеет асимптотическое представление

$$U^\circ = U_1^\circ + U_2^\circ + O(\epsilon^3), \quad U_1^\circ = O(\epsilon), \quad U_2^\circ = O(\epsilon^2) \quad (3.3)$$

Непосредственная подстановка (3.1) в (1.1) и (1.2) приводит к задачам нулевого, первого и второго порядков малости для этих уравнений.

В нулевом приближении нетривиальным остается единственное соотношение

$$p_0 = P_0 - \rho g z \quad (3.4)$$

При интегрировании (1.1) в этом приближении величина  $p_0$  оказывается определенной с точностью до прибавления произвольной функции времени, которая в (3.4) выбрана за константу так, чтоб при  $z = 0$  выполнялось равенство  $p_0 = P_0$ .

Для величин первого по  $\varepsilon$  порядка малости получится задача

$$\partial_t \mathbf{U}_1 + \text{grad}\left(\frac{1}{\rho} p_1\right) - \nu \Delta \mathbf{U}_1 = 0 \quad (3.5)$$

$$\text{div} \mathbf{U}_1 = 0 \quad (3.6)$$

$$z = 0: \partial_t \xi_1 - v_1 = 0 \quad (3.7)$$

$$-\rho g \xi_1 + p_1 - 2\rho \nu \partial_z v_1 + \gamma \partial_{xx} \xi_1 = 0 \quad (3.8)$$

$$\partial_x v_1 + \partial_z u_1 = 0 \quad (3.9)$$

$$z \rightarrow -\infty: u_1 \rightarrow 0, \quad v_1 \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

$$t = 0: \xi_1 = \varepsilon k^{-1} \cos kx \quad (3.11)$$

$$z \leq 0: \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_1^\circ \quad (3.12)$$

Полная математическая формулировка задачи второго порядка малости имеет вид

$$\partial_t \mathbf{U}_2 + \text{grad}\left(\frac{1}{\rho} p_2\right) - \nu \Delta \mathbf{U}_2 = -\frac{1}{2} \text{grad}(\mathbf{U}_1^2) + \mathbf{U}_1 \times \text{rot} \mathbf{U}_1 \quad (3.13)$$

$$\text{div} \mathbf{U}_2 = 0 \quad (3.14)$$

$$z = 0: \partial_t \xi_2 - v_2 = \xi_1 \partial_z v_1 - u_1 \partial_x \xi_1 \quad (3.15)$$

$$-\rho g \xi_2 + p_2 - 2\rho \nu \partial_z v_2 + \gamma \partial_{xx} \xi_2 = 2\rho \nu \xi_1 \partial_{zz} v_1 - \xi_1 \partial_z p_1 \quad (3.16)$$

$$\partial_x v_2 + \partial_z u_2 = -4\partial_z v_1 \partial_x \xi_1 - \xi_1 \partial_z (\partial_x v_1 + \partial_z u_1) \quad (3.17)$$

$$z \rightarrow -\infty: u_2 \rightarrow 0, \quad v_2 \rightarrow 0 \quad (3.18)$$

$$t = 0: \xi_2 = F_2(x) \quad (3.19)$$

$$z \leq 0: \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_2^\circ \quad (3.20)$$

**4. Решение задачи первого порядка малости.** Пространственно периодически решенные задачи первого порядка малости (3.5)–(3.12) хорошо известно и имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a \cos \theta \exp 2T \\ u_1 &= a((S_I \exp l - 2\nu k(q_I \cosh h + q_R \sinh h) \exp L) \cos \theta + \\ &+ (D \exp l - 2\nu k(q_R \cosh h - q_I \sinh h) \exp L) \sin \theta) \exp T \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= a((D \exp l - 2\nu k^2 \cosh h \exp L) \cos \theta - \\ &- (S_I \exp l - 2\nu k^2 \sinh h \exp L) \sin \theta) \exp T \end{aligned}$$

