

УДК 533.72.011

© 2002 г. В.Ю. АЛЕКСАНДРОВ

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА НЕЛИНЕЙНЫЙ ЭФФЕКТ ТЕРМОМОЛЕКУЛЯРНОЙ РАЗНОСТИ ДАВЛЕНИЙ

На основе численного анализа не навье-стоксовых уравнений газодинамики медленных изотермических течений газа исследован нелинейный эффект термомолекулярной разности давления, обусловленный большим градиентом температуры боковой поверхности капилляра. Показано существенное отличие величины эффекта от значений, следующих из уравнений Навье – Стокса. Для двух моделей межмолекулярного взаимодействия (максвелловских молекул и твердых сфер) показана возможность квазиодномерной интерпретации эффекта для его оценки при экспериментальном измерении. Дано сопоставление решения релаксационного кинетического уравнения для течения в плоском капилляре при малых значениях числа Кнудсена с решением уравнений газодинамики медленных изотермических течений, и указаны пределы их применимости.

Ключевые слова: термомолекулярная разность давления, барнеттовские температурные напряжения, газодинамика медленных изотермических течений, медленные течения разреженного газа, релаксационные кинетические уравнения.

Движение слабозреженного газа в капиллярах, обусловленное продольным градиентом температуры боковой поверхности капилляра, является одним из примеров медленных изотермических течений газа. В случае малой ($\text{Kn} \ll 1$) разреженности газа, а также при характерных скоростях течения, имеющих порядок $u_* \sim a_* \text{Kn}$ (a_* – характерная скорость звука), естественно использовать газодинамическое описание течений, соответствующее асимптотическому пределу $\text{Kn} \rightarrow 0$. Как показано в [1–4], в рассматриваемом случае медленных течений уравнения Навье – Стокса неправильно описывают течения газа в пределе $\text{Kn} \rightarrow 0$ при наличии конечных $\Delta T_* / T_*$ перепадов температуры, поскольку так называемые температурные напряжения Барнетта [5] в пределе $\text{Kn} \rightarrow 0$ будут того же порядка, что и вязкие, и конвективные члены. В [1–4] показано, что корректный учет действия температурных напряжений приводит к предсказанию возможности обнаружения новых типов течений, в частности нового типа конвекции в отсутствие массовых (в том числе гравитационной) сил, обусловленной действием температурных напряжений.

Следует отметить, что упомянутые выводы о необходимости учета действия температурных напряжений относятся к их действию в объеме газа, которое имеет место только при конечных перепадах температуры и носит существенно нелинейный характер по относительному перепаду температуры $\Theta \sim \Delta T_* / T_*$, $\frac{\partial}{\partial x_j} p_{ij}^T \sim p_* \text{Kn}^2 \Theta^3$,

где p_{ij}^T – тензор барнеттовских температурных напряжений. Иная ситуация рассматривалась в [6, 7], где исследовался вклад барнеттовских напряжений в скорость кинетического скольжения газа у граничной поверхности. Однако в этом случае учитывался линейный по Θ эффект, а характерная скорость течения и поправки к величине вязких напряжений в газе имели следующий порядок малости по величине Kn ($O(\text{Kn}^2)$ и $O(\text{Kn}^3)$ соответственно).

Наряду с изучением свойств уравнений газодинамики медленных неизотермических течений, предложенных в [1–4], для наиболее характерных примеров газодинамических течений [8, 9], а также обобщением этих уравнений для более сложных молекулярных моделей газа (например, для газа с внутренними степенями свободы), важен вопрос о пределах применимости уравнений из [1–4] для описания течений слабо-разреженного газа. С решением этого вопроса связана необходимость построения примера такого течения при конечных числах Kn из решения непосредственно кинетических уравнений для функции распределения и последующего сопоставления полученных значений для макропараметров газа с соответствующими решениями уравнений [1–4]. Единственный до последнего времени пример подобного течения – рассмотренное в [10] локально одномерное течение слаборазреженного газа между двумя разогретыми параллельными поверхностями, где использовались релаксионные кинетические уравнения Крукса [11].

Другой важный вопрос состоит в возможности экспериментального изучения действий температурных барнеттовских напряжений в газе при конечных и достаточно больших значениях перепада температуры. Единственная пока попытка такого изучения реализована в экспериментальной схеме по определению эффекта возникновения термомолекулярной разности давлений в газе внутри капиллярной трубки при наличии большого градиента температуры [12]. В связи с развитием данной экспериментальной схемы возникла потребность в получении достоверных оценок величины эффекта в широком диапазоне значений величины продольного градиента температуры.

В данной работе на основе численного анализа уравнений из [1–4] для течения в цилиндрическом капилляре при больших градиентах температуры его боковой поверхности, с распределением температуры вдоль поверхности, реализуемым в экспериментальной схеме [12], проведено параметрическое исследование величины термомолекулярной разности давлений для газов максвелловских молекул и твердых сфер. Полученные параметрические зависимости используются для построения простой квазиодномерной интерпретации этих зависимостей.

Рассмотрена задача о течении разреженного газа в плоском канале с упомянутым выше характерным профилем температуры граничной поверхности при конечных числах Kn . Полученные значения термомолекулярной разности давлений и распределений макропараметров сопоставляются с аналогичными величинами, определенными из решения уравнений газодинамики [1–4] и уравнений Навье – Стокса для того же плоского канала.

1. Определение термомолекулярной разности давлений в газодинамическом приближении $Kn \rightarrow 0$. *Постановка задачи.* Типичный элемент экспериментальной схемы [12] для определения термомолекулярной разности давлений представляет собой цилиндрический капилляр диаметра D с распределением температуры боковой поверхности

$$T_w(z) = T_1, \quad -L \leq z \leq 0; \quad T_w(z) = T_2, \quad \Delta L \leq z \leq L$$

$$T_w(z) = T_1 + (T_2 - T_1)z, \quad 0 \leq z \leq \Delta L, \quad L \gg \Delta L$$

где z – координата вдоль оси капилляра.

Это распределение температуры моделирует температуру поверхности двух абсолютно теплопроводных трубок с температурами T_1 и T_2 , $T_2 > T_1$, разделенных теплоизолирующей шайбой того же диаметра D , длины ΔL , имеющей конечную теплопроводность, которая обеспечивает постоянный градиент температуры вдоль своей поверхности. При численном моделировании течения в капилляре для исключения разрывов вторых производных скорости скольжения газа вдоль стенок капилляра в профиль температуры вводилась несущественная модификация: на участках $0 \leq z \leq \Delta l$ и $\Delta L - \Delta l/2 \leq z \leq \Delta L + \Delta l/2$ профиль температуры задавался с помощью переходной

функции f_i , так что $T_W(z) = f_i(z/\Delta l_i) + T_1$, $z < \Delta l_i$ и $T_W(z) = T_2 - f_i((\Delta L + \Delta l_i/2 - z)/\Delta l_i)$, обеспечивающей гладкость d^2T/dz^2 .

