

УДК 532.532+532.59

© 2002 г. В.И. БУКРЕЕВ, А.В. ГУСЕВ, В.Ю. ЛЯПИДЕВСКИЙ

ТРАНСКРИТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ НАД ПОРОГОМ В ОТКРЫТОМ КАНАЛЕ

Выполнены теоретическое и экспериментальное исследования стационарных течений со свободной поверхностью над удобообтекаемым препятствием на дне канала. Для определения положения свободной поверхности и основных параметров набегающего потока используется первое и второе приближения теории мелкой воды. Во втором приближении найдено решение, описывающее плавный переход от докритического к сверхкритическому потоку. Построена математическая модель гидравлического прыжка за препятствием. Проведено сравнение результатов математического моделирования с экспериментальными данными.

Ключевые слова: "мелкая вода", удобообтекаемый порог, гидравлический прыжок, сверхкритическое и докритическое течения.

Порог является типичным элементом различных гидротехнических сооружений, а также топографии дна открытых русел. Поэтому обтекание порога потоком со свободной поверхностью изучалось многими гидравликами в основном экспериментально. Полученная информация подытожена, например, в [1–4]. Она относится главным образом к пропускной способности порога как водослива. Этой информации недостаточно при расчетах волн попусков из водохранилищ и паводков в реках, распространения прилива или цунами вверх по реке, аварийных режимов работы гидротехнических сооружений и во многих других водноэкологических задачах.

В данной работе приведены математическая модель, позволяющая описать картину течения в окрестности удобообтекаемого порога, и результаты ее экспериментальной проверки. Рассматривается такая подобласть фазового пространства параметров задачи, в которой набегающий поток является докритическим, а над порогом он переходит сначала в сверхкритическое, затем в докритическое состояние.

При переходе от докритического к сверхкритическому течению свободная поверхность сохраняет гладкость, а при обратном переходе наблюдается шесть разных режимов течения, и только в одном из них свободная поверхность сохраняет гладкость [1, 2]. На практике сопряжение сверхкритического потока с докритическим происходит чаще всего в форме классического гидравлического прыжка с вальцом в головной части. Именно такой режим рассматривается в данной работе.

Чтобы адекватно отразить отмеченную особенность течения, предлагаемая математическая модель состоит из двух частей. В первой части описывается течение до гидравлического прыжка, а во второй – гидравлический прыжок и течение за ним. Кроме того, для первой части предложены две подмодели, основанные на первом и втором приближениях теории мелкой воды. В экспериментах изучалась более широкая область фазового пространства параметров. В данной работе используются только экспериментальные данные, соответствующие выбранному для теоретического анализа режиму течения, который называется здесь транскритическим.

1. Уравнения мелкой воды. Рассмотрим уравнения стационарного течения тяжелой идеальной несжимаемой жидкости над неровным дном. Будем считать, что течение потенциально. В первом приближении теории мелкой воды распределение давления в

жидкости считается гидростатическим, а распределение горизонтальной компоненты скорости – однородным по вертикали.

Уравнения стационарного течения принимают вид

$$hu = q$$

$$\frac{1}{2}u^2 + g(h+z) \equiv J_1 \quad (1.1)$$

Здесь $h(x)$ – глубина жидкости, $u(x)$ – горизонтальная компонента скорости, $z(x)$ – форма дна канала, g – ускорение свободного падения, q – постоянный удельный расход (расход на единицу ширины канала), J_1 – постоянная Бернулли.

Пусть течение перед препятствием докритическое ($u^2 < gh$), а за препятствием – сверхкритическое ($u^2 > gh$). Это возможно только в случае, когда над гребнем препятствия при $x = x_c$ ($\delta = \max z(x) = z(x_c)$, $z'(x_c) = 0$) (фиг. 1) поток находится в критическом состоянии

$$u_c^2 = gh_c \quad (1.2)$$

При заданном удельном расходе q форма свободной поверхности над препятствием, включая глубину h_0 перед препятствием, может быть найдена из (1.1), (1.2). В частности,

$$h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}, \quad J_1 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{h_0^2} + gh_0 = \frac{3}{2} gh_c + \delta \quad (1.3)$$

Таким образом, в первом приближении при заданном удельном расходе q величина J_1 (или глубина h_0) не зависят от формы препятствия, а только от его высоты δ . Неоднородность набегающего потока, а также негидростатичность распределения давления могут внести существенные поправки в полученные соотношения.

