

УДК 532.51:532.135

© 2003 г. А. Г. ПЕТРОВ, Л. В. ЧЕРЕПАНОВ

**ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ
ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ**

Получены две однопараметрические серии действительных решений, описывающие процесс торможения и разгона вязкопластичной среды под действием переменного во времени градиента давления. Задача осесимметричного нестационарного вязкопластичного течения сведена к решению краевой задачи типа Стефана для уравнения теплопроводности с нелинейным условием на границе квазитвердого ядра. Использована автомоделная замена переменных, с помощью которой указанная задача приведена к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Решения последнего выражены через Бесселевы и элементарные функции. В результате получены две однопараметрические серии решений. Первая описывает процесс разгона вязкопластичной среды в трубе, а вторая – процесс торможения ее под действием переменного во времени градиента давления.

Ключевые слова: точные решения, осесимметричное течение, вязкопластичная среда, круглая труба.

Описание различных подходов к решению аналогичной задачи между двумя параллельными пластинами имеется в [1], где приводится единственное точное решение для нестационарного течения со специально подобранными скоростями пластин и градиентом давления. В [2, 3] представлен метод получения многопараметрических точных решений задачи нестационарного течения между двумя пластинами. Найдены серии точных решений, выраженные через полиномы Эрмита мнимого аргумента и функцию ошибок.

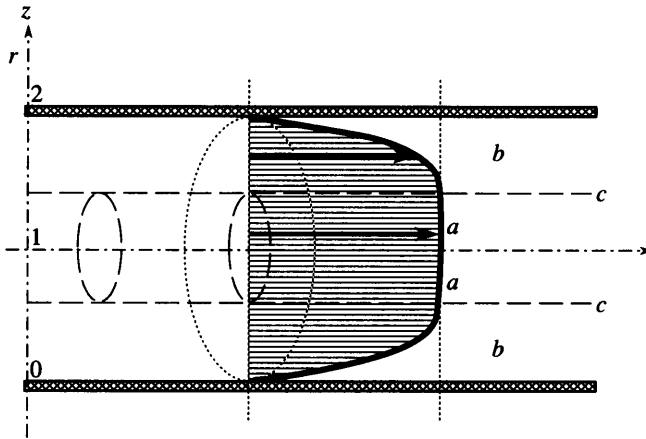
Для круглой трубы до сих пор не было известно ни одного точного решения. Настоящая работа является развитием [2–4]. В ней также исследуются двухмерные течения, но с осевой симметрией. Эта разница выражается в ином – более сложном уравнении движения.

В используемом подходе удачно подбирается зависимость ядра от времени и вводятся автомоделные переменные, через которые выражаются скорость и давление. Это позволяет свести нелинейную краевую задачу типа Стефана для уравнения в частных производных к задаче Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Показано, что композиция оператора уравнения и дифференциального оператора первого порядка тождественна композиции оператора первого порядка и оператора для уравнения Бесселя. Как следствие установленного тождества решение выражено через функции Бесселя нулевого порядка и их производные.

В итоге получены две однопараметрические серии действительных решений, описывающие процессы разгона и торможения вязкопластичной среды в трубе под действием переменного во времени градиента давления.

1. Краевая задача. Рассматривается нестационарное течение вязкопластичной среды в круглой трубе $r \leq R$ под действием переменного, зависящего от времени T градиента давления $\partial P/\partial X$, где r, X – цилиндрические координаты, R – радиус трубы.



Фиг. 1. Схема нестационарного вязкопластического течения в круглой трубе. Переменные безразмерные характеристики: a – область ядра, b – область деформационного течения среды, c – цилиндрическая граница ядра

Вектор скорости среды в круглой трубе имеет одну компоненту $V(T, r)$, направленную вдоль оси X и зависящую от времени T и полярной координаты r (фиг. 1). В этом случае реологическое соотношение Шведова – Бингама [5] принимает вид

$$|\tau| = -\mu \frac{\partial V}{\partial r} + \tau_0, \quad |\tau| \geq \tau_0 \quad (1.1)$$

где τ – касательное напряжение трения, τ_0 – предельное напряжение трения, μ – коэффициент динамической вязкости; если $|\tau| \leq \tau_0$, то $\partial V / \partial r = 0$.

Для вязкопластичного течения характерно наличие твердого ядра, в котором скорость деформаций равна нулю ($\partial V / \partial r = 0$). Граница ядра $r = r_0(T)$ зависит от времени T . Касательное напряжение $|\tau|$ внутри ядра $r \leq r_0(T)$ не превосходит предельное напряжение сдвига τ_0 $|\tau(T, r)| \leq \tau_0$ при $r \leq r_0(T)$. На границе ядра касательное напряжение совпадает с предельным $|\tau(r_0)| = \tau_0$. Частицы среды в области ядра $r \leq r_0(T)$ движутся с одинаковым ускорением под действием силы трения τ_0 и градиента давления.

Ускорение частиц среды в ядре находится из закона Ньютона

$$r \leq r_0: |\tau| \leq \tau_0, \quad \rho \frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{2\tau_0}{r_0} - \frac{\partial P}{\partial X} \quad (1.2)$$

где ρ – плотность вязкопластичной среды.

