

УДК 533.6.011.55+532.526

© 2002 г. Г.Н. ДУДИН, В.Я. НЕЙЛАНД

## ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ ОБТЕКАНИЯ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА ПРИ НАЛИЧИИ ОБЛАСТЕЙ ЗАКРИТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Рассмотрено обтекание плоского треугольного крыла на режиме сильного взаимодействия пограничного слоя с внешним сверхзвуковым потоком. Аналитическое исследование проведено при использовании "ньютоновского" предельного перехода, при котором величина показателя адиабаты стремится к единице, а значения чисел Маха и Рейнольдса – к бесконечности. Приведена классификация возможных режимов течения при разных значениях удлинения крыла. Для случая обтекания холодного крыла с достаточно большим удлинением, когда в пограничном слое поперечные токи малы, получено аналитическое выражение с точностью до второго приближения для определения линии перехода от закритического к докритическому течению. Проведено сравнение с результатами численных расчетов.

*Ключевые слова:* пограничный слой, треугольное крыло, сильное взаимодействие, гиперзвуковой поток.

При обтекании гиперзвуковым потоком на режиме сильного вязкого взаимодействия холодного плоского треугольного крыла при значениях угла стреловидности  $\beta$  передней кромки меньше критического в пограничном слое возникают области закритического и докритического течения [1, 2]. В первой из них возмущения не распространяются вверх по потоку и реализуется автомодельное течение, соответствующее обтеканию полубесконечной скользящей пластины. С увеличением угла стреловидности размер областей с закритическим режимом течения, расположенных около передних кромок, уменьшается и при достижении критического значения на всем крыле реализуется докритический режим, в котором возмущения распространяются от плоскости симметрии крыла вплоть до передних кромок. В общем случае указанное течение описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных. Численные решения соответствующей краевой задачи показали [3], что значение координаты перехода зависит не только от угла стреловидности  $\beta$ , но и от величины показателя адиабаты  $\gamma = C_p/C_v$  ( $C_p$  и  $C_v$  – соответственно удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме). Уменьшение параметра  $\varepsilon = \gamma - 1$  приводит к значительному увеличению протяженности областей закритического течения [3].

В настоящей работе в основном исследуется обтекание холодных треугольных крыльев с удлинением порядка единицы в случае, когда величина  $\varepsilon$  является асимптотически малой.

1. Рассматривается симметричное обтекание полубесконечного треугольного крыла на режиме сильного вязко-невязкого взаимодействия. Предполагается, что температура его поверхности  $T_w$  мала по сравнению с температурой торможения  $T_0$  набегающего потока и параметр  $\varepsilon$  асимптотически стремится к нулю. Газ считается совершенным с постоянными значениями  $C_p$  и  $C_v$  и вязкостью, линейно зависящей от температуры  $\mu/\mu_\infty = C_\infty T^\circ/T_\infty$ , где  $C_\infty = \text{const}$ , а индекс  $\infty$  обозначает параметры в невозмущенном потоке. Компоненты вектора скорости  $u^\circ$ ,  $v^\circ$ ,  $w^\circ$  направлены соответственно вдоль осей  $x^\circ$ ,  $y^\circ$ ,  $z^\circ$  декартовой системы координат, начало которой распо-

ложено в вершине крыла с полууглом  $\omega_0$ . Удлинение крыла  $s = \text{tg}\omega_0$ . В невозмущенном потоке  $u_\infty$  – скорость,  $\rho_\infty$  – плотность и  $g_\infty$  – энтальпия торможения стремятся к постоянным значениям, когда число Маха  $M_\infty \rightarrow \infty$ . В этом случае  $p_\infty$  – давление,  $a_\infty$  – скорость звука и  $T_\infty$  – температура стремятся к нулю.

Согласно теории малых возмущений [4] при  $M_\infty \gg 1$  и безразмерной толщине ламинарного пограничного слоя  $\delta \ll 1$ , в случае выполнения предположения о сильном скачке  $M_\infty \delta \gg 1$  индуцированное давление имеет порядок  $p^\circ \sim \rho_\infty u_\infty^2 \delta^2$ . Статическая энтальпия в пограничном слое  $h^\circ \sim u_\infty^2 / 2$ . Тогда для плотности газа в пограничном слое получаем оценку

$$\frac{\rho^\circ}{\rho_\infty} \sim \frac{p^\circ h_\infty}{p_\infty h^\circ} \sim \frac{\rho_\infty u_\infty^2 \delta^2}{\rho_\infty} \frac{a_\infty^2}{(\gamma - 1) u_\infty^2} \sim \delta^2 \varepsilon^{-1} \quad (1.1)$$

Для оценки толщины  $\delta$ , приравнявая порядки главных вязких и инерционных членов, получаем

$$\rho^\circ u^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial x^\circ} \sim \frac{\partial}{\partial y^\circ} \left( \mu^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial y^\circ} \right), \quad \frac{\rho_\infty \delta^2 u_\infty^2}{\varepsilon L} \sim \frac{\mu_0 u_\infty}{\delta^2 L^2} \quad (1.2)$$

$$\delta \sim \varepsilon^{1/4} \text{Re}_0^{-1/4}$$

$$\text{Re}_0 = \rho_\infty u_\infty L / \mu_0$$

Здесь  $\text{Re}_0$  – число Рейнольдса,  $\mu_0$  – динамический коэффициент вязкости, вычисленный при температуре  $T_0$ ,  $L$  – характерный размер, который при рассмотрении обтекания полубесконечного крыла из конечных результатов выпадает.