Применим модель Серра [5] для построения транскритического потенциального течения над локальным препятствием. С использованием введенных ранее обозначений уравнения стационарного течения во втором приближении записываются в виде

$$hu = q$$

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}hu^2h'' - \frac{1}{6}u^2(h')^2 + g(h+z) \equiv J_2 \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) можно записать в эквивалентной форме

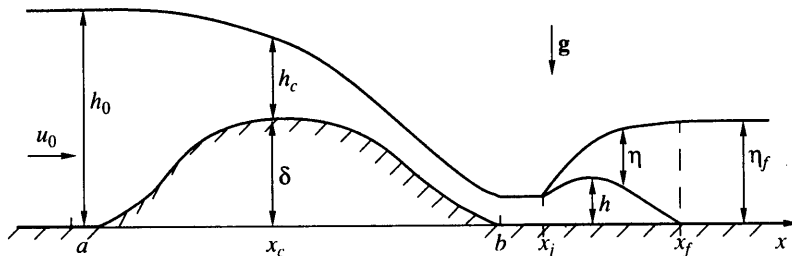
$$\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}h^2uu'' + \frac{1}{2}h^2(u')^2 + g(h+z) \equiv J_2 \quad (1.5)$$

Здесь $J_2 = \text{const}$. Для (1.4) или (1.5) понятие критического сечения, введенного выше, теряет смысл. Поэтому в рамках рассматриваемой модели принципиальным является вопрос о том, какое дополнительное условие вместо (1.2) обеспечивает контроль препятствием течения вверх по потоку. В частности, требуется при заданном удельном расходе q определить постоянную J_2 или начальную глубину h_n и начальную скорость u_n потока. Если решение (1.4) является равновмерным перед препятствием, то

$$J_2 = \frac{1}{2}u_n^2 + gh_n = \frac{1}{2}q^2 / h_n^2 + gh_n$$

Будем считать препятствие локальным, т.е. $z(x) \equiv 0$ при $x \leq a$ и $x \geq b$ (фиг. 1). Форма свободной поверхности в потоке определяется решением дифференциального уравнения

$$\frac{1}{3} \frac{q^2}{h} h'' - \frac{1}{6} \frac{q^2}{h^2} (h')^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{h^2} + g(h+z) - J_2 = 0 \quad (1.6)$$



Фиг. 1. Схема течения

При $z(x) \equiv 0$ решение (1.6) может быть найдено в квадратурах

$$\frac{1}{3h} q^2 (h')^2 = \frac{q^2}{h} - gh^2 + 2J_2 h^2 + C = F(h) \quad (1.7)$$

где C — произвольная постоянная. Условие равномерности потока при $x \rightarrow -\infty$ означает, что $F(h_n) = 0$, $F'(h_n) = 0$. Заметим, что

$$F''(h_n) = 2 \left(\frac{q^2}{h_n^3} - g \right) < 0$$

так как течение перед препятствием докритическое. Поэтому единственно возможным решением (1.7) при $x \leq a$ является $h \equiv h_n$.

Таким образом, для построения решения уравнения (1.6) над препятствием имеем начальные условия

$$h(a) = h_n, \quad h'(a) = 0 \quad (1.8)$$

При $x \geq b$ снова $z(x) \equiv 0$ и уравнение (1.6) сводится к (1.7).

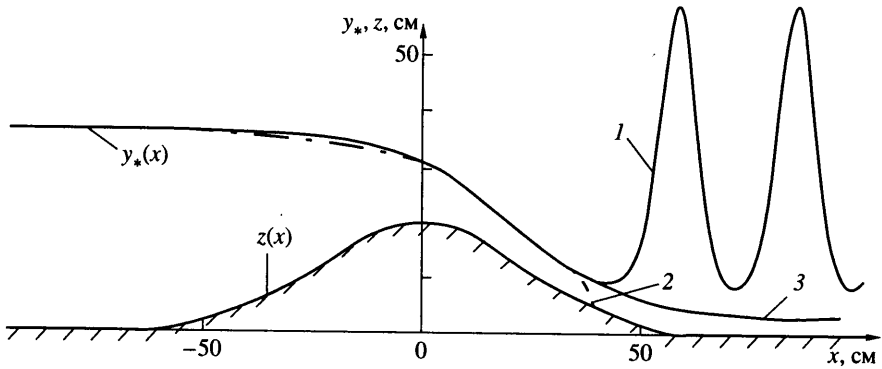
Решение (1.7) либо периодическое, либо неограниченно и непродолжимо на весь интервал (b, ∞) . При этом предельным случаем периодических решений при увеличении периода являются солитонообразные решения [6]. Поэтому решение задачи Коши (1.6), (1.8) либо является непродолжимым, либо выходит на периодическое решение при $x \geq b$. На фиг. 2 показано поведение решений задачи (1.6), (1.8) при различных значениях параметра h_n для удобообтекаемого симметричного препятствия, рассмотренного в [7]