Вне ядра скорость деформации отлична от нуля, и уравнение движения принимает следующий вид

$$r_0 \leq r \leq R: \tau = -\mu \frac{\partial V}{\partial r} + \tau_0, \quad \rho \frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial X} \quad (1.3)$$

Начальные и граничные условия формулируем следующим образом. В начальный момент $T = 0$ заданы границы ядра и начальное распределение скорости; на границе трубы выполняются условия прилипания

$$\begin{aligned} T = 0: r_0(0) &= r_{00}, & V(0, r) &= V_0(r) \\ r = R: & & V(T, R) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

На границе ядра непрерывны скорость, касательное напряжение и ускорение. Отсюда, с помощью уравнений (1.2), (1.3) и закона Шведова – Бингама (1.1), получим

$$\begin{aligned} \tau(T, r)|_{r=r_0} = \tau_0 \rightarrow V_r'(T, r_0) = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{2\tau_0}{r_0} \rightarrow V_{rr}''(T, r_0) = -\frac{\tau_0}{\mu r_0} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Введем безразмерные переменные: время t , координаты z, x ; и безразмерные функции: градиент давления $g(t)$, скорость $u(t, z)$, границу ядра $z_0(t)$

$$t = \frac{\rho R^2 T}{\mu}, \quad x = \frac{X}{R}, \quad z = \frac{R-r}{R}, \quad 0 \leq z < 1 \quad (1.6)$$

$$z_0(t) = 1 - \frac{r_0(t)}{R}, \quad g(t) = -\frac{R \partial P}{\tau_0 \partial X}, \quad v(t, z) = \frac{R \tau_0}{\mu} V(T, r) \quad (1.7)$$

В области $1 \leq z \leq 2$ сечения xz круглой трубы скорость и давление доопределим по симметрии относительно центральной оси трубы $z = 1$, как показано на фиг. 1. В этом случае стенки трубы соответствуют $z = 0, z = 2$. Граница ядра $z_0(t)$ соответствует совпадению касательного напряжения с предельным $|\tau(r_0)| = \tau_0$. Область, примыкающая к стенкам $z \in [0, z_0) \cup (2 - z_0, 2]$, соответствует области деформационного течения, в котором $|\tau| > \tau_0$; область $z \in (z_0, 2 - z_0)$ соответствует ядру, в котором $|\tau| \leq \tau_0$.

Тогда из (1.2)–(1.5)–(1.7) для определения безразмерных скорости $u(t, z)$, градиента давления $g(t)$ и границы ядра $z_0(t)$ получим следующую краевую задачу. Уравнения: в области ядра

$$z_0(t) \leq z \leq 1: \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{2}{1-z_0(t)} + g(t) \quad (1.8)$$

в области деформационного течения

$$0 \leq z \leq z_0(t): \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{1-z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + 1 \right) + g(t) \quad (1.9)$$

Начальные условия

$$v(t_0, z) = v_0(z), \quad z_0(t_0) = z_{00} \quad (1.10)$$

Условие прилипания на стенке трубы

$$v(t, 0) = 0 \quad (1.11)$$

и условия, вытекающие из (1.5), о непрерывности на границе ядра

$$v_z'(t, z_0) = 0, \quad v_{zz}''(t, z_0) = -\frac{1}{1-z_0(t)} \quad (1.12)$$

Последнее нелинейное условие (1.12) дополнительно осложняет получение решения краевой задачи с изменяющейся границей.

Перейдем к построению параметрических серий точных решений сформулированной краевой задачи.

2. Аналитическое решение. Представим две однопараметрические серии безразмерных функций – скорости $v = v_{\beta A}(t, z)$, градиента давления $g = g_{\beta A}(t)$ и границы ядра $z_0 = z_{\beta A}(t)$ – в виде

$$\begin{aligned} v_{\beta A}(t, z) &= \frac{F_{\beta A}(\xi) - F_{\beta A}(\eta)}{A\xi} - z \\ g_{\beta A}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{F_{\beta A}(\xi)}{A\xi} \right) = \frac{2\beta\xi}{A} (\xi F'_{\beta A}(\xi) - F_{\beta A}(\xi)) \\ z_{\beta A}(t) &= 1 - 2A\sqrt{-\beta t} \\ \xi &= \frac{1}{2\sqrt{-\beta t}}, \quad \eta = (1-z)\xi, \quad 0 \leq z < 1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где ξ, η – вспомогательные автомодельные переменные $0 < \eta \leq \xi < \infty$, введены аналогично [4]; A – параметр семейства безразмерных функций ($0 < A \leq \xi < \infty$); β – индекс серии, равный ± 1 в зависимости от знака t ($\beta = -|t/t$); βA – двойной индекс, идентифицирующий параметрическую серию семейства функций (β – параметр-индекс серии, A – действительный положительный параметр каждой из серий).