Далее рассматривается случай, когда плотность газа в пограничном слое мала по сравнению с его плотностью в невозмущенном потоке  $\rho^\circ / \rho_\infty \ll 1$  и, следовательно,  $\varepsilon \gg \delta^2$ . Из уравнения переноса количества движения по оси  $z^\circ$  оценим величину поперечной компоненты скорости  $w^\circ$ , создаваемой в пограничном слое перепадом давления вдоль оси  $z^\circ$

$$\rho^\circ u^\circ \frac{\partial w^\circ}{\partial x^\circ} + \rho^\circ v^\circ \frac{\partial w^\circ}{\partial y^\circ} + \rho^\circ w^\circ \frac{\partial w^\circ}{\partial z^\circ} = - \frac{\partial p^\circ}{\partial z^\circ} + \frac{\partial}{\partial y^\circ} \left( \mu^\circ \frac{\partial w^\circ}{\partial y^\circ} \right) \quad (1.3)$$

Если удлинение крыла  $s$  достаточно велико, то оценка следует из равенства порядков величин следующих членов уравнения (1.3)

$$\rho^\circ u^\circ \frac{\partial w^\circ}{\partial x^\circ} \sim \frac{\partial p^\circ}{\partial z^\circ}, \quad \frac{\rho_\infty \delta^2 u_\infty w^\circ}{\varepsilon L} \sim \frac{\rho_\infty u_\infty^2 \delta^2}{sL} \quad (1.4)$$

$$\frac{w^\circ}{u_\infty} \sim \varepsilon s^{-1}$$

В этом случае  $(\rho^\circ w^\circ \partial w^\circ / \partial z^\circ) (\partial p^\circ / \partial z^\circ)^{-1} \sim \varepsilon / s^2$ , а это значит, что для удлинений крыла  $s \gg \sqrt{\varepsilon}$  конвективным членом  $\rho^\circ w^\circ \partial w^\circ / \partial z^\circ$  в уравнении (1.3) можно пренебречь. Заметим, что вне пограничного слоя для рассматриваемого случая  $\delta / s \ll 1$  этот компонент скорости имеет порядок  $w_e^\circ \sim u_\infty \delta^2 / s \ll 1$  [5].

Другой предельный случай реализуется для очень малых  $s$ . Оценка для  $w^\circ$  тогда следует из условия равенства членов

$$\rho^\circ w^\circ \frac{\partial w^\circ}{\partial z^\circ} \sim \frac{\partial p^\circ}{\partial z^\circ}, \quad \frac{\rho_\infty \delta^2 (w^\circ)^2}{\varepsilon s L} \sim \frac{\rho_\infty u_\infty^2 \delta^2}{s L} \frac{w^\circ}{u_\infty} \sim \varepsilon^{1/2} \quad (1.5)$$

Причем продольные конвективные члены в уравнении (1.3) оказываются малыми при условии  $(\rho^\circ u^\circ \partial w^\circ / \partial x^\circ)(\rho^\circ w^\circ \partial w^\circ / \partial z^\circ)^{-1} \ll 1$ , т.е. при  $s \ll \sqrt{\epsilon}$ . Уравнения пограничного слоя в этом случае вырождаются, теряя конвективные члены, содержащие производные по координате  $x^\circ$ .

Общий случай, когда все члены имеют одинаковый порядок, реализуется при удлинении крыла  $s \sim \sqrt{\epsilon}$  и при этом сохраняется оценка для компоненты скорости поперечного течения (1.5) –  $w^\circ / u_\infty \sim \epsilon^{1/2}$ .

Далее рассматриваются крылья с удлинением  $s = O(1) \gg \epsilon^{1/2}$  и при выполнении предположения  $M_\infty \delta \gg 1$  для определения индуцированного давления, создаваемого толщиной вытеснения, можно использовать приближенную формулу "касательного клина" [4].

В соответствии с обычными оценками для ламинарного пограничного слоя в гиперзвуковом потоке [2, 4] и, учитывая (1.1), (1.2), (1.4), вводятся безразмерные автомодельные (по оси  $x^\circ$ ) переменные

$$x^\circ = Lx, \quad y^\circ = L\delta x^{3/4} \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\rho}, \quad z^\circ = Lsxz \quad (1.6)$$

$$\rho^\circ = \rho_\infty u_\infty^2 \delta^2 x^{-1/2} p^*(z), \quad \rho = \rho_\infty \delta^2 \epsilon^{-1} x^{-1/2} \rho(\lambda, z)$$

$$\mu^\circ = \mu_0 \mu(\lambda, z), \quad g^\circ = \frac{1}{2} u_\infty^2 g(\lambda, z), \quad u^\circ = u_\infty u(\lambda, z)$$

$$v^\circ = u_\infty \delta s^{-1} x^{-1/4} \rho^{-1} \left( v^*(\lambda, z) - \frac{su\lambda}{4} - sxu \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \epsilon w \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)$$

$$w^\circ = u_\infty \epsilon w(\lambda, z), \quad \delta_e^\circ = L\delta x^{3/4} \delta_e^*(z), \quad \delta = \epsilon^{1/4} s^{1/4} \text{Re}_0^{-1/4}$$

В переменных (1.6) для полубесконечного треугольного крыла система уравнений пространственного пограничного слоя сводится к двумерной, зависящей от  $\lambda$  и  $z$ , так как продольная координата  $x$  выпадает из краевой задачи.