$$q = 1119.7 \text{ см}^2 / \text{с}, \quad z(x) = 20 \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{24} \right)^2 \right) \text{ см}$$

Численные расчеты показывают, что существует критическое значение h_* , такое, что при $h_n > h_*$ решение выходит на периодическое ($h_n = 1.008h_0$, кривая 1). При $h_n < h_*$ решение непродолжимо ($h_n = 1.006h_0$, кривая 2). При $h_n = h_* \approx 1.007h_0$ имеем особое решение, описывающее во втором приближении гладкое транскритическое течение (кривая 3). Заметим, что для удобообтекаемого препятствия, представленного на фиг. 2, кривая 3 весьма близка к решению (1.1), (1.2) для первого приближения мелкой воды, выходящего на уровень h_0 при $x \rightarrow -\infty$ (штрихпунктирная линия).

При обтекании более длинного порога транскритические течения, полученные из первого и второго приближений мелкой воды, уже существенно отличаются, как будет показано ниже.

Первое приближение мелкой воды может быть также использовано для определения внутренней структуры гидравлического прыжка, возникающего в сверхкрити-



Фиг. 2. Расчет на основе второго приближения теории мелкой воды для препятствия, применявшегося в экспериментах [9]: 1 – периодическое решение при $h_n = 1.008$; 2 – непродолжимое решение при $h_n = 1.006$; 3 – гладкое транскритическое решение при $h_n = 1.007$

ческом течении за препятствием в результате трения о дно канала или при воздействии на поток различных форм контроля течения. При этом гидравлический прыжок, переводящий сверхкритическое течение в докритическое, может возникать в течении над ровным дном как достаточно далеко от препятствия, так и начинаться непосредственно над препятствием. Ниже математическая модель гидравлического прыжка [8], развитая для течений над ровным дном, будет распространена на течения в каналах с переменной глубиной.

При математическом моделировании эволюции гравитационных волн в однородной жидкости основная идея состоит во включении в уравнения мелкой воды поверхностного турбулентного слоя, образующегося при обрушении поверхностной волны. Если наряду с толщиной $h = h(x)$ и скоростью $u = u(x)$ слоя потенциальной жидкости, примыкающего ко дну, ввести толщину $\eta = \eta(x)$ и скорость $v = v(x)$ приповерхностного слоя (фиг. 1), то в первом приближении мелкой воды уравнения стационарного течения принимают вид [8]

$$\begin{aligned}
 hu + \eta v &= q, \quad \frac{1}{2}u^2 + g(h + \eta + z) = J_1 \\
 (\eta v)' &= \sigma k^{1/2}, \quad \left(\frac{1}{2}v^2 + g(h + \eta + z) \right)' = \frac{\sigma k^{1/2}}{\eta} (u - v) \\
 v k' &= \frac{\sigma k^{1/2}}{\eta} ((u - v)^2 - (1 + \theta)k)
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь k – удельная кинетическая энергия мелкомасштабного движения в поверхностном турбулентном слое, $z = z(x)$ – форма дна. Коэффициент $\sigma \approx 0.15$ характеризует отношение вертикального и горизонтального масштабов в приближении мелкой воды и может быть исключен из (1.9) соответствующим растяжением переменных. Коэффициент θ характеризует скорость диссипации энергии в приповерхностном турбулентном слое. Случай $\theta = 0$ соответствует бездиссипативной модели.