Наличие градиентного участка в распределении температуры приводит к возникновению температурного скольжения газа, определяемого для газа со степенным потенциалом межмолекулярного взаимодействия таким образом:

$$u_W = \beta T_W^s \frac{dT_W}{dz}$$

где β – коэффициент температурного скольжения.

Течение газа в капилляре в газодинамическом пределе рассматривается с использованием уравнений газодинамики медленных неизотермических течений для простого газа со степенным законом межмолекулярного взаимодействия, которые имеют вид [2]

$$\nabla_i(\rho u_i) = 0$$

$$\nabla_j(\rho u_i u_j) + \nabla_i \Pi = \nabla_j 2 \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^s \mu_\infty [\nabla_i u_j] + \frac{A}{2} \{ T^{2s-2} (s\omega_1 + \omega_3) (\nabla_k T \nabla_k T) -$$

$$- \frac{5 p_\infty T_\infty^s}{\lambda_\infty} (\omega_1 s + \omega_3) T^{s-1} \nabla_k u_k \} \nabla_i T$$

$$[\nabla_i u_j] \equiv \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla_k u_k$$

$$\frac{5}{2} p_\infty \nabla_i u_i = \nabla_i \lambda_\infty \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^s \nabla_i T \quad (1.1)$$

$$\Pi = p_2 + A \left\{ \frac{1}{2} \left(s\omega_1 - \frac{\omega_3}{3} \right) T^{2s-1} (\nabla_k T \nabla_k T) + \frac{5 p_\infty T_\infty^s}{3 \lambda_\infty} \omega_1 \nabla_k u_k \right\}$$

$$A = R \frac{\mu_\infty^2}{p_\infty T_\infty^{2s}}$$

Здесь p_2 – переменная часть давления $p = p_\infty + p_2$, ω_1 , ω_3 , s – параметры, определяемые конкретным видом степенного потенциала межмолекулярного взаимодействия. Уравнения (1.1) дополняются уравнением состояния газа $p = p_\infty/(RT)$.

В уравнениях (1.1) p_∞ , T_∞ , μ_∞ , λ_∞ – давление, температура, вязкость и теплопроводность газа при $z \rightarrow -\infty$, $T_\infty = T_1$. Следует отметить, что уравнения (1.1) описывают течение несжимаемого газа с коэффициентами переноса и объемными силами, зависящими от температуры газа, причем плотность газа является функцией только температуры.

Поскольку искомая величина термомолекулярной разности давлений ΔP_T определяется как разность давлений вне области возмущения состояния газа $\Delta P_T = p(z \rightarrow \infty) - p(z \rightarrow -\infty)$ и $\nabla T_{z \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$, скалярная часть температурных напряжений, объединенная с давлением p_2 , исчезает и $\Pi_{z \rightarrow \pm\infty} = p_{2, z \rightarrow \pm\infty}$. В дальнейшем структура обобщенного давления Π рассматриваться не будет.

Вследствие несжимаемости газа в (1.1) функция Π , как и в задачах в рамках уравнений Навье – Стокса для несжимаемых течений, может быть определена только из совместного решения уравнений сохранения импульса и уравнения неразрывности в (1.1).

Следует добавить, что если формально положить в (1.1) константу $A = 0$, то эти уравнения становятся уравнениями Навье – Стокса для несжимаемого теплопроводного газа с плотностью, обратно пропорциональной температуре.

При переходе к безразмерным переменным с учетом того, что

$$x_i \sim D, u_i \sim \frac{2\mu_1 RT_1}{\rho_i D}, \rho \sim \frac{p_1}{RT_1}, T \sim T_1, \Pi \sim \frac{2\mu_1^2 RT_1}{\rho_1 D^2}$$

и с учетом уравнения состояния газа, уравнения (1.1) примут вид (здесь и далее черта у безразмерных величин опускается)

$$\begin{aligned} \nabla_i \left(u_i \frac{1}{T} \right) &= 0 \\ \nabla_j \left(\frac{1}{T} u_i u_j \right) + \frac{1}{2} \nabla_i \Pi &= \nabla_j T^s [\nabla_i u_j] + A_1 \left\{ - \left(sK_3 - \frac{K_5}{2} \right) T^{2s-2} (\nabla_k T \nabla_k T) + \right. \\ &+ (2sK_3 - K_5) \times T^{s-1} 2 \text{Pr} \frac{u_k \nabla_k T}{T} \left. \right\} \nabla_i T \\ \nabla_i u_i &= \frac{1}{2 \text{Pr}} \nabla_i T^s \nabla_i T, \quad \rho = \frac{1}{T}, \quad A_1 = \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\text{Pr} = \mu C_p / \lambda = 2/3$ – число Прандтля. Константы K_3, K_5 определяются видом степенного потенциала взаимодействия и связаны с константами ω_1, ω_3 в (1.1) следующим образом: $K_3 = \omega_1, K_5 = \omega_{1s} - \omega_3$. Для газа максвелловских молекул $s = 1, K_3 = K_5 = 3$. Для газа твердых сфер $s = 1/2, K_3 = 2.418, K_5 = 0.219$ [5].

Уравнения (1.2) дополняются граничными условиями температурного скольжения

$$u_{w_i} e_{\tau_i} = \kappa T^s \frac{\partial T}{\partial x_i} e_{\tau_i}$$

где $\kappa = 0.5625$ для максвелловского газа и $\kappa = 0.6463$ [13] для газа твердых сфер.