Выражения (4.1) записаны с использованием вспомогательных переменных, используемых и в дальнейшем

$$q^2 = k^2 + \frac{S}{v}, \quad \Omega_R = \operatorname{Re}(\Omega), \quad \Omega_I = \operatorname{Im}(\Omega), \quad \Omega = S, q, \quad l = kz, \quad (4.2)$$

$$L = q_R z, \quad h = q_I z, \quad \theta = S_I t - kx, \quad T = S_R t, \quad D = S_R + 2vk^2$$

где комплексная частота  $S$  является корнем дисперсионного уравнения

$$v^2(q^2 + k^2)^2 + \omega_0^2 = 4qv^2k^3, \quad \omega_0^2 \equiv k\left(g + \frac{k^2\gamma}{\rho}\right)$$

Это дисперсионное уравнение имеет четыре корня относительно переменной  $S$ . Два из них лежат на нижних листах римановой поверхности, на которой определено дисперсионное уравнение, (при таких значениях  $S$  не выполняются условия (3.10)) [10]. Оставшиеся два значения  $S$  комплексно сопряженные. Они описывают волны, распространяющиеся вдоль  $x$  (вправо) и против  $x$  (влево). Не уменьшая общности, в качестве конкретного значения  $S$  выбирается то, у которого  $\operatorname{Im}(S) > 0$ , что соответствует волне, распространяющейся вправо.

**5. Задача второго порядка малости.** Задачу второго порядка малости несложно скаляризовать, если найти скалярные функции  $\Phi_*$  и  $\Psi_*$  такие, что  $-\mathbf{U}_1 \times \operatorname{rot} \mathbf{U}_1 = \mathbf{N}_1 \Phi_* + \mathbf{N}_2 \Psi_*$ , где

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_z \partial_z, \quad \mathbf{N}_2 \equiv -\mathbf{e}_x \partial_z + \mathbf{e}_z \partial_x$$

– взаимно ортогональные векторные дифференциальные операторы. Существование  $\Phi_*$  и  $\Psi_*$  следует из теоремы Гельмгольца о разложении произвольного векторного поля на потенциальное и вихревое. Функции  $\Phi_*$  и  $\Psi_*$  находятся с помощью несложных но довольно громоздких преобразований над выражением  $-\mathbf{U}_1 \times \operatorname{rot} \mathbf{U}_1 = \mathbf{e}_x v_1 \Delta \Psi_1 - \mathbf{e}_z u_1 \Delta \Psi_1$ .

В скаляризованном варианте начально-краевая задача второго порядка малости формулируется относительно скалярных функций  $\Phi_2$  и  $\Psi_2$ , через которые поле  $\mathbf{U}_2$  выражается по формуле

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{N}_1 \Phi_2 + \mathbf{N}_2 \Psi_2 \quad (5.1)$$

Уравнения (3.13), (3.14) приводят к уравнениям для  $\Phi_2$ ,  $\Psi_2$ , которые, с учетом обозначений (4.2), имеют вид

$$\partial_t \Psi_2 - v \Delta \Psi_2 = a^2 (\eta_0 \exp 2L + (\eta_1 \cosh h + \eta_2 \sinh h) \exp 2L + (\Pi_2 \cos(2\theta + h) + \Pi_2 \sin(2\theta + h)) \exp(L + l)) \exp 2T \quad (5.2)$$

$$\Delta \Phi_2 = 0 \quad (5.3)$$

Граничные условия (3.15)–(3.18) преобразуются в краевые условия для уравнений (5.2), (5.3)

$$z = 0: \partial_t \xi_2 - \partial_z \Phi_1 - \partial_x \Psi_2 = a^2 (H_1 \cos 2\theta - H_2 \sin \theta) \exp 2T - \quad (5.4)$$

$$- \rho g \xi_2 - \partial_1 \Phi_2 - 2\rho v (\partial_{zz} \Phi_2 + \partial_{xz} \Psi_2) + \gamma \partial_{xx} \xi_2 = a^2 (Z_1 + Z_1 \cos 2\theta - Z_2 \sin 2\theta) \exp 2T \quad (5.5)$$

$$2\partial_{xz} \Phi_2 + \partial_{xx} \Psi_2 - \partial_{zz} \Psi_2 = a^2 (H_2 - \kappa_1 + G_1 \cos 2\theta - G_2 \sin 2\theta) \exp 2T \quad (5.6)$$

$$z \rightarrow -\infty: \partial_x \Phi_2 - \partial_z \Psi_2 \rightarrow 0, \quad \partial_z \Phi_2 + \partial_x \Psi_2 \rightarrow 0 \quad (5.7)$$