При $\eta \rightarrow 0$ система (1.9) вырождается. В [8] для горизонтального дна показано, что у подошвы гидравлического прыжка ($x \rightarrow x_j$, $\eta \rightarrow 0$, $v \rightarrow 0$, $h \rightarrow h_j$, $u \rightarrow u_j$) скорость вовлечения конечна, так как

$$k_j = \frac{u_j^2}{1 + \theta}$$

При этом решение (1.9) непрерывно, но его производные имеют особенность ($h'(x) \approx (x - x_j)^{-1/2}$, $\eta'(x) \approx (x - x_j)^{-1/2}$, x_j – координата подошвы гидравлического прыжка). Заметим, что над неровным гладким дном на переднем фронте гидравлического прыжка реализуется та же особенность, что и над горизонтальным дном. Поэтому форма свободной поверхности и распределение основных параметров в гидравлическом прыжке могут быть найдены из (1.9) и представленной выше асимптотики на фронте прыжка. Уравнения (1.9) вырождаются также, когда поверхностный слой достигает дна ($h = 0$). Вовлечение прекращается, и дальнейшая эволюция этого слоя описывается стандартными уравнениями теории мелкой воды вида (1.1), но для переменных η и v .

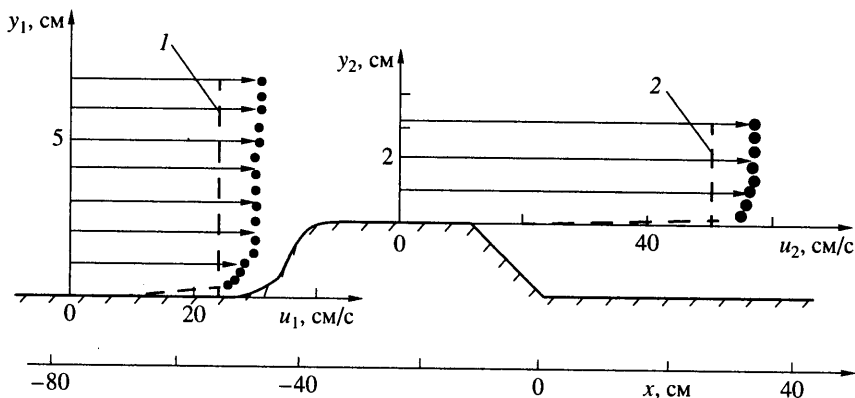
Пусть x_f – точка, в которой поверхностный турбулентный слой касается дна ($h_f = 0$, $x_f \geq b$). Положение переднего фронта скачка x_j над препятствием определяется глубиной η_f , которая поддерживается условиями вниз по потоку (фиг. 1). Варьируя величину η_f , можно изменить положение точки x_f на подветренном склоне препятствия. Такое течение соответствует так называемому течению с подпором. При $x_j \geq b$ имеем отогнанный прыжок, положение которого определяется трением о дно и боковые стенки канала. Возможность применения модели (1.9) для описания структуры гидравлических прыжков за локальным препятствием проиллюстрирована в следующем разделе.

2. Методика эксперимента. Опыты проводились в прямоугольном канале из оргстекла длиной 480 см и шириной 6 см с нулевым уклоном дна. Во входном сечении канала располагалась хонейкомб и перфорированная пластина. Эти устройства значительно сократили длину начального участка, на котором формировалось течение, типичное для бесконечно длинного канала. Порог устанавливался за пределами начального участка. В выходном сечении канала имелась вертикальная пластина, выступающая над дном. Изменением высоты этой пластины регулировалось положение уровня свободной поверхности далеко вниз по потоку за порогом.

Порог изготавливался из оргстекла. Опыты проводились с порогами разной формы и размеров. Далее используются экспериментальные данные только для двух порогов удобообтекаемой формы. Порог 1 имел высоту 2.35 см и длину 49.6 см. Форма этого порога показана на фиг. 3. Его верхняя грань представляла собой горизонтальную плоскость, задняя грань – плоскость, наклоненную к дну канала под углом 11° , а очертание передней грани соответствовало гиперболическому тангенсу. Такое очертание передней грани удобно при численных расчетах. Порог 2 имел высоту 2.45 см и длину 30 см. По форме он отличался от порога 1 только тем, что его передняя грань была очерчена по дуге окружности радиусом 14 см, а не по гиперболическому тангенсу. Этот порог показан на фиг. 4. Предварительные опыты показали, что указанные различия в очертаниях передней грани приводили лишь к малым изменениям профиля свободной поверхности, не выходящим за пределы погрешности измерений.

Расход жидкости измерялся стандартной трубой Вентури, расположенной в подводящем трубопроводе. Для измерения глубины потока в разных точках по длине канала использовались мерные иглы. Информация о средней скорости получалась с помощью стандартной трубки Пито и пьезометров. Среднеквадратичное значение погрешности измерения не превышало 0.5% для расхода, 1% для скорости и 2% для глубины. Для визуализации внутренней структуры течения в поток вводились частицы алюминиевой пудры.