Уравнения (1.2), записанные в цилиндрической системе координат r, φ, z ($\partial/\partial\varphi = 0, r$ – радиальная координата, z – осевая координата), должны быть дополнены следующими граничными условиями:

условиями на бесконечно удаленных от области возмущения газа краях цилиндра

$$\begin{aligned} z \rightarrow -\infty: \quad \Pi &\equiv p_2 = 0, \quad u_r = 0, \quad T = T_1 \\ z \rightarrow \infty: \quad u_r &= 0, \quad u_z = 0, \quad T = T_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

условиями на боковой поверхности цилиндра

$$r = \frac{1}{2}: \quad u_r = 0, \quad u_z = \kappa T^s \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1.4)$$

условиями на оси симметрии цилиндра

$$r = 0: \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r}{r} \right) = 0 \quad (1.5)$$

Метод решения. Система уравнений (1.2) с граничными условиями (1.3) – (1.5) решается методом установления к стационарному решению с введением нестационарных членов $\partial(u_i T^{-1})/\partial t$ и $\partial T/\partial t$ в уравнения импульса и энергии. Конечно-разностная аппроксимация уравнений строится в прямоугольной области $0 \leq r \leq 1/2, -L \leq z \leq L$. Значения $u_{r_{mn}}, u_{z_{mn}}, \Pi_{mn}, T_{mn}$ соответствуют значениям искомых величин в одной и той же точке с координатами r_{mn}, z_{mn} (узлы сетки для различных физических величин не разнесены).

Консервативная конечно-разностная аппроксимация уравнений (1.2) строится интегроинтерполяционным методом, выражающим баланс потоков массы импульса и

энергии через границы объемов, окружающих точку r_{mn} , z_{mn} . При этом конечно-разностные уравнения в операторной форме принимают следующий вид

$$\begin{aligned} \delta(T^{-1}u_z)_{mn} - \tau\Lambda_v^z(T_{\{m,n\}}^k)\delta(T^{-1}\mathbf{u})_{\{m,n\}} + B_+^z\delta\Pi_{\{m,n\}} &= +\tau(\Lambda_v^z(T_{\{m,n\}}^k)(T^{-1}\mathbf{u})_{\{m,n\}}^k - B_+^z\Pi_{\{m,n\}}^k - \\ &- \Lambda_c^z(T_{\{m,n\}}^k, (T^{-1}\mathbf{u})_{\{m,n\}}^k)\mathbf{u}_{\{m,n\}}^k) \\ \delta(T^{-1}u_r)_{mn} - \tau\Lambda_v^r(T_{\{m,n\}}^k)\delta(T^{-1}\mathbf{u})_{\{m,n\}} + B_+^r\delta\Pi_{\{m,n\}} &= +\tau(\Lambda_v^r(T_{\{m,n\}}^k)(T^{-1}\mathbf{u})_{\{m,n\}}^k - B_+^r\Pi_{\{m,n\}}^k - \\ &- \Lambda_c^r(T_{\{m,n\}}^k, (T^{-1}\mathbf{u})_{\{m,n\}}^k)\mathbf{u}_{\{m,n\}}^k) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\delta T_{mn} - \tau\Omega_T(T_{\{m,n\}})\delta T_{\{m,n\}} = \tau(\Omega_T(T_{\{m,n\}})T_{\{m,n\}}^k + \Omega_c(\mathbf{u}_{\{m,n\}}))$$

Операторы Λ_v , Ω_T – конечно-разностные операторы, аппроксимирующие вязкие и теплопроводные члены, Λ_c , Ω_c – аппроксимация соответствующих конвективных членов, $\delta(T^{-1}\mathbf{u}_{\{m,n\}})$, $\delta T_{\{m,n\}}$, $\delta\Pi_{\{m,n\}}$ – приращение значений искомых величин за шаг по времени τ , $\{m, n\}$ – множество узлов расчетной сетки. Несимметричные четырехточечные операторы разности давлений по границе контрольного объема B_+^z, B_+^r действуют на сеточную функцию Π_{ij} следующим образом:

$$\begin{aligned} B_+^z\Pi_{\{m,n\}} &= b_{ij}^z\Pi_{m+i, n+j}, \quad i = -1, 0, 1, 2, \quad j = -1, 0, 1 \\ B_+^r\Pi_{\{m,n\}} &= b_{ij}^r\Pi_{m+i, n+j}, \quad i = -1, 0, 1, \quad j = -1, 0, 1, 2 \end{aligned}$$

Контрольный объем для уравнения неразрывности отличен от контрольного объема для других уравнений и ориентирован (кроме смежных с границей узлов) противоположно ориентации операторов B_+^z, B_+^r . Разностная аппроксимация уравнения неразрывности имеет вид

$$M_{i,j}(r_{\{m,n\}})\delta(T^{-1}\mathbf{u})_{m+i, n+j} = 0, \quad i = -1, 1, \quad j = -1, 0 \quad (1.7)$$

Разностные операторы в (1.6) и (1.7) аппроксимируют исходные дифференциальные уравнения (1.2) со вторым порядком точности.

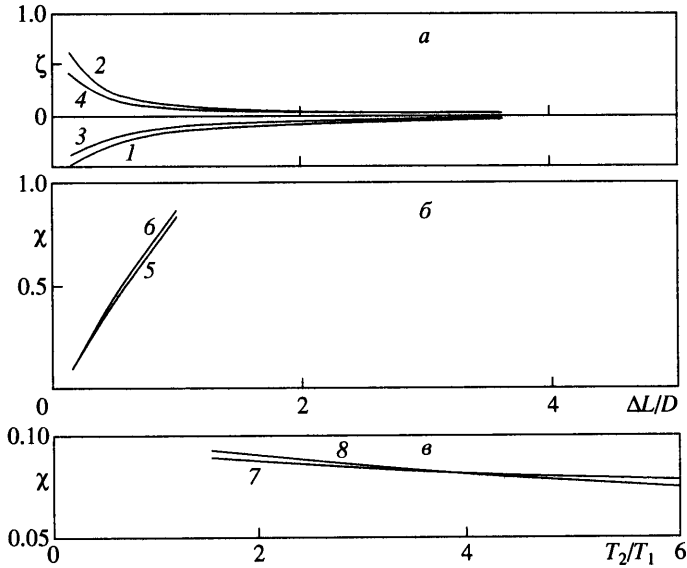
На каждом шаге по времени новые значения величин $\Delta(T^{-1}\mathbf{u}_{\{m,n\}})$, $\delta T_{\{m,n\}}$, $\delta\Pi_{\{m,n\}}$ определяются из совместного (с итерациями по нелинейности) решения уравнений (1.6), (1.7). Линейная система на каждом шаге внутренней итерации решается методом блочного исключения с частичным выбором главного элемента внутри каждого блока. При этом используется предварительное упорядочивание блоков для минимизации матрицы блочного разложения.

В расчетах использовалась неравномерная по z сетка со сгущением узлов в области больших градиентов температуры поверхности T_W и растяжением при выходе к границам $z = \pm L$.