В формулах (5.2)–(5.7) коэффициенты  $\eta_i$ ,  $\Pi_i$ ,  $H_i$ ,  $Z_i$ ,  $G_i$ ,  $\kappa_i$ , не зависят от пространственных координат и времени. Выражения для них через  $S$ ,  $q$ ,  $k$ ,  $\rho$ ,  $\nu$  не приводятся, чтобы не усложнять описание процедуры решения хотя и громоздкими, но легко воспроизводимыми деталями.

Приведенные выражения – граничные условия, накладываемые на величины второго порядка малости: уравнение (5.4) – кинематическое условие на свободной поверхности; (5.5) – условие для давления на свободной поверхности; (5.6) – условие за нуления касательных натяжений на свободной поверхности; (5.7) – условие отсутствия движения на бесконечной глубине. Величины  $\theta$ ,  $T$ ,  $h$ ,  $l$  определены в (4.2).

Начальные условия для уравнений (5.2), (5.3) непосредственно следуют из (3.19), (3.20)

$$t = 0: \xi_2 = F_2(x), \quad z \leq 0: N_1 \varphi_2 + N_2 \psi_2 = U_2^0 \quad (5.8)$$

Сформулированная задача второго порядка малости получена на основе строгих рассуждений и учитывает вязкость жидкости корректным образом на основе прямого асимптотического разложения исходной задачи для нелинеаризованного уравнения Навье–Стокса. Конечно, задача получилась достаточно громоздкой. С другой стороны, уравнения (5.1)–(5.8) дают корректную математическую модель для исследования временной эволюции добавок второго порядка малости по амплитуде к отклонению поверхности вязкой бесконечно глубокой жидкости от положения равновесия при распространении волны. Эта модель представлена линейными дифференциальными соотношениями, поэтому, несмотря на громоздкость, она является гораздо более удобным объектом исследования, чем система нелинейных векторных уравнения исходной задачи.

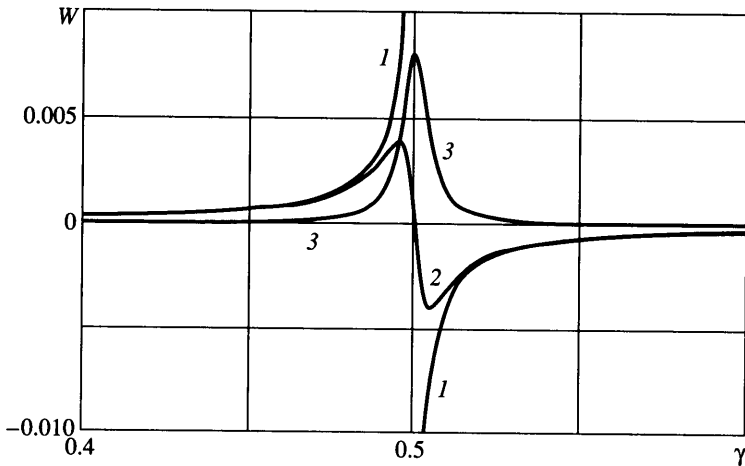
**6. Частное решение задачи.** Основные результаты классических работ по теории нелинейных волн на поверхности жидкости связаны с поиском частного решения задачи, когда исследование ведется без изначальной конкретизации вопроса о виде поля скоростей и форме поверхности при  $t = 0$  (см., например, обзоры [11, 12] и монографии [1–3, 6, 9]). Целесообразно исследовать задачу о нелинейных волнах в вязкой жидкости в рамках такого же подхода.