Два значения индекса $\beta = \pm 1$ соответствуют двум сериям: разгону ($\beta = +1$) или торможению ($\beta = -1$). В случае разгона течение начинается из состояния покоя в момент времени $t = -t_0 = -1/(4A^2)$ и продолжается до момента $t = 0$ с неограниченно возрастающими функциями скорости $v = v_{+A}(t, z)$ и градиента давления $g = g_{+A}(t)$. В случае торможения течение начинается с момента времени $t = 0$ и продолжается до момента $t = t_0 = 1/(4A^2)$. В последнем случае начальный профиль скорости (1.10) находится из (2.1) предельным переходом при $t \rightarrow +0$.

Закон движения границы ядра $z_0 = z_{\beta A}(t)$ подобран так, что автомодельная переменная $\eta = \eta(z, t)$ на границе ядра $\eta|_{z=z_{\beta A}(t)} = A$.

При подстановке (2.1) в краевую задачу (1.9)–(1.12) воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{\beta}{4(-\beta t)^{3/2}} = 2\beta\xi^3, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = (1-z)\frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{F_{\beta A}(\eta)}{A\xi} \right) &= \frac{1}{A} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{F_{\beta A}(\eta)}{\xi} \right) = \frac{2\beta\xi}{A} [\xi(1-z)F'_{\beta A}(\eta) - F_{\beta A}(\eta)] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{F_{\beta A}(\eta)}{A\xi} \right) &= \frac{2\beta\xi}{A} (\eta F'_{\beta A}(\eta) - F_{\beta A}(\eta)) \\ \frac{\partial v_{\beta A}(t, z)}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{F_{\beta A}(\eta)}{A\xi} - z \right) = -\frac{1}{A\xi} \frac{\partial F_{\beta A}(\eta)}{\partial \eta} - 1 = \frac{F'_{\beta A}(\eta)}{A} - 1 \\ \frac{\partial^2 v_{\beta A}(t, z)}{\partial z^2} &= -\frac{\xi}{A} F''_{\beta A}(\eta) \end{aligned}$$

где $F'_{\beta A}(\eta)$, $F''_{\beta A}(\eta)$ означает первую и вторую производные по η .

Отсюда условия (1.12) на границе ядра $\eta = A$ приводятся к виду

$$\frac{F'_{\beta A}(\eta)}{A} - 1 \Big|_{\eta=A} = 0, \quad -\frac{\xi}{A} F''_{\beta A}(\eta) \Big|_{\eta=A} = -\frac{1}{1-z_{\beta A}} \Big|_{\eta=A} = -\frac{\xi}{A}$$

откуда следует

$$F'_{\beta A}(\eta)|_{\eta=A} = A, \quad F''_{\beta A}(\eta)|_{\eta=A} = 1 \quad (2.2)$$

Уравнение (1.9) в новых переменных принимает вид

$$-\frac{2\beta\xi}{A}(\eta F'_{\beta A}(\eta) - F_{\beta A}(\eta)) = -\frac{\xi}{A}F''_{\beta A}(\eta) - \frac{1}{1-z} \frac{F'_{\beta A}(\eta)}{A}$$

или для $A > 0, z \neq 1$

$$\eta F''_{\beta A}(\eta) + (1 - 2\beta\eta^2)F'_{\beta A}(\eta) + 2\beta\eta F_{\beta A}(\eta) = 0 \quad (2.3)$$

Условие прилипания (1.11) для поля скорости (2.1) при $z = 0$ (что обеспечивает равенство $\eta = \xi$) выполнено автоматически.

Как следствие (2.2)–(2.3), т.е. последних двух равенств и подстановки $\eta = A$ во все слагаемые уравнения (2.3), находим значение функции F на границе (при $\eta = A$) квазивердого ядра. Имеем

$$F_{\beta A}(\eta)|_{\eta=A} = A^2 - \beta \quad (2.4)$$

Окончательно получим следующую параметрическую серию задач Коши для $F = F_{\beta A}(\eta)$, вытекающую из краевой задачи (1.8)–(1.12) и представления (2.1)

$$\eta F'' + (1 - 2\beta\eta^2)F' + 2\beta\eta F = 0 \quad (2.5)$$

$$F(A) = A^2 - \beta, \quad F'(A) = A$$

Исходя из традиционных рекомендаций, замена $x = \beta\eta^2$ приводит задачу (2.5) к уравнению для вырожденной гипергеометрической функции [6]. Однако в данном случае можно значительно упростить решение, выразив его через модифицированные функции Бесселя.