Методические расчеты на различных сетках (200×80, 200×40, 300×40) и при различных значениях $L = 1.5-3$ позволяют гарантировать достаточную точность результата. Сходимость процесса установления контролировалась по величинам

$$\begin{aligned} \max_{m,n} |\delta(T^{-1}\mathbf{u})_{m,n}| \quad (\tau \max_{m,n} |(T^{-1}\mathbf{u})_{m,n}|)^{-1} < \epsilon, \quad \max_{m,n} |\delta T_{m,n}| \quad (\tau \max_{m,n} |T_{m,n}|)^{-1} < \epsilon, \\ \max_n |\delta\Pi_{M,n}| \quad (\tau \max_n |\Pi_{M,n}|)^{-1} < \epsilon, \quad \epsilon = 10^{-4}, \quad m = 1, M, \quad n = 1, N \end{aligned}$$

Результаты расчетов. Параметрические расчеты величины ΔP_T для $T_2 = 2.5$ проводились для различных длин градиентного участка профиля распределения температуры поверхности $\Delta L/D = 1, 0.45, 0.15$ и для обеих моделей межмолекулярного взаимодействия ($\mu \sim T$ и $T^{1/2}$). Значения $\Delta L/D = 1$ и 0.15 при $T_2 = 2.5$ соответствуют параметрам капиллярных элементов, используемых в экспериментальной схеме [12].



Фиг. 1. Влияние нелинейности и температурных напряжений p_{ij}^T на ΔP_T для максвелловских молекул (кривые 1, 2, 5, 7) и твердых сфер (3, 4, 6, 8); а – кривые 1, 3 – решение уравнений (1.2); 2, 4 – решение уравнений Навье – Стокса, $T_2/T_1 = 3$; б – решение (1.2) при $T_2/T_1 = 3$; в – $\Delta L = 0.15/D$

Для выявления нелинейного характера эффекта термомолекулярной разности давлений при больших градиентах температуры значения ΔP_T , полученные в расчетах, отнесены к значениям $\Delta P_T \equiv \Delta p_{ld}$ в приближении малых градиентов температуры, которое приводит к локально-одномерной задаче

$$\Delta p_{ld} = p(z \rightarrow \infty) - p(z \rightarrow -\infty), \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad u_r = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$T^s(z) \left(\frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_z}{dr} \right) = \frac{1}{2} \frac{dp}{dz}, \quad u_z = \kappa T^s \frac{dT}{dz}$$

Эти уравнения, дополненные условием равенства нулю полного расхода газа

$$\int_0^{1/2} u_z(r) T^{-1}(r) r dr = 0$$

приводят к соотношению

$$\Delta p_{ld} = 0.5625 \cdot \frac{32}{3} (T_2^3 - T_1^3)$$

для максвелловских молекул и

$$\Delta p_{ld} = 0.6463 \cdot 16 (T_2^2 - T_1^2)$$

для газа твердых сфер. Таким образом, локально-одномерная модель в некоторой степени учитывает характер модели межмолекулярного взаимодействия.

Расчет ΔP_T проводился как для полных уравнений (1.2) при $A_1 = 1/4$ в (1.2), так и для уравнений Навье – Стокса при $A_1 = 0$. На фиг. 1, а кривые 1, 2 представляют зависимости $\zeta = (\Delta P_T - \Delta p_{ld})/\Delta p_{ld}$ для уравнений (1.2) и Навье – Стокса соответственно от значений $\Delta L/D$ для максвелловских молекул. Кривые 3, 4 представляют те же зависимости для твердых сфер. Сопоставление кривых, определяемых решением уравне-

ний (1.2), и кривых, соответствующих уравнениям Навье – Стокса, показывает, что нелинейность в этих моделях проявляется существенно по-разному. Это приводит к изменению знака нелинейной добавки к величине ΔP_T относительно Δp_{1d} при переходе от навье-стоксовой газодинамики к уравнениям (1.2), учитывающим действие температурных напряжений. Впервые на возможность такого проявления нелинейности в эффекте термомолекулярной разности давлений было указано в [14].

Кроме того, ход зависимости ζ от величины $\Delta L/D$ для уравнений (1.2) (кривые 1, 3) показывает, что для $\Delta L/D \leq 0.2$ наступает определенная стабилизация роста ζ , обусловленная уменьшением градиента температуры в основном объеме газа в капилляре из-за теплопроводности газа, и дальнейший рост градиента температуры боковой поверхности капилляра при уменьшении $\Delta L/D$ не приводит к значительному росту величины ζ .

Для выявления влияния температурных напряжений на величину ΔP_T уместно отнести $\Delta \zeta = \zeta_1 - \zeta_N$ (ζ_1 – величина, следующая из решения (1.2), ζ_N – из решения уравнений Навье – Стокса) к величине, определяемой из простой одномерной модели учета вклада температурных напряжений в ΔP_T

$$\Delta p^T = -A_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dT_W}{dz} \right)^3 \left(sK_3 - \frac{K_5}{2} \right) T_W^{2s-2} dz \quad (1.8)$$

Для максвелловских молекул

$$\Delta p^T = -\frac{3}{8} \left(\frac{T_2 - T_1}{\Delta L} D \right)^3 \frac{\Delta L}{D}$$

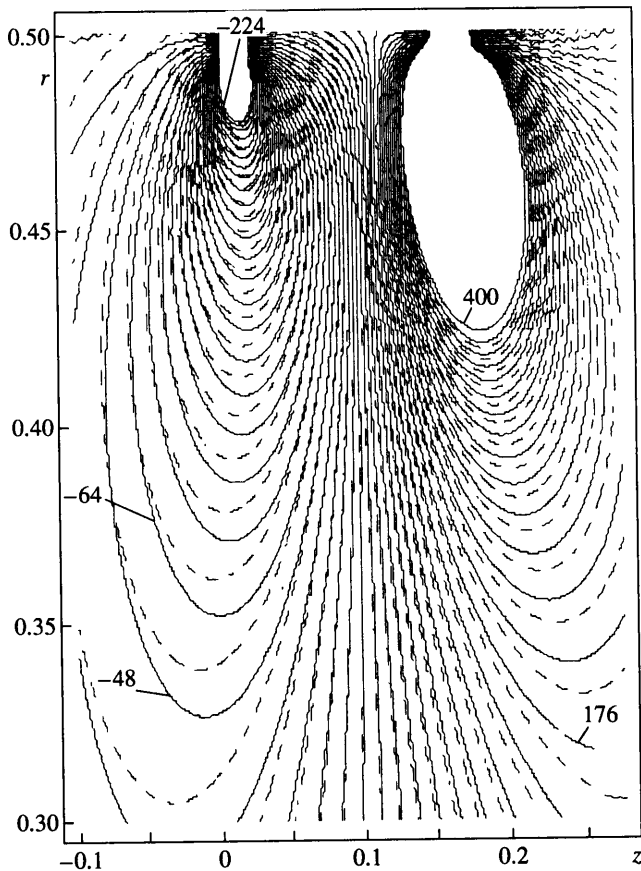
для твердых сфер

$$\Delta p^T = -\frac{1}{4} 1.0995 \left(\frac{(T_2 - T_1) D}{\Delta L} \right)^2 \ln \frac{T_2}{T_1}$$