Для поиска частного решения задачи (5.2)–(5.7) использовался обычный метод разделения переменных. Расчеты проведены с помощью средств компьютерного пакета символьных вычислений *Mathematica*. Достоверность решения проверялась его непосредственной подстановкой в уравнения (5.2), (5.3) и граничные условия (5.4)–(5.7). Найденное частное решение представляет собой набор довольно длинных и громоздких выражений для  $\varphi_2$ ,  $\psi_2$  и  $\xi_2$ . Величины  $\varphi_2$  и  $\psi_2$  не несут информации об эволюции формы свободной поверхности во времени и формулы для них здесь не приводятся. Выражение для  $\xi_2$  имеет вид  $\xi_2 = a^2[\zeta_1 \cos 2\theta - \zeta_2 \sin 2\theta] \exp 2T$  с коэффициентами  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ , не зависящими от координат и времени, выражения для которых через  $S$ ,  $q$ ,  $k$ ,  $\rho$ ,  $\nu$  не приводятся в виду громоздкости. Суммируя (4.1) с выражением для  $\xi_2$ , можно построить частное решение задачи об определении профиля волны, распространяющейся по поверхности вязкой бесконечно глубокой жидкости, верное с точностью до величин второго порядка малости по отклонению формы поверхности от плоской равновесной

$$\xi = a \cos \theta \exp T + a^2 (\zeta_1 \cos 2\theta - \zeta_2 \sin 2\theta) \exp 2T \quad (6.1)$$

Величины  $\theta$  и  $T$  определены в (4.2). Входящая в определение  $T$  величина  $S_R < 0$  характеризует декремент затухания волны в линейном приближении.

**7. Поведение частного решения при малой вязкости.** Полученное решение интересно сравнить с результатами [13], где исследована аналогичная задача, но для невязкой жидкости [13]. В этом случае, согласно [13], прямое разложение решения в квадрати-



Фиг. 1. Зависимости амплитуды безразмерных квадратичных добавок  $W(\gamma)$  к профилю волны от величины безразмерного поверхностного натяжения при  $a = 0.01$ : 1 – для идеальной жидкости  $W(\gamma) = a^2 \zeta_0(\gamma)$ , и для вязкой жидкости при  $\nu = 10^{-3}$ : 2 –  $W(\gamma) = a^2 \zeta_1(\gamma, \nu)$ , 3 –  $W(\gamma) = a^2 \zeta_2(\gamma, \nu)$

ческом по амплитуде отклонения поверхности от равновесной формы приближении приводит к следующему результату

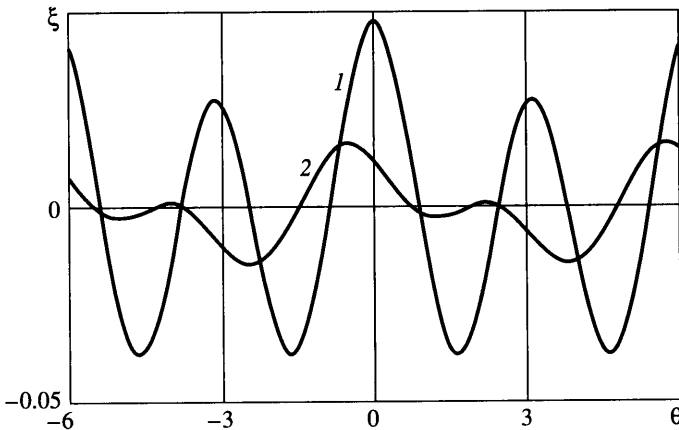
$$\xi = a \cos \theta + a^2 \zeta_0 \cos 2\theta, \quad \theta = x - \omega_0 t, \quad \zeta_0 = \frac{1}{2} \frac{1 + \gamma}{1 - 2\gamma} \quad (7.1)$$