3. Сравнение расчетных и экспериментальных данных. В математических моделях, приведенных в разд. 1, распределение скорости в набегающем потоке предполагается равномерным по ширине канала и по глубине. В реальных течениях профиль скорости неравномерный. На фиг. 3 приведены примеры экспериментально полученных профилей продольной компоненты скорости в двух поперечных сечениях потока:



Фиг. 3. Экспериментальные профили продольной компоненты скорости при $q = 167 \text{ см}^2/\text{с}$; 1 - $\langle u_1 \rangle$, 2 - $\langle u_2 \rangle$

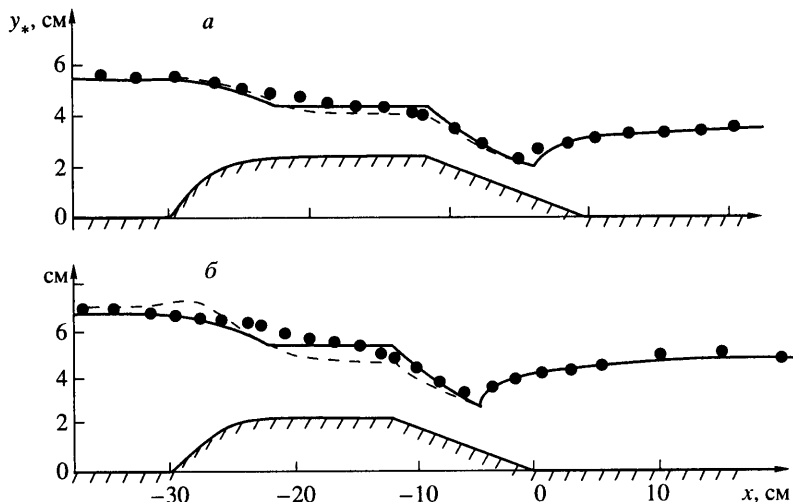
перед порогом, где течение было докритическим, и над порогом, где течение было сверхкритическим. Измерения выполнялись в продольной плоскости симметрии канала. Вертикальными пунктирными линиями показаны значения средней скорости $\langle u \rangle = q/h$, вычисленные по удельному расходу. Именно они фигурируют в математических моделях в предположении, что скорость распределена равномерно. В реальном течении из-за трения о дно и боковые стенки канала имела место значительная неравномерность.

В гидравлике для учета неравномерности распределения скорости, а также потерь энергии вводятся эмпирические коэффициенты. Они называются по-разному в зависимости от принятого их определения [1, 2, 4]. В данной работе при расчетах также использовалась не осредненная скорость $\langle u \rangle$, а несколько большее значение. Соответствующий поправочный множитель $\beta > 1$ уместно назвать коэффициентом формы профиля скорости. Ориентировочно, значение этого коэффициента можно оценить по отношению $\beta \approx (u_m / \langle u \rangle)^2$, где u_m – максимальное значение скорости на свободной поверхности. По экспериментальным данным, приведенным на фиг. 3, такой алгоритм дал значение $\beta_1 = 1.12$ для набегающего потока и $\beta_2 = 1.05$ для течения над порогом.

При расчетах коэффициент формы подбирался из условия, чтобы расчетные глубины перед порогом и в сечении перед гидравлическим прыжком совпадали с их экспериментальными значениями. Для приведенных далее примеров подобранный таким образом коэффициент формы профиля $\beta = 1.1$. Фактически это означает, что при расчетах в формулах (1.1), (1.2), (1.6), (1.9) использовался эффективный удельный расход βq .

На фиг. 4 приведены примеры сравнения расчетных и экспериментальных данных для одного и того же порога 2 при двух значениях удельного расхода. В этих примерах как в расчетах, так и в экспериментах над препятствием имело место транскритическое течение с гидравлическим прыжком, надвинутым на подветренный склон. Граничным условием вниз по потоку поддерживалась заданная глубина η_c .