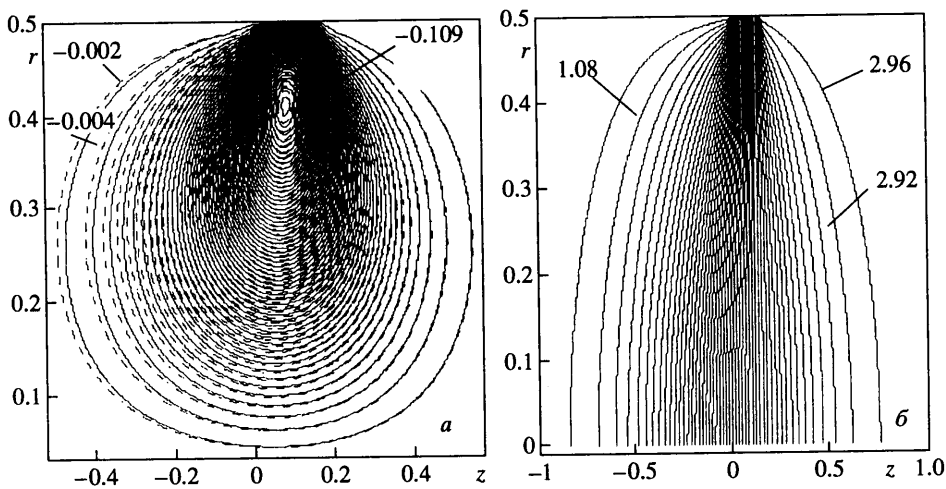
На фиг. 1,б кривые 5 ($\chi = \Delta \zeta \Delta p_{1d} (\Delta p^T)^{-1}$ в случае максвелловских молекул) и 6 (твердые сферы) достаточно близки друг к другу. Это показывает пригодность квазиодномерной интерпретации влияния температурных напряжений на величину ΔP_T с помощью (1.8), поскольку (1.8) хорошо отражает их вклад в нелинейный эффект термомолекулярной разности давлений для различных степенных моделей межмолекулярного взаимодействия, несмотря на то что само течение в цилиндрическом капилляре существенно двумерно.

Для капилляра с градиентным участком $\Delta L/D = 0.15$ проведен расчет ΔP_T при $T_2 = 1.5, 2.5, 3, 4, 5$ и 6. Кривые 7 и 8 на фиг. 1,б представляют зависимость $\chi = \Delta \zeta \Delta p_{1d} (\Delta p^T)^{-1}$ от отношения температур $T_R = T_2/T_1$ для максвелловских молекул и твердых сфер соответственно. Хорошее совпадение этих кривых в основной части диапазона $1.5 \leq T_R \leq 6$ свидетельствует о пригодности формулы (1.8) для интерпретации вклада температурных напряжений в величину ΔP_T в этом весьма широком диапазоне значений отношения температур. Существенно двумерный характер течений в капилляре можно видеть на фиг. 2 и 3, где представлены линии тока, изомеры и изобары для движения газа в капилляре при $\Delta L/D^{-1} = 0.15$ и $T_2 = 3$. Сравнения линий тока, определенных из уравнений (1.2) и уравнений Навье – Стокса, показывают, что действие температурных напряжений влияет не только на величину ΔP_T , но и на поле скоростей в газе.

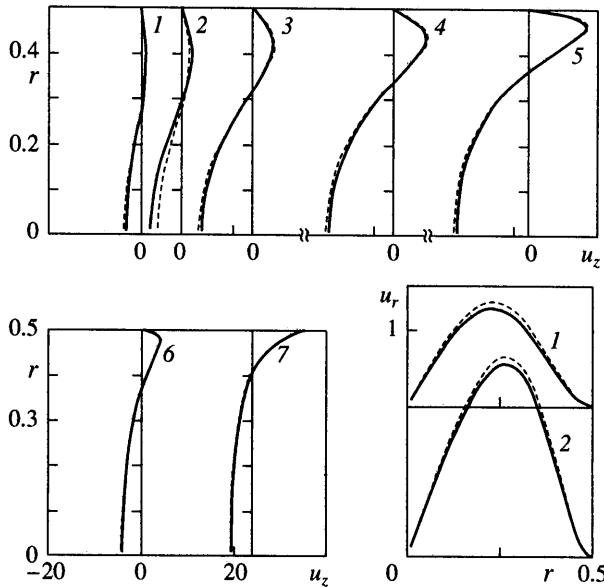
На фиг. 4 представлены профили продольной и радиальной скоростей в различных сечениях $z = \text{const}$ вблизи градиентного участка поверхности капилляра. Следует отметить, что отличия в скоростях от решения уравнений Навье – Стокса, обусловленные действием температурных напряжений, практически не сказываются на пере-



Фиг. 2. Изолинии $\Pi = \text{const}$ в цилиндрическом канале. Сплошные линии – решение уравнений (1.2); пунктирные – решение уравнений Навье – Стокса. Здесь и далее на фигурах $T_2/T_1 = 3$, $\Delta L = 0.15/D$



Фиг. 3. Картина течения газа в цилиндрическом канале: *a* – линии тока: сплошные – решение уравнений (1.2), пунктирные – решение уравнений Навье – Стокса; *б* – изотермы: сплошные – решение уравнений (1.2), пунктирные – решение уравнений Навье – Стокса



Фиг. 4. Профили продольной u_z и поперечной u_r скоростей в цилиндрическом канале в сечениях $z = -0.3$ (1), -0.2 (2) -0.12 (3), -0.07 (4), -0.02 (5), 0 (6), 0.05 (7). Сплошные линии – решение уравнений (1.2), пунктирные – решение уравнений Навье – Стокса

распределении температуры в газе за счет конвективного переноса тепла в течениях данного типа.