Это выражение, как и в [13], записано в безразмерных переменных, в которых  $k = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $g = 1$ . Характерными масштабами для  $\xi$ ,  $a$ ,  $\omega_0$ ,  $t$  и  $\gamma$  здесь являются  $x^* = x$ ,  $\xi^* = 1/k$ ,  $a^* = 1/k$ ,  $\omega_0^* = \sqrt{gk}$ ,  $t^* = 1/\sqrt{gk}$ ,  $\gamma^* = \rho g/k^2$ . При таком обезразмеривании значение безразмерной частоты  $\omega_0$  по величине совпадает с безразмерной фазовой скоростью, измеряемой характерным масштабом  $c^* = (\sqrt{gk})/k$ . Если  $\gamma = 0$ , то решение (7.1) превращается в волну Стокса, отнесенную к нулевому уровню  $z = 0$ . Несложно убедиться, что для переформулировки задачи (1.1)–(1.8) к тем же безразмерным переменным достаточно формально выполнить в (1.1)–(1.8) подстановку  $k = \rho = g = 1$ . Эту же подстановку нужно сделать при расчете по формуле (6.1), чтобы получить результат в безразмерных переменных, использованных в [13]. При этом в задаче с вязкостью появляется характерный масштаб безразмерной вязкости  $\nu^* = \sqrt{g/k^3}$ .

При сравнении решений для вязкой жидкости (6.1) и для идеальной жидкости (7.1) выяснилось, что они наиболее существенно различаются при значениях безразмерных параметров, соответствующих резонансному взаимодействию мод. Из (7.1) видно, что при  $\gamma = 0.5$  добавка, квадратичная по амплитуде волны первого приближения, неограниченно велика, и получается, что главная мода резонансно раскачивает волну с вдвое меньшей длиной.

Безразмерное поверхностное натяжение воды принимает значение  $\gamma = 0.5$ , когда величина размерного резонансного волнового числа равна  $2.6 \text{ см}^{-1}$ . Это соответствует длине волны примерно в  $2.4 \text{ см}$  (подробнее см. в [13]). Для такого резонансного волнового числа значение безразмерной вязкости воды  $\nu = 10^{-3}$ . Именно такое значение безразмерной вязкости использовано в расчетах, результаты которых приведены ниже.

В принятой системе безразмерных параметров величины  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ , входящие в (7.1), зависят только от безразмерного поверхностного натяжения и безразмерной вязкос-



Фиг. 2. Профили волны в фиксированный момент времени во втором порядке приближений при безразмерных значениях параметров: амплитуды  $a = 0.01$  и коэффициента поверхностного натяжения  $\gamma = 0.499$ : 1 – в невязкой жидкости, зависимость (7.1); 2 – в вязкой жидкости, зависимость (6.1) при безразмерной вязкости  $\nu = 10^{-3}$

ти. На фиг. 1 построены амплитуды вторых слагаемых решений (6.1) и (7.1) при  $\nu = 10^{-3}$  и  $a = 0.01$  в зависимости от безразмерного поверхностного натяжения. Выбранный набор безразмерных переменных позволяет сравнить вязкую и невязкую модели межмодового резонанса для волны на поверхности воды с длиной 2.4 см и амплитудой 0.3 мм.

Видно, что в далекой по  $\gamma$  от резонанса области безразмерных параметров решения (6.1) и (7.1) совпадают. Вблизи резонансного значения  $\gamma = 0.5$  в решении задачи с учетом вязкости становится отличным от нуля коэффициент  $\zeta_2$  при  $\sin 2\theta$ . Это смещает фазу волны, найденной во втором порядке приближений, по отношению к фазе основной волны.

Амплитуда квадратичной добавки  $\sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}$  останется меньше амплитуды основной волны  $a = 0.01$  даже при резонансном значении  $\gamma = 0.5$ . Это означает, что решение (6.1) в данном случае пригодно при всех значениях  $\gamma$ , тогда как решение (7.1), основанное на приближении невязкой жидкости, предсказывает резонансно высокую амплитуду, для оценки которой нужно использовать специальные приемы.