Подстановкой $x = \eta^2/2, F_{\beta A}(\eta) = e^{\beta x}y(x), a = A^2/2$ задача (2.5) приводится к виду

$$xy'' + y' - (x - 2\beta)y = 0 \quad (2.6)$$

$$y(a) = (2a - \beta)e^{-\beta a}, \quad y'(a) = 2(1 - \beta a)e^{-\beta a} \quad (2.7)$$

Общим решением линейного дифференциального уравнения (2.6) с начальными условиями (2.7) является линейная комбинация

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (2.8)$$

независимых решений

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (1 - 2\beta x)I_0(x) + 2xI_1(x) \\ y_2(x) &= (1 - 2\beta x)K_0(x) - 2xK_1(x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $I_\nu(x), K_\nu(x)$ – модифицированные функции Бесселя [7, 8] порядка $\nu = 0, 1$; постоянные C_1 и C_2 находятся из условий (2.7)

$$C_1 = -\beta a K_1(a) e^{-\beta a}, \quad C_2 = -\beta a I_1(a) e^{-\beta a} \quad (2.10)$$

Непосредственной подстановкой (2.9) в уравнение (2.6) можно убедиться, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями уравнения (2.6). Для упрощения возникающих в этой проверке выкладок можно показать это операторным методом.

Для этого, обозначив $D = d/dx$, рассмотрим четыре дифференциальных оператора

$$L = xD^2 + D - (x - 2\beta), \quad M = 2xD + (1 - 2\beta x)$$

$$N = 2xD + (3 - 2\beta x), \quad B = xD^2 + D - x$$

и установим тождество для любых трижды дифференцируемых функций $w = w(x)$

$$LMw = NBw \quad (2.11)$$

или

$$(B + 2\beta)Mw = (M + 2)Bw$$

Очевидно справедливы следующие операторные равенства $L = B + 2\beta$, $N = M + 2$, с использованием которых равенство (2.11) или разность композиции операторов $LM - NB = (B + 2\beta)M - (M + 2)B = BM + 2\beta M - MB - 2B = BM - MB + 2\beta M - 2B$ можно представить как

$$LM - NB = [B, M] + 2(\beta M - B) \quad (2.12)$$

здесь $[B, M]$ обозначает коммутатор (симметричную разность) двух операторов.

Как известно, коммутатор кососимметричен и линеен по своим аргументам. Кроме того, для любых операторов P, Q

$$[PQ, Q] = PQQ - QPQ = [P, Q]Q, \quad [P, PQ] = P[P, Q],$$

$$[P^2, Q] = [PP, Q] = P[P, Q] + [P, Q]P$$

Из равенств $[D, x] = 1$ ($D(xf) - xDf = f$), следует

$$\begin{aligned} [B, M] &= 2[xD^2, xD] - 2\beta[xD^2, x] + 2[D, xD] - 2\beta[D, x] - 2[x, xD] = \\ &= 2(B - \beta M - 2\beta^2 x + 2x) \end{aligned}$$

Однако $\beta = \pm 1$, тогда $[B, M] = 2(B - \beta M)$, т.е., с учетом (2.12), получим нулевой оператор $LM - NB = 0$. Тем самым тождество (2.11) доказано.

С помощью (2.11) легко убедиться, что формулы (2.9) являются двумя независимыми решениями уравнения (2.6).

Действительно, записав уравнение (2.6) в виде $Ly = 0$, подставляем в него функцию $y = Mw(x)$. Тогда, с помощью (2.11), для $w(x)$ получим уравнение $NBw = 0$. Два решения $w_1 = I_0(x)$ и $w_2 = K_0(x)$ этого уравнения являются решениями уравнения Бесселя $Bw = 0$. Им соответствуют решения

$$y_1(x) = MI_0(x) = (1 - 2\beta x)I_0(x) + 2xI_0'(x)$$

$$y_2(x) = MK_0(x) = (1 - 2\beta x)K_0(x) + 2xK_0'(x)$$

которые тождественны (2.9), что и требовалось показать.

Общее решение (2.8)–(2.10) можно представить в следующем окончательном виде. С помощью подстановки $F_{\beta A}(\eta) = e^{\beta x}y(x)$, $x = \eta^2/2$, $a = A^2/2$, получаем две серии (соответственно для $\beta = -1$ и $\beta = +1$) искомого параметрического ($A > 0$) семейства решений задачи Коши (2.5), а также краевой задачи (1.8)–(1.12) в форме представления (2.1)

$$\begin{aligned} F_{\beta A}(\eta) &= -\beta a e^{\beta(x-a)} \{ (1 - 2\beta x)[K_1(a)I_0(x) + I_1(a)K_0(x)] + \\ &+ 2x[K_1(a)I_1(x) - I_1(a)K_1(x)] \}, \quad a = \frac{A^2}{2}, \quad x = \frac{\eta^2}{2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Действительные функции $F_{\beta A}(\eta)$ не зависят от знака A (зависят от A^2), что позволяет однозначно идентифицировать серии параметрического семейства нижним индексом (βA) вида $\pm A$.

Используя семейство функций (2.13), представим аналитические выражения решения исходной задачи осесимметричного течения (1.8)–(1.12) в форме (2.1), через автомодельные (2.1) переменные $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t, z)$.

Безразмерная функция границы ядра (2.1) $z_0 = z_{\beta A}(t)$ выражается через автомодельную переменную ξ простой дробью так

$$z_0 = z_{\beta A}(\xi) \Big|_{\xi = \xi(t)} = 1 - \frac{A}{\xi} \Big|_{\xi = \xi(t)} \quad (2.14)$$

Схематично граница ядра для момента времени t показана цилиндрической поверхностью (c) на фиг. 1.