Из приведенных примеров следует, что первое приближение теории мелкой воды удовлетворительно описывает структуру транскритического течения над протяженным препятствием. Следует отметить, что при $x < x_j$ течение над препятствием при заданном удельном расходе определяется условием (1.2) однозначно. Новым элементом представленной теории является возможность описания в рамках первого приближения теории мелкой воды внутренней структуры гидравлического прыжка как области перехода от сверхкритического течения к докритическому за счет форми-



Фиг. 4. Сравнение расчетных и экспериментальных профилей свободной поверхности при $q = 83$ (а), $167 \text{ см}^2/\text{с}$ (б), точки эксперимент, сплошная линия – первое приближение (формулы (1.1), (1.2) и (1.9)), штриховая линия – второе приближение (1.6)

рования и развития поверхностного турбулентного слоя. Решения (1.9) адекватно передают форму свободной поверхности в развитом гидравлическом прыжке над неровным дном (фиг. 4) всюду, кроме небольшой окрестности переднего фронта прыжка. Численное значение параметра диссипации θ сказывается на форме свободной поверхности в окрестности фронта гидравлического прыжка, но не влияет на структуру прыжка в целом [8]. В представленных на фиг. 4 решениях (сплошные линии при $x > x_j$) принято значение $\theta = 8$.

В отличие от модели (1.1), (1.2) в рамках второго приближения поведение решения (1.6) зависит от формы обтекаемого препятствия, и локальное условие критичности потока (1.2) заменяется требованием существования решения (1.6), переводящего равномерное докритическое течение перед порогом в равномерное сверхкритическое течение за ним. Численные расчеты показывают, что такое решение является особым, разделяющим физически недопустимый класс решений с неограниченными производными и решения, описывающие генерацию периодических подветренных волн за препятствием (фиг. 2). На фиг. 4 особые решения показаны пунктиром.

Вопрос об устойчивости особого решения остается открытым. Различные математические модели, соответствующие второму приближению теории мелкой воды, широко используются для численного построения нестационарной волновой картины при обтекании препятствия двумерным потоком однородной тяжелой жидкости [9]. Расчеты показывают, что при определенных режимах обтекания над препятствием формируется устойчивое квазистационарное транскритическое течение с отогнанным прыжком, при этом вверх по потоку непрерывно генерируются нелинейные волны. Поэтому диапазон применимости особого решения (1.6) должен быть уточнен в дальнейших исследованиях.

Область применимости самой модели (1.4) или (1.5) для течений над неровным дном весьма ограничена. Учет кривизны препятствия во втором приближении теории мелкой воды представляет собой сложную проблему. В рамках первого приближения аналог уравнений мелкой воды с учетом кривизны обтекаемого препятствия исследован в [7, 10].

Заключение. Экспериментальная проверка показала, что предложенные математические модели адекватно описывают транскритическое течение в окрестности удобообтекаемого порога. Особенно удачной оказалась модель гидравлического прыжка.

Одним из интересных результатов является то, что локальное условие критичности потока над гребнем порога, используемое в первом приближении, во втором приближении заменяется условием существования особого решения, описывающего плавный переход от докритического течения к сверхкритическому.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 01-01-00846) и ведущих научных школ России (№№ 00-05-98542, 00-15-96-163).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Киселев П.Г.* Справочник по гидравлическим расчетам. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1957. 352 с.
2. *Chow Ven Te.* Open-Channel Hydraulics. N.Y. etc.: McGraw Hill, 1959. 680 p.
3. *Смыслов В.В.* Теория водослива с широким порогом. Киев: Изд-во АН УССР, 1956. 184 с.
4. *Чугаев Р.Р.* Гидравлика. Л.: Энергоиздат, 1982, 672 с.
5. *Serre F.* Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux // Houille Blanche. 1953. V. 8. № 3. P. 374–388.
6. *Whitham G.B.* Linear and Nonlinear Waves. N. Y.: Wiley. 1974. = *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
7. *Sivakumaran N.S., Tingsanchali T., Hosking R.J.* Steady shallow flow over curved beds // J. Fluid. Mech. 1983. V. 128. P. 469–487.
8. *Ляпидевский В.Ю.* Структура турбулентного бора в однородной жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 2. С. 56–68.
9. *Lee S.-J., Yates G.T., Wu T.Y.* Experiments and analyses of upstream-advancing solitary waves generated by moving disturbances // J. Fluid. Mech. 1989. V. 199. P. 569–593.
10. *Dressler R.F.* New nonlinear shallow-flow equations with curvature // J. Hydraul. Res. 1978. V. 16. № 3. P. 205–220.

Новосибирск

Поступила в редакцию
7.XII.2001