2. Пределы применимости уравнений газодинамики медленных неизотермических течений. *Постановка задачи и метод решения.* Непосредственное решение кинетических уравнений для медленных течений разреженного газа при конечных, но малых значениях Kn представляет большую трудность вследствие малости величин искомых макропараметров (скорость $u \sim O(Kn)$, $\Delta r \sim O(Kn^2)$). Поэтому применение для этих целей хорошо известного метода прямого статистического моделирования требует громадного количества испытаний для набора статистики, обеспечивающей требуемую точность. В связи с этим возникает необходимость обращения к регулярным методам решения кинетических уравнений. Однако для кинетических уравнений с бальмановским интегралом столкновения в процессе решения необходимо запоминание значений пятимерной (для плоских и осесимметричных задач) молекулярной функции распределения в большом количестве узлов пятимерной сетки, необходимых для гарантии нужной точности при малых значениях Kn .

В связи с указанными обстоятельствами в качестве кинетических уравнений использовались модельные кинетические уравнения релаксационного типа [11]. Полезным свойством этих уравнений при их решении итерационными методами является возможность запоминания на каждой итерации только значений макропараметров, а не всей функции распределения.

Использовались релаксационные кинетические уравнения Крука и S -модель Шахова [11], которые удовлетворительно описывают состояние разреженного газа.

Релаксационные кинетические уравнения записываются следующим образом

$$\xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{p}{\mu} (f^+ - f) \quad (2.1)$$

где $f(\mathbf{x}, \xi)$ – функция распределения молекул по скоростям, f^+ – функция распределения молекул после столкновения, p – давление, μ – вязкость газа. В уравнении

Крука f^+ – локально максвелловская функция распределения

$$f^+ = f_M(\mathbf{x}, \xi) = n(\mathbf{x})(2\pi RT(\mathbf{x}))^{-3/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2RT(\mathbf{x})}\right)$$

В S-модели Шахова

$$f^+(\mathbf{x}, \xi) = f_M(x, \xi) \left[1 + (1 - \text{Pr}) \frac{4}{5} S_i \frac{c_i}{(2RT)^{1/2}} \left(\frac{c^2}{2RT} - \frac{5}{2} \right) \right]$$

$$c_i = \xi_i - u_i, \quad S_i = \frac{2q_i}{\rho(2RT)^{3/2}}, \quad q_i = \int \frac{m}{2} c_i c^2 f d\xi$$

При переходе к безразмерным переменным с учетом $\xi_i \sim (2RT_*)^{1/2}$, $f \sim n_*(2\pi RT_*)^{-3/2}$, $p \sim p_*$, $\mu \sim \mu_*$, $L \sim D$ уравнение (2.1) примет для безразмерных величин вид

$$\xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\alpha}{\tau} (f^+ - f) \quad (2.2)$$

где $\alpha = p_* D \mu_*^{-1} (2RT_*)^{-1/2}$ – безразмерный параметр, $1/\tau = p/\mu$ – безразмерная частота столкновения. Параметр α связан с числом Кн: $\alpha^{-1} = 5/8 \pi^{1/2}$ Кн.

Итерационный процесс, позволяющий не запоминать функцию распределения на каждой итерации, может быть представлен следующим образом

$$\xi_i \frac{\partial f^{k+1}}{\partial x_i} + \frac{1}{\tau^k} f^{k+1} = \frac{1}{\tau^k} f^+(n^k, T^k, \mathbf{u}^k) \quad (2.3)$$

где (n^k, T^k, \mathbf{u}^k) – величины макропараметров на k -й итерации.

Построение такого процесса не избавляет, однако, от интегрирования на каждом шаге итерации уравнения (2.3) для каждого узлового значения скорости $\xi_{i(m,n)}$ в дискретном пространстве скоростей.

Ввиду большой размерности кинетического релаксационного уравнения в цилиндрической системе координат ($f = f(x, \xi_r, \xi_z, \xi^2)$) и большого в связи с этим объема вычислений в данной работе вопрос о пределах применимости уравнений (1.2) рассматривался для эффекта термомолекулярной разности давлений в плоском канале. Соотношение между значениями величины ΔP_T в газодинамическом пределе для плоской и цилиндрической геометрии рассмотрено далее при обсуждении полученных результатов расчета.

В задаче о течении разреженного газа в плоском канале с распределением температуры на границе, совпадающем с рассмотренным в разделе 1 для цилиндрической задачи, уравнения (2.2) дополняются граничными условиями для функции распределения

$$f(y = \frac{1}{2}, z, \xi_y < 0, \xi_z) = n_w(z)(\pi T)^{-3/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{T_w(z)}\right)$$

где $n_w(z)$ – плотность отраженных молекул газа. Это условие диффузного отражения молекул газа от поверхности.

Условия на краях канала для $z \rightarrow \pm \infty$

$$z \rightarrow -\infty: f(\xi_y, \xi_z > 0) = n_1(\pi T_1)^{-3/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{T_1}\right)$$

$$z \rightarrow -\infty: f(\xi_y, \xi_z < 0) = n_2(\pi T_2)^{-3/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{T_2}\right)$$

Условие зеркальной симметрии при $y = 0$

$$y = 0: f(z, \xi_y > 0, \xi_z) = f(z, \xi_y < 0, \xi_z)$$

Безразмерные температуры на краях $T_1 = 1$ и $T_2 > T_1$. Распределение $T_w(z)$ совпадает с тем, которое использовалось в разделе 1 при $T_2 = 3$. Длина градиентного участка $\Delta L = 0.15 D$.

Уравнения (2.3) аппроксимировались на неравномерной разностной сетке в плоскости (y, z) , сжатой в области больших градиентов и растянутой при больших z . Для лучшей аппроксимации уравнения (2.3) в кнудсеновском слое вводилось дополнительное сжатие сетки в пристеночной области.

Уравнение (2.3) аппроксимировалось консервативной конечно-разностной схемой для гиперболических уравнений первого порядка. Интегрирование этих уравнений велось в направлении, учитывающем знаки ξ_y и ξ_z . Для $\xi = (\xi_y, \xi_z)$ вводилась сетка в пространстве скоростей, соответствующая значениям корней полиномов Эрмита $H_{2n}(\xi_x) \cdot H_{2n}(\xi_y)$, ортогональных с весом $\exp(-\xi_x^2 - \xi_y^2)$, который соответствует максвелловской функции распределения при $T = T_1 = 1$. Такой выбор узлов обусловлен близостью f к f_M при малых значениях Kn и близостью течения к течению сплошной среды в первую очередь в холодной части течения, где $T \sim T_1$, поскольку локальное число Kn для обеих используемых кинетических моделей $\text{Kn} \sim T^{3/2} \text{Kn}(T_1)$.