Для учета поведения функций течения в случае  $\epsilon \ll 1$  в окрестности передних кромок вводятся переменные подобные [3], которые также не являются автомодельными (по оси  $z$ ) в окрестности этих кромок даже при наличии здесь областей с закритическим режимом течения

$$\eta = \frac{\lambda}{\sqrt{2\gamma(1-z^2)^{1/2}}}, \quad p(z) = \sqrt{1-z^2} p^*, \quad \Delta(z) = (1-z^2)^{-3/4} \delta_e^* \quad (1.7)$$

$$v(\eta, z) = \frac{1-z^2}{p} \left[ (\epsilon w - suz) \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{v^*}{\sqrt{2\gamma(1-z^2)^{1/2}}} \right]$$

Система уравнений пространственного пограничного слоя и граничные условия на холодном плоском треугольном крыле с учетом (1.6), (1.7) принимают вид

$$f = (\epsilon w - suz)(1-z^2)p^{-1} \quad (1.8)$$

$$f \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{s\epsilon}{2(1+\epsilon)p} (g - u^2 - \epsilon^2 w^2) \left( -\frac{1+z^2}{2} + z \frac{1-z^2}{p} \frac{dp}{dz} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$f \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial \eta} = -\frac{1}{2(1+\epsilon)p} (g - u^2 - \epsilon^2 w^2) \left( z + \frac{1-z^2}{p} \frac{dp}{dz} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}$$

$$f \frac{\partial g}{\partial z} + \nu \frac{\partial g}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{1 \partial g}{\sigma \partial \eta} - \frac{1 - \sigma}{\sigma} \frac{\partial (u^2 + \varepsilon^2 w^2)}{\partial \eta} \right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = (\varepsilon w - suz) \frac{z}{2p} - \left( \frac{su}{4} - sz \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{1 - z^2}{p}$$

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \varepsilon)p}} \int_0^\infty (g - u^2 - \varepsilon^2 w^2) d\eta$$

$$p = \frac{2 + \varepsilon}{2} \left[ \frac{3}{4} (1 + z^2) \Delta - z(1 - z^2) \frac{d\Delta}{dz} \right]^2$$

$$\eta = 0 : u = w = v = g = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty : u \rightarrow 1, w \rightarrow 0, g \rightarrow 1$$

Здесь  $\sigma$  – число Прандтля. Система уравнений (1.8) существенно отличается от соответствующей системы [3] тем, что при предельном переходе  $\varepsilon \rightarrow 0$  в данной системе толщина вытеснения уже не обращается в ноль. Решение краевой задачи (1.8), определяющее течение в пограничном слое на всем крыле, зависит в общем случае от параметров  $s$ ,  $\sigma$  и  $\varepsilon = \gamma - 1$ . Переходя в (1.8) к пределу  $\varepsilon = 0$ , получаем

$$-suz \frac{1 - z^2}{p} \frac{\partial u}{\partial z} + \nu \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad (1.9)$$

$$-suz \frac{1 - z^2}{p} \frac{\partial g}{\partial z} + \nu \frac{\partial g}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{1 \partial g}{\sigma \partial \eta} - \frac{1 - \sigma}{\sigma} \frac{\partial u^2}{\partial \eta} \right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{suz^2}{2p} - \left( \frac{su}{4} - sz \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{1 - z^2}{p}$$

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^\infty (g - u^2) d\eta$$

$$p = \left[ \frac{3}{4} (1 + z^2) \Delta - z(1 - z^2) \frac{d\Delta}{dz} \right]^2$$

$$-suz \frac{1 - z^2}{p} \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \frac{\partial w}{\partial \eta} = -\frac{1}{2p} (g - u^2) \left( z + \frac{1 - z^2}{p} \frac{dp}{dz} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}$$

$$\eta = 0 : u = w = v = g = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty : u \rightarrow 1, w \rightarrow 0, g \rightarrow 1$$

Систему (1.9) можно рассматривать как систему уравнений для определения главных членов разложения функций течения в степенные ряды по параметру  $\varepsilon$ . Эта система разделяется, так как в ней функции  $u$ ,  $g$ ,  $v$ ,  $p$  и  $\Delta$  зависят только от параметров  $s$  и  $\sigma$  и не зависят от поперечной компоненты скорости  $w$ , и этим она существенно отличается от общего случая, описываемого системой (1.8). Уравнение для функции  $w$  является линейным с нулевыми краевыми условиями, и его решение определяется после нахождения указанных выше функций. Учитывая, что коэффициент при производной по координате  $z$  в уравнениях переноса в системе (1.9) пропорционален  $z$  и меняет знак только в плоскости симметрии крыла ( $z = 0$ ), следовательно реализуется течение с плавным стеканием к данной плоскости и на каждой половине крыла направление параболичности системы (1.9) сохраняется. Так как градиент давления в плоскости  $z = 0$  равен нулю в силу симметричности течения, то для  $w$  в плоскости

симметрии получается обыкновенное дифференциальное уравнение с решением  $w(\eta, z=0) \equiv 0$  [6]. Аналогичные результаты получены в [7] при рассмотрении ламинарного пограничного слоя на конусе при малых углах атаки в сверхзвуковом потоке и в [8] при исследовании обтекания крыльев специальной формы, обеспечивающей малые градиенты давления.

На передних кромках крыла  $z = \pm 1$  система (1.9) вырождается в две системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Как будет показано ниже, в случае  $\sigma = 1$  решения для последних можно выразить через решение задачи Блазиуса [9].

