

УДК 532.546

© 2002 г. А.В. КОСТЕРИН, Э.В. СКВОРЦОВ

## ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ С ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТУЮ ЗОНУ АЭРАЦИИ

Исследована одномерная задача о загрязнении трещиновато-пористой зоны аэрации вследствие быстрого разлива жидкости на поверхности земли. Интенсивность капиллярной пропитки блоков аппроксимирована с учетом экспериментальных данных. Найдены аналитическая зависимость, описывающая траекторию переднего фронта загрязнения, и глубина опускания разлитой жидкости в грунт. Определен профиль загрязнения в блоках.

*Ключевые слова:* фильтрация, трещиновато-пористая среда, капиллярная пропитка, загрязнение.

В связи с острой проблемой охраны подземных вод от загрязнения в последнее время уделяется повышенное внимание оценке защитных свойств зоны аэрации как главной естественной преграды загрязнению [1]. Такие свойства во многом определяются структурой этой зоны, простирающейся от поверхности земли до зеркала грунтовых вод. Существуют два основных типа такой структуры – слоистая и трещиновато-пористая. Важная модельная задача для слоистой зоны аэрации (взаимодействие струи загрязнителя с низкопроницаемым пропластком) исследована в [2].

В данной работе рассматривается вертикальная фильтрация в трещиновато-пористой структуре. Такая система обладает специфическими фильтрационными свойствами [3] – относительно большой проницаемостью  $k$ , малой гидроемкостью трещин и малой проницаемостью  $\epsilon k$  ( $\epsilon \ll 1$ ), значительной гидроемкостью, высокой всасывающей способностью блоков. Для трещин и блоков соответственно можно ввести критические потоки  $q = k\rho g/\mu$  и  $\epsilon q$  ( $\rho, \mu$  – плотность и вязкость жидкости,  $g$  – ускорение тяжести), разделяющие течения при полном и неполном насыщении. При естественном питании зоны аэрации в режиме орошения потоки, как правило, малы (меньше  $\epsilon q$ ), и перенос жидкости происходит по блокам. Трещины при этом остаются практически сухими. При достаточно больших расходах (значительно больших  $\epsilon q$ ), например, при аварийных проливах на поверхности земли основной поток опускается уже по трещинам, а роль блоков сводится к отсосу жидкости из них. Интенсивность последнего процесса зависит от распределения водонасыщенности (капиллярного давления) в блоках и поверхностного натяжения загрязнителя. Процессом капиллярной пропитки блоков определяются защитные свойства зоны аэрации: загрязнитель опускается по трещинам, оставляя "след" в блоках. При этом загрязнение далеко не всегда достигает зеркала грунтовых вод.

Далее рассматривается задача о вертикальной фильтрации загрязнителя с поверхности земли вследствие быстрого (аварийного) разлива жидкости с образованием "лужи" значительной площади. Пусть  $d$  – ее характерный размер,  $l$  – мощность зоны аэрации,  $h$  – начальная глубина лужи. Обычно  $h \leq l \leq d$ , поэтому можно фильтрацию в трещинах считать одномерной и пренебречь градиентом давления по сравнению с силой тяжести. При этом скорость опускания жидких частиц в трещинах равна  $q/m$ , где  $m$  – пористость системы трещин.

**1. Постановка задачи.** Уравнение баланса массы (объема) жидкости в трещинах имеет вид:

$$m \frac{\partial s}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial Z} = -j(Z, T), \quad V = \left( \frac{k}{\mu} \right) \rho g f(s) = sq \quad (1.1)$$

где  $s$  – насыщенность трещин жидкостью,  $T$  – время,  $V$  – модуль скорости фильтрации,  $Z$  – вертикальная координата, направленная от поверхности земли вниз,  $j$  – объемная плотность потока жидкости из трещин в блоки. Величина  $V$  определяется законом Дарси с учетом того, что фазовая проницаемость системы трещин  $f(s)$  – линейная функция насыщенности [4].

Величина  $j$  является интегральной характеристикой задачи о капиллярной пропитке блоков и зависит от предыстории этого процесса.

Пусть  $T = F(Z)$  есть уравнение траектории переднего фронта опускающейся жидкости. Тогда время  $F(Z)$  характеризует начало процесса пропитки на глубине  $Z$ . Известны экспериментальные данные о зависимости объема  $\Omega$  впитанной жидкости от времени [5]. В работе [6] предложена соответствующая [5] единая аппроксимация объемной плотности потока жидкости из трещин в блоки  $j = -d\Omega/dT$ , хорошо описывающая асимптотики процесса как на малых, так и на больших временах

$$j(Z, T) = -\frac{A}{[T - F(Z)]^{1/2}} \exp\{-B[T - F(Z)]\} H[T - F(Z)] \quad (1.2)$$

Здесь  $H(T)$  – функция Хевисайда. Физический смысл параметров  $A$  и  $B$  в формуле (1.2) проявляется этими асимптотиками. Так, на малых временах пропитка описывается поршневой схемой, и можно положить  $B = 0$ , и согласно [7],

$$A = \Sigma \left( \frac{k_0 m_0 \nabla P}{2\mu} \right)^{1/2}, \quad m_0 = m_1(1 - s_1)$$

где  $\Sigma$  – поверхность блоков в единице объема среды,  $m_1$  – пористость блоков,  $s_1$  – их исходная водонасыщенность,  $k_0$  – проницаемость системы каналов, по которым идет пропитка,  $\nabla P$  – разность давлений жидкости на границах зоны пропитки.