Профиль безразмерной функции скорости (2.1) с учетом ее доопределения в ядре $v = v_{\beta A}(t, z_0)$ при $z = 1$ представляется так.

В области ядра $z_0 \leq z \leq 1$ (область (a) на фиг. 1) среда движется без деформаций со скоростью, равной скорости на границе (c) ядра

$$v_{\beta A}(\xi, z) = \frac{F_{\beta A}(\xi) + \beta}{\xi A} - 1, \quad z_0 = 1 - \frac{A}{\xi} \quad (2.15)$$

В области деформационного течения $0 \leq z \leq z_0 < 1$ (область (b) на фиг. 1) скорость представляется в виде

$$v_{\beta A}(\xi, z) = \frac{F_{\beta A}(\xi) - F_{\beta A}(\eta)}{\xi A} - z, \quad \eta = (1 - z)\xi \quad (2.16)$$

Градиент давления в обеих областях (a)–(b) (фиг. 1) таков

$$g_{\beta A}(\xi) = A e^{\beta(\xi^{2/2} - a)} \xi \left[K_1(a) I_0\left(\frac{\xi^2}{2}\right) + I_1(a) K_0\left(\frac{\xi^2}{2}\right) \right], \quad a = \frac{A^2}{2} \quad (2.17)$$

Для того, чтобы получить аналитическое выражение скорости, градиента давления и границы ядра (2.1) в терминах нормированного времени $t' \in [-1, +1]$ необходимо в последних приведенных формулах (2.14), (2.16), (2.17) произвести замену

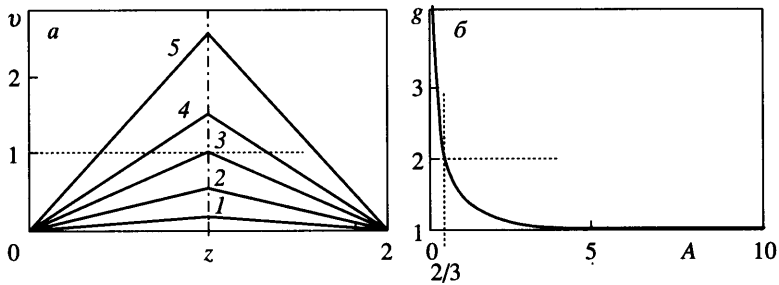
$$\xi = \xi(t') = \frac{A}{\sqrt{1 - |t'|}}, \quad t' = t4A^2 + \beta \quad (2.18)$$

В частности, граница ядра изменяется по параболическому закону $z_0 = z_{\beta A}(t') = 1 - \sqrt{1 - |t'|}$ и не зависит от параметров βA (т.е. является параметрическим инвариантом в терминах безразмерного нормированного времени).

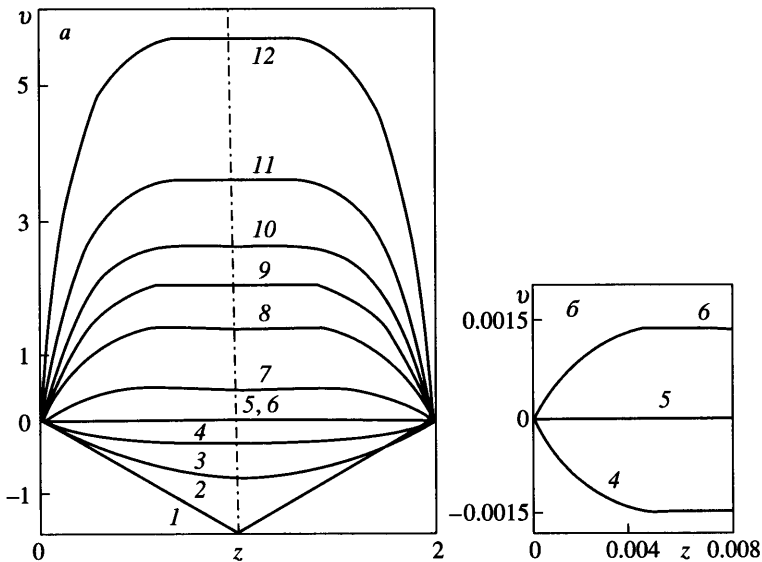
3. Анализ решений. Параметрами (2.1) является пара чисел βA вида $\pm A$ ($A > 0$). Рассматривается нормированное время $t' \in [-1, +1]$, определяемое соотношением (2.18) $t' = t4A^2 + \beta$, или для перехода от $t' \rightarrow (t, \beta)$, подстановкой

$$t = \frac{t' - \beta}{4A^2}, \quad \beta = \frac{|t'|}{t'} = \text{signum}(t') \neq 0 \quad (3.1)$$

В этом случае: интервал нормированного времени $t' \in [-1, 0)$ соответствует торможению ($\beta = -1$); интервал нормированного времени $t' \in (0, +1]$ соответствует разгону ($\beta = +1$). Тогда состояние покоя вязкопластичной среды в круглой трубе (конец нестационарного торможения или начало нестационарного разгона) наступает для $t' = 0$, а