Для исследования поведения функций течения в пограничном слое в окрестности плоскости симметрии крыла предполагается, что имеют место разложения [10]

$$\begin{aligned} u &= u_0(\eta) + u_1(\eta)z^2 + o(z^2), & g &= g_0(\eta) + g_1(\eta)z^2 + o(z^2) \\ v &= v_0(\eta) + v_1(\eta)z^2 + o(z^2), & w &= w_1(\eta)z + o(z^2) \\ \Delta &= \Delta_0 + \Delta_1 z^2 + o(z^2), & p &= p_0 + p_1 z^2 + o(z^2) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Подставляя разложения (1.10) в (1.9) и приравнивая члены одинакового порядка, получаем систему уравнений нулевого приближения

$$v_0 \frac{du_0}{d\eta} = \frac{d^2 u_0}{d\eta^2}, \quad v_0 \frac{dg_0}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{dg_0}{d\eta} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{du_0^2}{d\eta} \right) \quad (1.11)$$

$$\frac{dv_0}{d\eta} = -\frac{su_0}{4p_0}, \quad \Delta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}p_0} \int_0^\infty (g_0 - u_0^2) d\eta, \quad p_0 = (0.75\Delta_0)^2$$

$$v_0 \frac{dw_1}{d\eta} = -\frac{1}{2p_0} (g_0 - u_0^2) \left[ 1 + \frac{2p_1}{p_0} \right] + \frac{d^2 w_1}{d\eta^2} + \frac{su_0 w_1}{p_0}$$

$$\eta = 0 : u_0 = w_1 = v_0 = g_0 = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty : u_0 \rightarrow 1, w_1 \rightarrow 0, g_0 \rightarrow 1$$

Заметим, что, вводя преобразование  $w_1 = (1 + 2p_1/p_0)w_1^*$  в уравнение для  $w_1$  в системе (1.11), получим уравнение для определения  $w_1^*$ , уже не зависящее от параметра  $p_1$ , хотя его решение, конечно, является функцией от  $g_0, u_0, v_0$  и  $p_0$ . Система (1.11) также разделяется и в ней профиль  $w_1(\eta) = (dw/dz)_{z=0}$  есть функция параметра  $p_1 = 0.5(d^2 p/dz^2)_{z=0}$ , который в общем должен определяться из условия срачивания с решением, приходящим с передней кромки крыла. Однако в рассматриваемом случае значение  $p_1$  в силу особенности данной системы уравнений может быть найдено из решения части уравнений системы для членов следующего разложения

$$-\frac{2su_0 u_1}{p_0} + v_0 \frac{du_1}{d\eta} + v_1 \frac{du_0}{d\eta} = \frac{d^2 u_1}{d\eta^2} \quad (1.12)$$

$$-\frac{2su_0 g_1}{p_0} + v_0 \frac{dg_1}{d\eta} + v_1 \frac{dg_0}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{1}{\sigma} \frac{dg_1}{d\eta} - 2 \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{d(u_0 u_1)}{d\eta} \right]$$

$$\frac{dv_1}{d\eta} = \frac{7su_1}{p_0} - \frac{su_0}{4p_0} \left( 1 - \frac{p_1}{p_0} \right)$$

$$p_1 = \frac{3}{7} \left( \frac{5\sqrt{2}}{4\sqrt{p_0}} \int_0^\infty (g_1 - 2u_0 u_1) d\eta - 2p_0 \right)$$

$$\eta = 0 : u_1 = v_1 = g_1 = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty : u_1 = 0, g_1 = 0$$

При заданных значениях  $s$  и  $\sigma$  из системы (1.11) находятся функции  $u_0$ ,  $g_0$ ,  $v_0$  и  $p_0$ . Затем из решения линейной системы (1.12) с нулевыми краевыми условиями определяются  $u_1$ ,  $g_1$ ,  $v_1$  и величина  $p_1$ , знание которой позволяет решить линейное неоднородное уравнение для  $w_1$  из системы (1.11). Подставляя полученные функции в разложения (1.10), находим с точностью  $o(z^2)$  решение в окрестности плоскости симметрии крыла. Это решение описывает течение, по крайней мере, вблизи этой плоскости в области докритического режима течения, когда она образуется при достаточно малых значениях параметра  $\epsilon$ .

Для построения решения во всей области докритического течения необходимо рассмотреть следующие члены разложения в системе (1.8). В исследуемой постановке, как уже отмечалось, в окрестности плоскости симметрии крыла реализуется течение с плавным стеканием. Заметим, что время подхода струек тока к ней имеет порядок  $t \sim z^0/w^0 \sim sXZ/(\epsilon u_\infty w_1 z) \sim 1/\epsilon$  и при  $\epsilon \rightarrow 0$  обращается в бесконечность. Следует отметить, что система (1.11) выведена для случая обтекания крыльев с удлинением  $s = O(1) \gg \sqrt{\epsilon}$  и переход  $s \rightarrow 0$  даже формально в ней недопустим, так как в последнем случае  $v_0(\eta) = 0$ , а решением для компоненты скорости  $u_0(\eta)$  будет являться линейная функция от координаты  $\eta$ , которая не удовлетворяет условию на внешней границе пограничного слоя. Как указывалось выше, рассмотрение обтекания узких треугольных крыльев с  $s \ll \sqrt{\epsilon}$  или  $s = \sqrt{\epsilon}$  требует введения других оценок для поперечной скорости течения (1.5).