Сходимость итераций контролировалась по величине $\max_n |\delta p_{Mn}| / \max_n |p_{Mn}|$, где $p_{mn}, m = 1, M; n = 1, N$ – сеточная функция давления газа в канале.

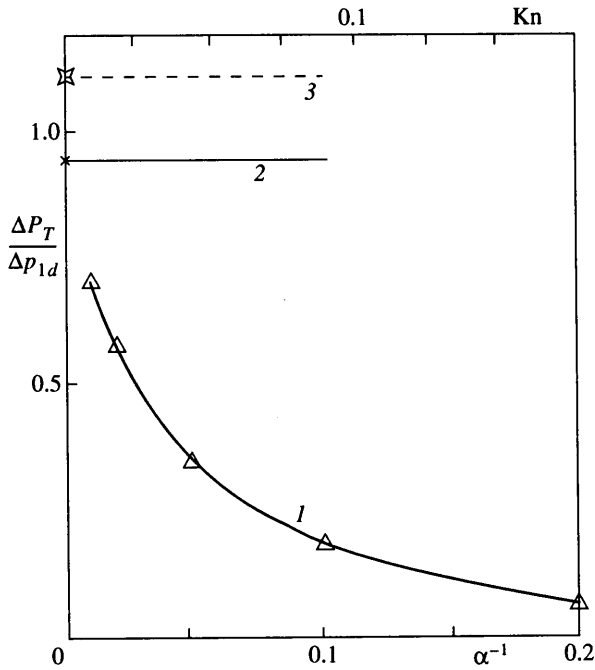
Результаты решения задачи при малых Kn . Проведены параметрические расчеты ΔP_T в канале с $T_1 = 1, T_2 = 3$ и длиной градиентного участка $\Delta L = 0.15 D$ в диапазоне чисел $\text{Kn} = 0.01-0.5$. Для сопоставления результатов решения кинетических уравнений (и уменьшения зависимости этих результатов от конкретного вида кинетической релаксационной модели, а также от специфики плоской задачи) полученные значения величины ΔP_T относились к $\Delta P_T \equiv \Delta p_{1d}$ в локально-одномерном приближении малых градиентов температуры, модифицированном для плоского случая и с соответствующим выбранной релаксационной модели коэффициентом вязкости. Для модели Крука

$$\Delta p_{1d} = 2 \cdot 0.383(T_2^3 - T_1^3)\alpha^{-2}$$

Для S-модели

$$\Delta p_{1d} = 2 \cdot 0.56(T_2^3 - T_1^3)\alpha^{-2}$$

Величины $\Delta P_T / \Delta p_{1d}$ для уравнения Крука и S-модели при $\text{Kn} < 0.05$ практически совпадают. На фиг. 5 представлена зависимость $\Delta P_T / \Delta p_{1d}$ в диапазоне чисел $\text{Kn} = 0.01-0.1$ (кривая 1). Величины ΔP_T , полученные из решения кинетических релаксационных уравнений, сопоставлены с величиной ΔP_T для того же плоского канала, полученной из решения уравнений (1.2), а также уравнений Навье – Стокса. Следует особо подчеркнуть, что в этих уравнениях, следующих из (1.2) для плоского случая, коэффициенты вязкости, теплопроводности, а также коэффициенты в выражении для температурных напряжений приравнялись тем значениям, которые следуют из



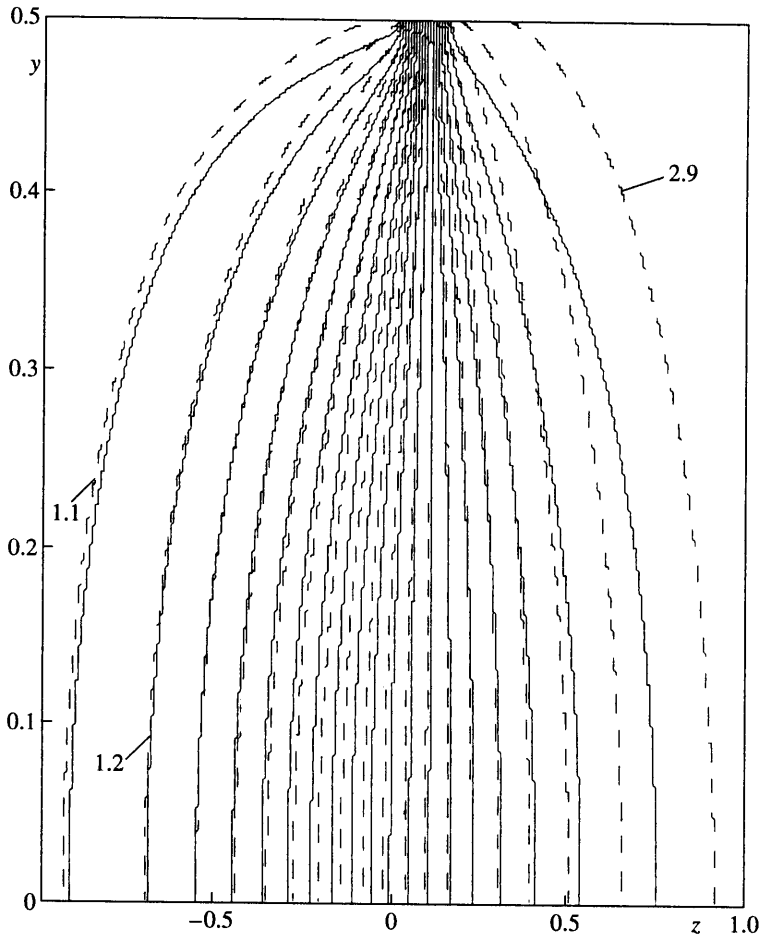
Фиг. 5. Зависимость ΔP_T от Kn для плоского канала: 1 – решение релаксационных кинетических уравнений; 2 – решение уравнений (1.2), 3 – решение уравнений Навье – Стокса

формальной теории Чепмена – Энскога для соответствующих релаксационных кинетических уравнений. Для S -модели эти коэффициенты совпадают с коэффициентами для газа максвелловских молекул с числом Прандтля $Pr = 2/3$. Для модели Крука в (1.2) в первом слагаемом в выражении для $\partial p_{ij} / \partial x_j$ множитель перед $(\nabla T)^2$ равен 1 вместо $3/2$.