Фиг. 2. Взаимосвязь $v = [g - 1] \min(z, 2 - z)$ между профилем безразмерной скорости $v = v_A(-1, z)$ (а) и градиентом давления $g = g_A(-1)$ (б) в начальный момент торможения $t' = -1$, $\beta = -1$ соответствующая выбору фиксированного параметра A : 1 - $A = 2$, 2 - 1, 3 - $2/3$, 4 - $1/2$, 5 - $1/3$



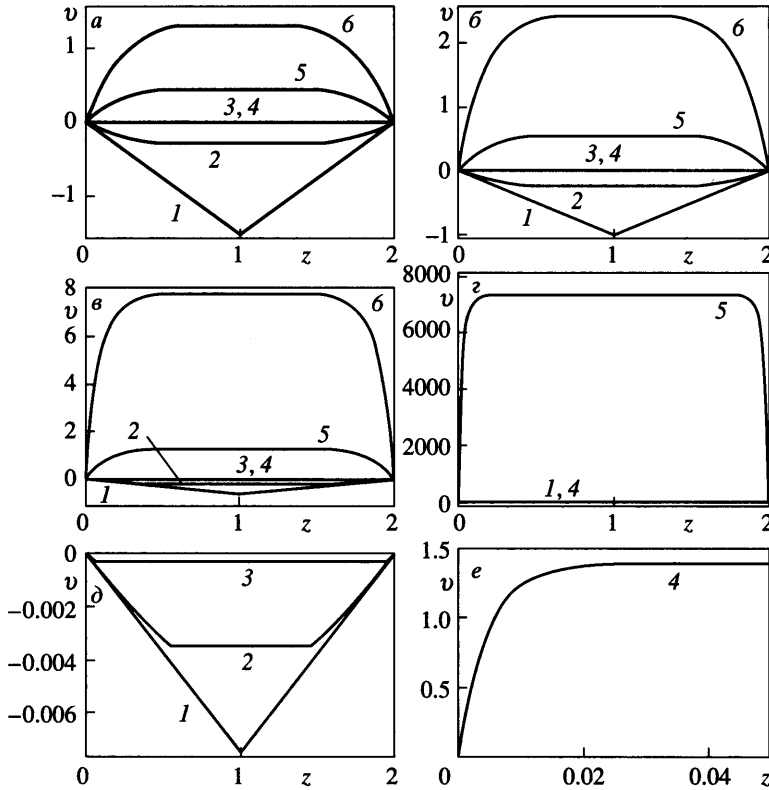
Фиг. 3. Профили безразмерной скорости v при $\beta A = \pm 1/2$, для разных моментов времени t' : 1 - -1 , 2 - -0.95 , 3 - -0.8 , 4 - -0.1 , 5 - 0 , 6 - 0.1 , 7 - 0.8 , 8 - 0.9 , 9 - 0.92 , 10 - 0.93 , 11 - 0.94 , 12 - 0.95 (а). Увеличенный фрагмент трех профилей скорости около состояния покоя $t' = 0, \pm 0.1$ (б)

параметр β , как индикатор движения, в этот момент времени не определен. Движение около состояния покоя будем обозначать $t' = \pm 0$.

Полученные выше по результатам исследования аналитические формулы параметрических βA серий точных решений осесимметрического потока определяют изменение профиля $0 \leq z \leq 2$ скорости $v_{\beta A}(t', z)$ с течением времени $t' \in [-1, +1]$ (фиг. 2а, 3, 4) под действием переменного градиента давления (фиг. 2б, 5)

$$g_{\beta A}(t') = \exp\left(\frac{a|t'|}{1-|t'|}\right) \frac{2a}{\sqrt{1-|t'|}} \left[K_1(a) I_0\left(\frac{a}{1-|t'|}\right) + I_1(a) K_0\left(\frac{a}{1-|t'|}\right) \right],$$

$$a = \frac{A^2}{2}$$
(3.2)



Фиг. 4. Профили безразмерной скорости v , соответствующие различным комбинациям параметров βA : $a - \pm 1.2$, $\beta - \pm 2/3$, $\epsilon - \pm 1$, $z - \pm 2$; $\delta - 10$; $e - 10$ (фрагмент), и моментам безразмерного времени: 1 - $t' = -1$, 2 - -0.8 , 3 - -0.1 , 4 - 0.1 , 5 - 0.8 , 6 - 0.9

Состояние покоя. В момент времени $t' = \pm 0$, соответствующий состоянию покоя среды, величина градиента давления определяется из (3.2) предельным переходом $t' \rightarrow \pm 0$ и, на основании свойств функций Бесселя, $g_{\beta A}(\pm 0) = 2$ для всех βA (фиг. 5б).

При этом в формулах (2.14)–(2.16) $\eta = \xi = A$, т.е. профиль скорости является нулевым: $v_{\beta A}(\pm 0, z) = 0$ для всех βA , $0 \leq z \leq 2$ (фиг. 3). На границе трубы $z = 0, z = 2$ выполняется условие прилипания (1.4), (1.11): $v_{\beta A}(t', z) = 0$ для всех $t' \in [-1, +1]$ и для всех βA .