Рассмотрим далее систему (1.11) в случае, когда  $\sigma = 1$ . Тогда имеет место интеграл Крокко  $g_0 = u_0$ . Вводя  $u_0(\eta) = d\phi/d\eta = \phi'$  и считая, что  $\phi(0) = 0$ , из уравнения неразрывности после интегрирования получаем  $v_0 = -0.25s\phi p_0$ . Производя еще замену  $\phi(\eta) = \sqrt{2p_0/s}\Phi(\zeta)$  и  $\eta = \sqrt{2p_0/sh}$ , из уравнения для  $u_0$  в (1.11) получаем задачу Блазиуса, решение которой в виде таблиц известно [9]

$$2\Phi''' + \Phi\Phi'' = 0 \quad (1.13)$$

$$\zeta = 0: \Phi = \Phi' = 0; \quad \zeta \rightarrow \infty: \Phi' \rightarrow 1$$

Здесь штрих обозначает производную по  $\zeta$ . Учитывая, что для краевой задачи (1.13) значение интеграла [9]

$$\int_0^\infty \Phi'(1 - \Phi') d\zeta \approx 0.664$$

Тогда из системы (1.11) можно получить выражения для функций нулевого приближения и координаты нормальной к поверхности

$$p_0 = 0.498s^{-1/2}, \quad u_0 = g_0 = \Phi', \quad v_0 = -0.5(0.996)^{-1/2}s^{3/4}\Phi \quad (1.14)$$

$$\eta = \sqrt{0.996}s^{-3/4}\zeta$$

Краевая задача для определения  $w_1$  в этом случае приводится к виду

$$w_1'' + 0.5\Phi w_1' + 2s\Phi' w_1 = s^{-1} \left( 1 + \frac{p_1\sqrt{s}}{0.249} \right) \Phi'(1 - \Phi')$$

$$\zeta = 0: w_1 = 0; \quad \zeta \rightarrow \infty: w_1 \rightarrow 0$$

где постоянная  $p_1$  может быть определена из решения (1.12) с  $\sigma = 1$ .

2. Для исследования течений в областях с закритическим режимом можно рассмотреть течение около одной из передних кромок, например,  $z = 1$  и ввести вмес-

то (1.7) автомодельные переменные

$$\eta_a = \frac{\lambda}{\sqrt{2\gamma(1-z)^{1/2}}}, \quad p_a = \sqrt{1-z}p^*, \quad \Delta_a = (1-z)^{-3/4}\delta_e^* \quad (2.1)$$

$$v_a = \frac{1-z}{p_a} \left[ (\epsilon w - suz) \frac{\partial \eta_a}{\partial z} + \frac{v^*}{\sqrt{2\gamma(1-z)^{1/2}}} \right]$$

Тогда в области закритического течения, в которой функции течения зависят от координаты  $\eta_a(u = u_a(\eta_a), w = w_a(\eta_a), v = v_a(\eta_a), g = g_a(\eta_a))$ , в случае ее существования при  $z_k \leq z \leq 1$  получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$v_a \frac{du_a}{d\eta_a} = \frac{s\epsilon}{4(1+\epsilon)p_a} (g_a - u_a^2 - \epsilon^2 w_a^2) + \frac{d^2 u_a}{d\eta_a^2} \quad (2.2)$$

$$v_a \frac{dw_a}{d\eta_a} = -\frac{1}{4(1+\epsilon)p_a} (g_a - u_a^2 - \epsilon^2 w_a^2) + \frac{d^2 w_a}{d\eta_a^2}$$

$$v_a \frac{dg_a}{d\eta_a} = \frac{d}{d\eta_a} \left[ \frac{1}{\sigma} \frac{dg_a}{d\eta_a} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{d(u_a^2 + \epsilon^2 w_a^2)}{d\eta_a} \right]$$

$$\frac{dv_a}{d\eta_a} = (\epsilon w_a - su_a) \frac{1}{4p}$$

$$\Delta_a = \frac{1}{\sqrt{2(1+\epsilon)p_a}} \int_0^\infty (g_a - u_a^2 - \epsilon^2 w_a^2) d\eta_a, \quad p_a = \frac{2+\epsilon}{2} (0.75\Delta_a)^2$$

$$\eta_a = 0 : u_a = w_a = v_a = g_a = 0$$

$$\eta_a \rightarrow \infty : u_a \rightarrow 1, w_a \rightarrow 0, g_a \rightarrow 1$$

Заметим, что система (2.2) описывает течение на скользящей холодной пластине на режиме сильного взаимодействия [1]. Исходя из вида уравнений (2.2), далее предполагается, что в закритической области при малых значениях параметра  $\epsilon$  для функций течения в автомодельных переменных (2.1) имеют место разложения типа

$$F_a = F_{a0} + O(\epsilon) \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в систему (2.2) для определения членов нулевого приближения, получаем

$$v_{a0} \frac{du_{a0}}{d\eta_a} = \frac{d^2 u_{a0}}{d\eta_a^2} \quad (2.4)$$

$$v_{a0} \frac{dw_{a0}}{d\eta_a} = -\frac{1}{4p_{a0}} (g_{a0} - u_{a0}^2) + \frac{d^2 w_{a0}}{d\eta_a^2}$$

$$v_{a0} \frac{dg_{a0}}{d\eta_a} = \frac{d}{d\eta_a} \left[ \frac{1}{\sigma} \frac{dg_{a0}}{d\eta_a} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{du_{a0}^2}{d\eta_a} \right]$$

$$\frac{dv_{a0}}{d\eta_a} = -\frac{su_{a0}}{4p_{a0}}$$

$$\Delta_{a0} = \frac{1}{\sqrt{2}p_{a0}} \int_0^\infty (g_{a0} - u_{a0}^2) d\eta_a, \quad p_{a0} = (0.75\Delta_{a0})^2$$

$$\eta_a = 0: u_{a0} = w_{a0} = v_{a0} = g_{a0} = 0$$

$$\eta_a \rightarrow \infty: u_{a0} \rightarrow 1, w_{a0} \rightarrow 0, g_{a0} \rightarrow 1$$