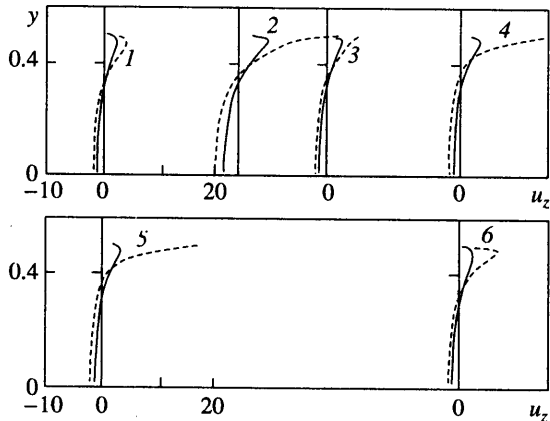
Для величины $\Delta P_T / \Delta p_{1d}$ газодинамические уравнения (1.2), следующие из обеих моделей, дали практически одно и то же значение, представленное на фиг. 5 горизонтальной прямой 2. Более того, это значение совпало с полученным при анализе задачи с цилиндрической геометрией (раздел 1), что позволяет осуществлять простой пересчет величины ΔP_T с одной геометрии на другую.

Характер зависимости $\Delta P_T / \Delta p_{1d}$ от Kn свидетельствует о том, что к своему предельному значению при $Kn \rightarrow 0$ эта величина стремится с отличной от нуля производной, и область значений чисел Kn , где бы кривая 1 была асимптотически близка к предельной прямой 2, очень мала ($Kn \leq 0.001$). Такое поведение величины $\Delta P_T / \Delta p_{1d}$ при малых Kn объясняется спецификой данного течения, в котором наряду с обычным температурным скольжением и действием температурных напряжений имеют место эффект скольжения второго порядка, а также напряжения следующего по числу Kn порядка малости, что в совокупности и обеспечивает конечный наклон кривой 1.

Для демонстрации того, что течение в диапазоне чисел $Kn \leq 0.02$ близко к течению сплошной среды, на фиг. 6 представлены изотермы газа в плоском канале при $\alpha^{-1} = 0.01$, полученные как из решения кинетических уравнений, так и уравнений (1.2). Представленные на фиг. 7 профили продольной скорости, полученные при помощи обоих подходов, также достаточно близки.



Фиг. 6. Изотермы газа в плоском канале при $\alpha^{-1} = 0.01$. Сплошные кривые – решение уравнений (1.2), пунктирные – решение релаксационных кинетических уравнений (S – модель)



Фиг. 7. Профили продольной скорости в плоском канале при $\alpha^{-1} = 0.01$ в сечениях $z = 0$ (1), 0.01 (2), 0.02 (3), 0.09 (4), 0.12 (5) и 0.18 (6); сплошные кривые – решение релаксационного кинетического уравнения (S – модель), штриховые – решение уравнения (1.2)

Заклучение. С помощью численного анализа уравнений газодинамики медленных неизотермических течений, предложенных в [1–4], и уравнений Навье – Стокса проведено параметрическое исследование нелинейного эффекта термомолекулярной разности давлений для достаточно широкого диапазона характерных перепадов температуры и температурных градиентов. Рассмотрено влияние на величину эффекта различных моделей межмолекулярного взаимодействия. Предложена квази-одномерная интерпретация влияния температурных напряжений на рассматриваемый эффект, пригодная для получения оценок величины разности давлений для слабо-разреженного газа.

Сопоставление решений газодинамических уравнений для определения термомолекулярной разности давлений с решением кинетических (релаксационных) уравнений показало, что уравнения, предложенные в [1–4] (уравнения (1.1) в данной работе), становятся достаточно точной моделью для описания нелинейного эффекта термомолекулярной разности давлений лишь для очень малых значений $K_p \sim 0.001$.

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 99-01-00154).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галкин В.С., Коган М.Н., Фридлиндер О.Г. О некоторых кинетических эффектах в течениях сплошной среды // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 13–21.
2. Галкин В.С., Коган М.Н., Фридлиндер О.Г. О свободной конвекции в газе в отсутствие внешних сил // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 3. С. 98–107.
3. Галкин В.С., Фридлиндер О.Г. О силах на тела в газе, обусловленных барнеттовскими напряжениями // ПММ. МЖГ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 271–283.
4. Коган М.Н., Галкин В.С., Фридлиндер О.Г. О напряжениях, возникающих в газах вследствие неоднородности температуры и концентрации // Успехи физ. наук. 1976. Т. 119. Вып. 1. С. 111–125.
5. Chapman S., Cowling T.G. The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. Cambridge: Univ. Press, 1952. = Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
6. Sone Y. Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary 1 // Rarefied Gas Dynamics. Proc. 6th. Intern. Symp. / Ed. L. Trilling et al., N. Y.-L.: Acad. Press, 1969. V. 1. P. 243–253.
7. Sone Y. Flow induced by thermal stress in rarefied gas // Phys. Fluids. 1972. V. 15. № 8. P. 1418–1423.
8. Галкин В.С., Фридлиндер О.Г., Царькова Г.Е. Примеры термострессовой конвекции // Учен. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 5. С. 60–65.
9. Борис А.Ю., Фридлиндер О.Г. Медленные течения газа около сильно нагретой или охлажденной сферы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 6. С. 170–175.
10. Александров В.Ю., Фридлиндер О.Г. Течения слабо-разреженного газа между параллельными неравномерно нагретыми пластинами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 1. С. 115–121.
11. Шахов Е.М. Метод исследования движений разреженного газа. М.: Наука, 1974. 207 с.
12. Alexandrov V., Boris A., Freedlander O. et al. Thermal stress effect and its experimental detection // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 20th Intern. Symp. / Ed. Ching Shen. Pekin: Univ. Press, 1997. V. 1. P. 79–84.
13. Ohwada T., Sone Y., Aoki K. Numerical analysis of the shear and thermal creep flows of a rarefied gas over a plane wall on the basis of the linearized Boltzmann equation for hard-sphere molecules // Phys. Fluids. A. 1989. V. 1. № 9. P. 1588–1599.
14. Перминов В.Д., Фридлиндер О.Г. О влиянии температурных напряжений на термомолекулярную разность давлений // Тр. ЦАГИ. 1990. Вып. 2436. С. 120–126.

Москва

Поступила в редакцию
11.VII.2001