Разгон среды ($\beta = +1$). Движение вязкопластичной среды в круглой трубе начинается с величины градиента давления $g_{\beta A}(+0) = 2$. Далее, на отрезке времени $t' \in [0, 1]$ происходит монотонное неограниченное увеличение как градиента давления $g_{\beta A}(t') \geq 2$, так и скорости ядра $v_{\beta A}(t', z_0) \geq 0$ для всех βA .

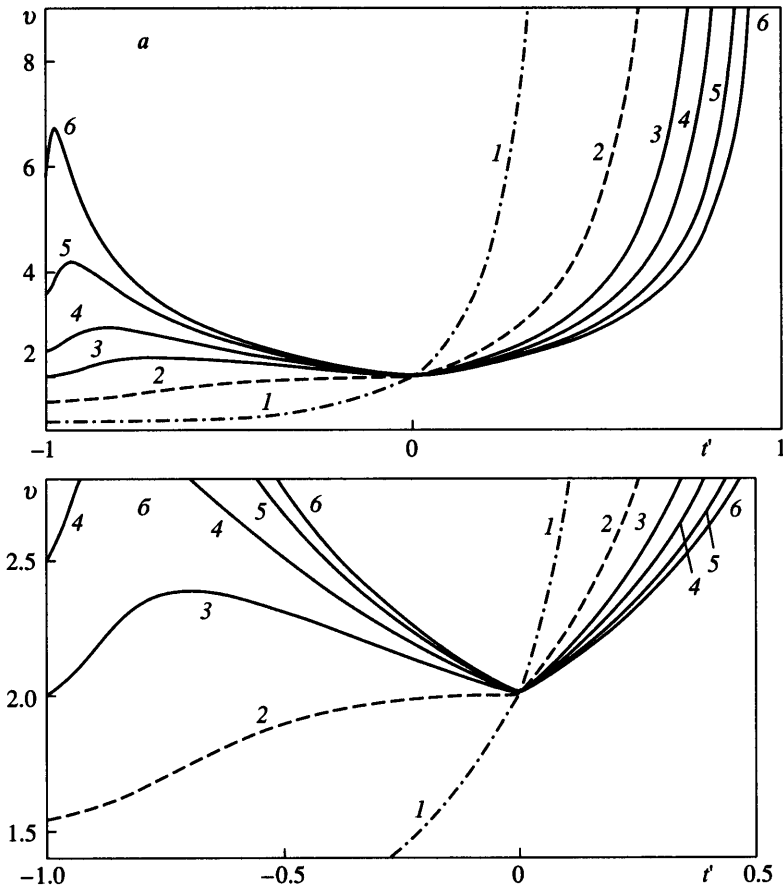
Торможение среды ($\beta = -1$). При отрицательном β на отрезке $t' \in [-1, 0]$ происходит торможение, которое начинается в момент времени $t' = -1$ с величины (фиг. 2б) градиента давления $g_{\beta A}(-1) > 1$ равного

$$g_{\beta A}(-1) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \exp(a) K_1(a), \quad \beta = -1, \quad a = \frac{A^2}{2} \tag{3.3}$$

Профиль начальной скорости имеет форму конуса (фиг. 2а) с образующей

$$v_A(t', z)|_{t'=-1} = [g_{\beta A}(-1) - 1]z, \quad 0 \leq z \leq 1 \tag{3.4}$$

Торможение заканчивается состоянием покоя при $t' = 0$ со значением $g_{\beta A}(-0) = 2$.



Фиг. 5. Изменения градиента давления $g = g_A(t')$ вязкопластичной среды в круглой трубе (а): 1 – $\beta A = \pm 2$; 2 – ± 1 ($t_* = 0$, $g^* = 2$); 3 – $\pm 2/3$ ($t_* = -0.7$, $g^* = 2.4$); 4 – $\pm 1/2$ ($t_* = -0.8$, $g^* = 2.9$); 5 – $\beta A = \pm 1/3$ ($t_* = -0.93$, $g^* = 4.2$); 6 – $\beta A = \pm 1/5$ ($t_* = -0.97$, $g^* = 6.8$) и увеличенный фрагмент (б) изменения градиента давления в состоянии около покоя $t' = \pm 0$

Монотонность градиента давления $g_{\beta A}(t')$, как функции нормированного времени t' , зависит от βA (фиг. 5). При $1 \leq A < +\infty$ на всем интервале $t' \in [-1, +1]$ функция $g_{\beta A}(t')$ монотонно возрастает от значения $g_{\beta A}(-1)$ из интервала $1 < g_{\beta A}(-1) < 1.54$ до значения $g_{\beta A}(+1) = +\infty$, где градиент давления $g_{\beta A}(-1) \approx 1.54$ (при $A = 1$).