В системе (2.4) функции  $u_{a0}$ ,  $g_{a0}$ ,  $v_{a0}$ ,  $p_{a0}$  и  $\Delta_{a0}$  так же, как соответствующие функции в (1.9), не зависят от компоненты поперечной скорости. Решение для профиля  $w_{a0}$  находится после определения указанных выше функций. Важно отметить, что уравнения в системах (1.11) и (2.4), за исключением уравнений, определяющих профили  $w_1(\eta)$  и  $w_{a0}(\eta_a)$ , с точностью до обозначений совпадают, поэтому для  $\sigma = 1$ , учитывая (1.13), (1.14), можно сразу написать

$$p_{a0} = 0.498s^{-1/2}, \quad u_{a0} = g_{a0} = \Phi' \quad (2.5)$$

$$v_{a0} = -0.5(0.996)^{-1/2}s^{3/4}\Phi, \quad \eta_a = \sqrt{0.996}s^{-3/4}\zeta$$

где функция  $\Phi$  определяется из (1.13). Более того, учитывая (1.7) и (2.1) при  $z = 0$ , получаем равенство  $\eta = \eta_a$ . Таким образом, если область закритического течения в предельном случае при  $\varepsilon \equiv 0$  будет существовать в пограничном слое на всей поверхности крыла, то решение системы (2.4) в ней совпадет с решением (1.11) в плоскости симметрии крыла. Причем, учитывая (1.6), в этом случае на всем крыле получим  $w^\circ = u_\infty \varepsilon w_{a0} \equiv 0$ . Для определения  $w_{a0}$  при  $\sigma = 1$  после замены  $w_{a0} = s^{-1}W$  в (2.4) получаем краевую задачу

$$W'' + 0.5\Phi W' - 0.5\Phi'(1 - \Phi') = 0$$

$$\zeta = 0: W = 0; \quad \zeta \rightarrow \infty: W \rightarrow 0$$

Данное уравнение является линейным уравнением и его решение с учетом краевых условий имеет вид [6]

$$W(\zeta) = -0.5\Phi'(\zeta) \int_0^\infty \Phi''(\theta) \left( \int_0^\theta \frac{\Phi'(\vartheta)(1 - \Phi'(\vartheta))}{\Phi''(\vartheta)} d\vartheta \right) d\theta - \\ - 0.5 \int_0^\zeta \Phi''(\theta) \left( \int_0^\theta \frac{\Phi'(\vartheta)(1 - \Phi'(\vartheta))}{\Phi''(\vartheta)} d\vartheta \right) d\theta \quad (2.6)$$

Заметим, что решение (2.6) не зависит от удлинения крыла и поэтому может быть вычислено один раз. На фиг. 1 представлен профиль скорости  $W(\zeta)$  на передней кромке  $z = 1$ .

3. Значение координаты  $z_k$  перехода от закритического режима течения к докритическому определяется в случае обтекания полубесконечного треугольного крыла из условия обращения в ноль интеграла [1], который в автомодельных переменных (2.1) имеет вид

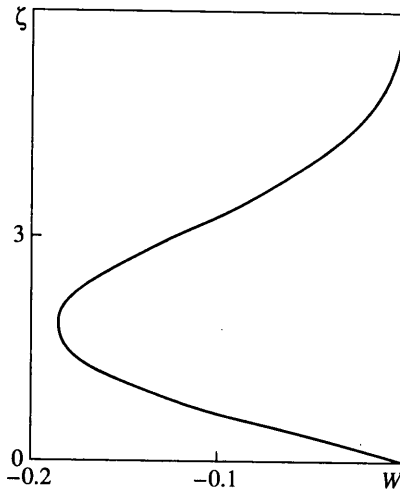
$$I = \int_0^\infty \left[ \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{g_a - u_a^2 - \varepsilon^2 w_a^2}{u_a \sin \Delta\omega - \varepsilon w_a \cos \Delta\omega} \right)^2 - g_a + u_a^2 + \varepsilon^2 w_a^2 \right] d\eta_a = 0 \\ z_k = \frac{\operatorname{tg} \Delta\omega}{\operatorname{tg} \omega_0}, \quad \Delta\omega = \omega_0 - \omega_1 \quad (3.1)$$

Здесь угол  $\omega_1$  отсчитывается от передней кромки с  $z = 1$ , а функции течения определяются из решения системы (2.2).

Учитывая, что при уменьшении параметра  $\varepsilon$  разность углов  $\Delta\omega$  становится малой [3], далее предполагается, что для  $\varepsilon \ll 1$  имеет место разложение

$$\Delta\omega = c_1 \varepsilon^{1/2} + c_2 \varepsilon + o(\varepsilon) \quad (3.2)$$





Фиг. 1. Профиль поперечной компоненты скорости  $W$  в области закритического течения около передней кромки  $z = 1$  для  $\gamma = 1$ ;  $\sigma = 1$

Здесь  $c_1$  и  $c_2$  в общем являются функциями от  $s$  и  $\sigma$ . Подставляя разложения (2.3), (3.2) в (3.1) и полагая, что  $\sin \Delta\omega = \Delta\omega + O((\Delta\omega)^3)$ ,  $\cos \Delta\omega = 1 + O((\Delta\omega)^2)$ , получим

$$I = \int_0^{\infty} \left[ \frac{(g_{a0} - u_{a0}^2)^2}{2u_{a0}^2 c_1^2} - (g_{a0} - u_{a0}^2) - \frac{(g_{a0} - u_{a0}^2)^2 (u_{a0} c_2 - w_{a0}) \sqrt{\varepsilon}}{u_{a0}^3 c_1^3} + O(\varepsilon) \right] d\eta_a = 0$$

$$z_k = \frac{c_1}{s} \sqrt{\varepsilon} + \frac{c_2}{s} \varepsilon + o(\varepsilon) \quad (3.3)$$