На фиг. 2 показаны профили волны в фиксированный момент времени, рассчитанные по формулам (6.1) и (7.1) для околорезонансных значений безразмерных параметров. Видно, что решения сильно различаются по амплитуде и форме профиля волны. С течением времени амплитуда профиля, соответствующего решению (6.1), экспоненциально убывает. Расчеты показывают, что для волн в вязкой жидкости рост значения амплитуды  $a$  при  $a > 0.01$  и  $\nu = 10^{-3}$  приводит к тому, что добавка второго порядка малости при резонансном значении  $\gamma = 0.5$  хоть и конечна, но весьма велика по сравнению с амплитудой волны, полученной в линейном приближении. Проблема дополнительного исследования резонансной ситуации остается и в случае вязкой жидкости.

Однако при  $a < 0.01$  квадратичная добавка к форме достаточно мала, чтобы можно было пользоваться формулой (6.1), в то время как приближение идеальной жидкости, при котором эта добавка бесконечна, является несправедливым. Можно сказать, что исследованное в [13] резонансное взаимодействие несущественно для волн с малой амплитудой. Например, для термокапиллярных волн, которые всегда имеются благодаря тепловому движению молекул, амплитуда оценивается величиной  $\sim \sqrt{kT/\gamma}$ , где  $k = 1.38 \cdot 10^{-16}$  эрг/К – постоянная Больцмана,  $T$  – температура в Кельвинах,  $\gamma$  – коэф-



фициент поверхностного натяжения в гауссовой системе единиц. В этом случае резонансное взаимодействие мод несущественно для вязкой жидкости. Для термокапиллярных волн на воде при  $T = 293$  К амплитуда имеет значение  $\sim 0.5$  нм и резонансное взаимодействие не имеет места. Расчеты показали, что увеличение значения безразмерной вязкости приводит к увеличению значения безразмерной амплитуды, при котором разложение (6.1) все еще пригодно. Так, для  $\nu = 10^{-2}$  значение амплитуды волн линейного приближения, при котором квадратичная добавка остается немного меньше величины  $a$ , равно  $\approx 0.1$ .

**Заключение.** Представленная модель распространения волны по поверхности вязкой жидкости отличается от модели волны, рассчитанной в линейном по ее амплитуде приближении, квадратичной поправкой, представляющей собой волну вдвое меньшей длины и обладающей той же фазовой скоростью. От соответствующего нелинейного квадратичного по амплитуде решения для идеальной жидкости, представленное отличается тем, что амплитуда квадратичной добавки в резонансной ситуации остается конечной, тогда как для идеальной жидкости он обращается в бесконечность [13]. Выяснилось, что декремент затухания квадратичной добавки вдвое меньше, чем декремент основной волны.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых докторов наук № 00-15-9925.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стокер Дж.* Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.
2. *Ле Меоте Б.* Введение в гидродинамику и теорию волн на воде. Л.: Гидрометеоздат, 1974. 367 с.
3. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
4. *Цвелодуб О.Ю.* Резонансные взаимодействия двух волн в модели двухслойной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 1. С. 92–98.
5. *Dias F., Kharif Ch.* Nonlinear gravity and capillary-gravity waves (review) // Annu. Rev. Fluid Mech. 1999. V. 31. P. 301–346.
6. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика / Под ред. Кибеля И.А. Ч. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 612 с.
7. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Нелинейные капиллярные колебания заряженной капли // Журн. техн. физики. 2000. Т. 70. № 8. С. 45–52.
8. *Yang Y., Tryggvason G.* Dissipation of energy by finite-amplitude surface waves // Computer and Fluids. 1998. V. 27. № 7. P. 829–845.
9. *Ламб Г.* Гидродинамика. Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
10. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Белоножко Д.Ф.* Капиллярные колебания и неустойчивость Тонкса–Френкеля слоя жидкости конечной толщины // Журн. техн. физики. 1997. Т. 67. № 8. С. 27–33.
11. Нелинейные волны / Под ред. С. Лейбовича и А. Сибасса. М.: Мир, 1977. 319 с.
12. Нелинейные волновые процессы / Под ред. В.Н. Николаевского. М.: Мир, 1987. 296 с.
13. *Nayfeh A.H.* Third-harmonic resonance in the interaction of capillary and gravity waves // J. Fluid Mech. 1971. Pt2. V. 48. P. 385–395.