При $0 < A \leq 1$ на всем интервале $t' \in [-1, +1]$ функция $g_{\beta A}(t')$ имеет три локальных экстремума (фиг. 5). А именно, в точке $t' = -1$ – локальный минимум, в точке $t' = 0$ – локальный минимум или точка перегиба, а в точке $t' = t'_* \in [-1, 0]$ – локальный максимум. Для $A \approx 2/3$ два локальных минимума градиента давления совпадают (фиг. 2, 5).

При всех βA в точке $t' = \pm 0$ локальный минимум (или перегиб, угол) сопровождается фиксированным, величиной две безразмерных единицы, скачком производной градиента давления (фиг. 5б).

Рассмотрим указанные временные точки подробнее. Градиент давления (3.4) в начальный момент торможения определяется из (3.2) предельным переходом при $t' \rightarrow -1$.

Как функция параметра A он монотонно убывает от $+\infty$ при $A = 0$ до 1 при $A = +\infty$. Асимптотики градиента давления (3.4) таковы

$$g_{\beta A}(-1) = \begin{cases} \frac{2 + A^2 + \dots}{A\sqrt{\pi}}, & A \ll 1 \\ 1 + \frac{3}{(2A)^2} - \frac{15/2}{(2A)^4} + \dots, & A \gg 1 \end{cases}$$

При фиксированных значениях параметров $A \leq 1$, $\beta = -1$ градиент $g_{\beta A}(t')$ как функция нормированного времени t' имеет локальный максимум g^* (фиг. 5) в точке $t'_* \in [-1, 0]$. Эти значения $t'_* = t'_{p_max}(\beta A)$, зависящие от выбора βA , найдены как решение (относительно t' , β , A) следующего уравнения

$$\frac{K_1(a)I_1(ab) - I_1(a)K_1(ab)}{K_1(a)I_0(ab) + I_1(a)K_0(ab)} + \beta + \frac{1}{2ab} = 0 \quad (3.5)$$

$$a = \frac{A^2}{2}, \quad b = \frac{1}{1 - \beta t'}$$

Из решения этого уравнения определится функция $t'_*(A)$ с областью определения $-1 \leq \beta A < 0$. В частности, со значением градиента давления $g^* = 2$ (фиг. 5б, увеличенный фрагмент, пунктирная кривая), точка $t'_* = 0$, $A = 1$, $\beta = -1$ является решением (3.5). На интервале $0 < A \leq 1$, $\beta = -1$ аппроксимация указанной функции такова

$$t'_*(A) = \frac{1}{4}A^2(5 - 10A + 9A^2) - 1$$

При $\beta = +1$ действительные решения уравнения (1.35) отсутствуют, так как в этом случае функция $g_{\beta A}(t')$ монотонна.

Описанные временные эволюции профиля скорости и градиента давления в задаче нестационарного течения вязкопластичной среды в круглой трубе во многом аналогичны течениям между двумя параллельными пластинами [2, 4]. Однако имеются и определенные (существенные) различия.

На участке торможения потока в круглой трубе градиент давления в начальный момент времени больше 1, тогда как в течении между двумя параллельными пластинами градиент давления равен нулю. Разгон из состояния покоя вязкопластичной среды в круглой трубе начинается при $g_A(\pm 0) = 2$ и сопровождается (фиг. 5б, увеличенный фрагмент) фиксированным при всех βA скачком производной градиента давления

$$g'_A(+0) - g'_A(-0) = 2$$

При $A \rightarrow +\infty$ профиль скорости течения между двумя параллельными пластинами имеет форму трапеции. В случае осесимметричного нестационарного вязкопластичного течения в поперечном сечении круглой трубы форма профиля скорости в ядре прямолинейна, а в деформационной области – криволинейна (фиг. 3, 4).

Заключение. В задаче нестационарного вязкопластичного течения в трубе представлены две серии однопараметрических решений уравнений движения вязкопластичной среды. Решения выражены через модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков и элементарные функции.

Это позволило исследовать и описать два класса течений с изменяющимся во времени ядром: 1) процесс торможения из начального состояния до полной остановки под действием переменного во времени градиента давления; 2) процесс разгона из начального состояния покоя под действием монотонно нарастающего во времени градиента давления.

Авторы благодарят Д.М. Климова за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 02-01-00567).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х.* Нестационарные движения вязкопластичных сред. М.: Изд-во МГУ, 1977. 373 с.
3. *Петров А.Г.* Точные решения краевой задачи о нестационарном течении вязкопластической среды между двумя пластинами // Докл. АН. 1998. Т. 362. 3 Механика. С. 343–347.
3. *Петров А.Г.* Точные решения краевой задачи о нестационарном течении вязкопластической среды между двумя пластинами // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 2. С. 3–13.
4. *Klimov D.M., Petrov A.G.* Analytical solutions of the boundary value problem of nonstationary flow of viscoplastic medium between two plates // Arch. Appl. Mech, 2000. V. 70. № 1–3. P. 3–16.
5. *Лойцанский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
6. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Точные решения. М.: Физматлит, 1995. С. 120–122, 125.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.
8. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. / Перевод с англ., Изд. второе, исправленное. М.: Наука, 1966. 228 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.VI.2002