Прежде всего отметим, что в пределе при  $\varepsilon = 0$  координата перехода  $z_k = 0$  и, следовательно, в пограничном слое на всем крыле реализуется область закритического течения. Из условия обращения в ноль интеграла (3.3) получаем два условия для определения постоянных  $c_1$  и  $c_2$ , имеющие вид

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{(g_{a0} - u_{a0}^2)^2}{u_{a0}^2} d\eta_a, \quad I_2 = \int_0^{\infty} (g_{a0} - u_{a0}^2) d\eta_a, \quad c_1 = \sqrt{\frac{I_1}{2I_2}} \quad (3.4)$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} \frac{(g_{a0} - u_{a0}^2)^2 w_{a0}}{u_{a0}^3} d\eta_a, \quad c_2 = \frac{I_3}{I_1} \quad (3.5)$$

Таким образом, решение системы (2.4) для нулевого приближения позволяет найти два члена в разложении для определения линии перехода (3.3). В случае произвольного числа Прандтля  $\sigma$  система уравнений (2.4) решается численно, а затем в результате интегрирования (3.4) и (3.5) определяются  $c_1$  и  $c_2$ .

Для дальнейшего упрощения рассматривается случай, когда  $\sigma = 1$ . Тогда из системы (2.4) получаем для энтальпии  $g_{a0} = u_{a0}$  и из (3.4) и (3.5) постоянные определяются по формулам

$$c_1 = \sqrt{\frac{3}{8\sqrt{2}} p_{a0}^{-3/2} \int_0^{\infty} (1 - u_{a0})^2 d\eta_a} \quad (3.6)$$

$$c_2 = \frac{3}{8\sqrt{2}} c_1^{-2} p_{a0}^{-3/2} \int_0^{\infty} (1 - u_{a0})^2 \frac{w_{a0}}{u_{a0}} d\eta_a$$

Учитывая (2.5), из (3.6) получаем

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{1.328} \int_0^{\infty} (1 - \Phi')^2 d\zeta}$$

Так как согласно [9]

$$\int_0^{\infty} (1 - \Phi')^2 d\zeta = \int_0^{\infty} (1 - \Phi') d\zeta - \int_0^{\infty} \Phi'(1 - \Phi') d\zeta \approx 1.721 - 0.664 \approx 1.057$$

то  $c_1 \approx 0.8921$  и, следовательно, при  $\sigma = 1$  величина  $c_1$  не зависит от удлинения крыла. Тогда в первом приближении с точностью  $o(\sqrt{\epsilon})$  для координаты перехода  $z_k$  (3.3) и угла наклона линии перехода  $\omega_1$  (3.2) получаем

$$z_k = 0.8921\sqrt{\epsilon}s^{-1}, \quad \omega_1 = 0.5\pi - \beta - 0.8921\sqrt{\epsilon} \quad (3.7)$$

Для вычисления величины  $c_2$ , входящей во второй член в разложении (3.3), необходимо знать еще поперечную компоненту скорости  $w_{a0} = s^{-1}W$ , где  $W(\zeta)$  определяется формулой (2.6), тогда

$$c_2 = 0.946s^{-1} \int_0^{\infty} (1 - \Phi'^2) \frac{W}{\Phi'} d\zeta \approx -0.8266s^{-1}$$

Следовательно, величина  $c_2$  обратно пропорциональна удлинению крыла. Заметим, что использование двухчленного разложения (3.3) в случае  $\sigma = 1$  допустимо, если

$$\sqrt{\epsilon} \ll \left| \frac{c_1}{c_2} \right| \approx 1.0792s \quad (3.8)$$

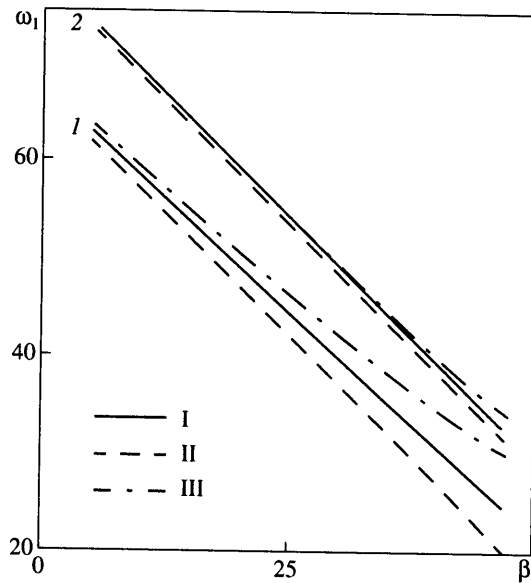
Данное условие нарушается, если рассматривать крылья с удлинением  $s \sim \sqrt{\epsilon}$ , или меньше, и, наоборот, при достаточно больших величинах  $s$  можно ожидать удовлетворительную применимость разложения (3.3) и для  $\gamma$  не слишком близких к единице. Таким образом, при значении  $\sigma = 1$  для второго приближения имеем:

$$z_k = 0.8921\sqrt{\epsilon}s^{-1} - 0.8266\epsilon s^{-2} \quad (3.9)$$

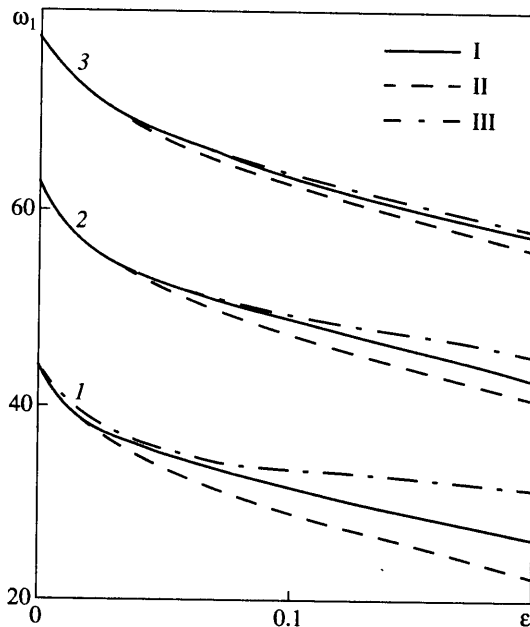
$$\omega_1 = 0.5\pi - \beta - 0.8921\sqrt{\epsilon} + 0.8266\epsilon s^{-1}$$

На фиг. 2 представлена зависимость угла  $\omega_1$ , при котором происходит переход от закритического режима течения в ламинарном пространственном пограничном слое к докритическому, от угла стреловидности  $\beta$  передней кромки при  $\gamma = 1.2$  (кривые I) и 1.05 (2),  $\sigma = 1$ . Кривая I – точное решение (3.1), II – первое приближение (3.7) и III – второе приближение (3.9). Уменьшение величины  $\gamma$  приводит к увеличению области закритического течения. Первое приближение (II) занижает значение угла перехода примерно на 15% на крыльях с углом  $\beta = 45^\circ$  в случае обтекания газом с показателем адиабаты  $\gamma = 1.2$  (I). При уменьшении угла  $\beta$  это занижение существенно падает как по абсолютной величине, так и по относительной. Следует особенно отметить, что второе приближение (III) для  $\gamma = 1.2$  (I) оказывается хуже, чем первое при углах стреловидности  $\beta \geq 40^\circ$ . Это связано с тем, что нарушается выполнение неравенства (3.8). При обтекании крыльев газом с адиабатой  $\gamma = 1.05$  (2) максимальное отклонение первого приближения (II) от точного (I) не превышает 4%, причем второе приближение (III) для всех рассмотренных углов стреловидности оказывается более точным, чем первое.

Зависимость угла перехода  $\omega_1$  от величины параметра  $\epsilon = \gamma - 1$  для  $s = 1; 2; 5$  (I–3) при  $\sigma = 1$  является существенно нелинейной особенно для  $\epsilon < 0.1$  (фиг. 3). Анализ



Фиг. 2. Зависимость угла перехода  $\omega_1$  от закритического течения к докритическому от угла стреловидности  $\beta$  (в градусах),  $\sigma = 1$ : 1, 2 –  $\gamma = 1.2$ ; 1.05; I–III – точное решение (3.1), первое приближение (3.7), второе приближение (3.9)



Фиг. 3. Зависимость угла перехода  $\omega_1$  от параметра  $\epsilon = \gamma - 1$ ,  $\sigma = 1$ : 1–3 –  $s = 1$ ; 2; 5; I–III: точное решение (3.1), первое приближение (3.7), второе приближение (3.9)

результатов показывает, что второе приближение (III) при достаточно малых значениях параметра  $\epsilon$  становится более точным по сравнению с первым приближением (II) для всех рассмотренных удлинений крыла.

**Заключение.** Установлено, что при показателе адиабаты  $\gamma \rightarrow 1$  реализуются три режима течения в зависимости от значений удлинения крыла. Показано, что при обтекании холодного плоского треугольного крыла с удлинением  $s = O(1) \gg \sqrt{\gamma - 1}$  и показателем адиабаты  $\gamma \rightarrow 1$  в ламинарном пространственном пограничном слое возникают вторичные течения с поперечной компонентой скорости порядка  $O(\gamma - 1)$ . В предельном случае ( $\gamma = 1$ ) система уравнений в частных производных, описывающих течение на всем крыле, разделяется, а течение в окрестности плоскости симметрии крыла описывается в нулевом приближении системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которая замыкается при использовании следующих членов разложения. Найдена аналитическая зависимость координаты перехода от закритического режима течения к докритическому в виде двучленного разложения, коэффициенты которого определяются из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, записанной в автомодельных переменных в области закритического течения для нулевого приближения. При обтекании крыла совершенным газом с числом Прандтля равным единице получены численные значения для коэффициентов в разложении для координаты перехода и аналитические выражения для функций течения, явно выражающих зависимость от удлинения крыла.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00189).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нейланд В.Я.* К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 1. Пространственные течения // Учен. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 2. С. 70–79.
2. *Дудин Г.Н., Липатов И.И.* О закритическом режиме гиперзвукового обтекания треугольного крыла // ПМТФ. 1985. № 3. С. 100–106.
3. *Дудин Г.Н.* К вопросу существования автомодельных решений в закритической области при гиперзвуковом обтекании треугольного крыла // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 2. С. 156–164.
4. *Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.
5. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
6. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1958. 628 с.
7. *Нейланд В.Я., Соколов Л.А.* Ламинарный пограничный слой на конусе, установленном под углом атаки в сверхзвуковом потоке // Тр. ЦАГИ. 1977. Вып. 1812. С. 3–9.
8. *Башкин В.А., Дудин Г.Н.* Пространственные гиперзвуковые течения вязкого газа. М.: Наука, 2000. 288 с.
9. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
10. *Дудин Г.Н.* К расчету уравнений ламинарного пограничного слоя на линии симметрии тонкого треугольного крыла // Тр. ЦАГИ. 1980. Вып. 2046. С. 58–65.

Москва

Поступила в редакцию  
11.XII.2001