На больших временах затухание процесса определяется экспоненциальным множителем в (1.2), а сама пропитка описывается простейшим кинетическим уравнением с начальным условием

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T} = \frac{\Omega - \Omega_0}{\Theta}, \quad \Omega[F(Z)] = 0 \quad (1.3)$$

где  $\Omega_0$  – удельный максимальный объем пропитки.

В силу (1.3)

$$j(Z, T) = -\frac{\Omega_0}{\Theta} \exp\left[-\frac{T - F(Z)}{\Theta}\right]$$

откуда  $B = \Theta^{-1}$ .

Введем далее безразмерные величины

$$z = \frac{Z}{l}, \quad t = \frac{qT}{ml}, \quad \tau = \frac{qF}{ml}, \quad a = \frac{Al^{1/2}}{(mq)^{1/2}}, \quad b = \frac{Bml}{q}$$

Выражения (1.1), (1.2) с учетом введенных обозначений приводят к следующей математической постановке задачи:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial z} = -a \frac{\exp\{-b[t - \tau(z)]\}}{[t - \tau(z)]^{1/2}} H[t - \tau(z)] \quad (1.4)$$

$$s(z, 0) = 0, \quad s(0, t) = 1 \quad (1.5)$$

$$s[z, \tau(z)] = 0 \quad (1.6)$$

**2. Решение задачи.** Пусть  $g(z, p)$  – преобразование Лапласа функции  $s$  по переменной  $t$  с параметром  $p$ . Уравнение (1.4) с условиями (1.5) в изображениях принимает вид

$$\frac{dg}{dz} + pg = -\frac{a\pi^{1/2} \exp[-p\tau(z)]}{(p+b)^{1/2}} \quad (2.1)$$

$$g(0, p) = p^{-1}$$

Из соотношений (2.1) следует, что

$$g(z, p) = \frac{\exp(-pz)}{p} - a\pi^{1/2} \int_0^z \frac{\exp\{-p[z + \tau(\xi) - \xi]\}}{(p+b)^{1/2}} d\xi \quad (2.2)$$

Переходя в формуле (2.2) к оригиналам, получим

$$s(z, t) = 1 - a \int_0^z \frac{\exp\{-b[t - \tau(\xi) + \xi - z]\}}{[t - \tau(\xi) + \xi - z]^{1/2}} d\xi \quad (2.3)$$

Из условия (1.6) равенства нулю насыщенности на фронте движущейся жидкости и представления (2.3) вытекает интегральное уравнение

$$\int_0^z \frac{\exp\{-b[\eta(z) - \eta(\xi)]\} d\xi}{[\eta(z) - \eta(\xi)]^{1/2}} = \frac{1}{a} \quad (2.4)$$

где  $\eta(z) = \tau(z) - z$ . Пусть  $\eta(z) = y$ ,  $z = \psi(y)$ ,  $\eta(\xi) = u$ ,  $\xi = \psi(u)$ . Тогда уравнение (2.4) приобретает вид

$$\int_0^y \frac{\exp[-b(y-u)] \psi'_u du}{(y-u)^{1/2}} = \frac{1}{a} \quad (2.5)$$

Аналогичное уравнение рассматривалось в [6]. Если  $g_1(p)$  – преобразование Лапласа функции  $\psi(y)$ , то согласно (2.5)

$$g_1(p) = \frac{(p+b)^{1/2}}{a\pi^{1/2} p^2} \quad (2.6)$$

Обратное преобразование соотношения (2.6) дает уравнение, описывающее движение фронта

$$z = \frac{b^{1/2}}{a\pi^{1/2}} \int_0^{\eta(z)} \left[ \frac{\exp(-b\theta)}{(\pi b\theta)^{1/2}} + \operatorname{erf}(b\theta)^{1/2} \right] d\theta \quad (2.7)$$

С использованием обозначения  $\alpha(z) = [b\eta(z)]^{1/2}$  формула (2.7) приводится к виду

$$z = \frac{1}{a(\pi b)^{1/2}} \left[ \left( \alpha^2 + \frac{1}{2} \right) \operatorname{erf} \alpha + \frac{\alpha}{\pi^{1/2}} \exp(-\alpha^2) \right] \quad (2.8)$$

Найдем асимптотическое поведение зависимости  $\tau = \tau(z)$  на малых и больших временах.

Пусть  $z_0 = a\pi b^{1/2} z / 2$ . Будем искать величину  $\alpha = \alpha(z_0)$  при  $z_0 \rightarrow 0$  в виде

$$\alpha(z_0) \Big|_{z_0 \rightarrow 0} \sim z_0 (1 - cz_0^2) \quad (2.9)$$

Из уравнения (2.8) с учетом асимптотического поведения функции  $\operatorname{erf} \alpha$  при  $\alpha \rightarrow 0$  следует

$$z_0(\alpha)_{\alpha \rightarrow 0} \sim \alpha + \alpha^3 / 3 \quad (2.10)$$

Подстановка выражения (2.10) в (2.9) показывает, что  $c = 1/3$ . Таким образом,

$$\tau(z)_{z \rightarrow 0} \sim z + \frac{(\pi a z)^2}{4} - b \frac{(\pi a z)^4}{24}$$

При  $z \rightarrow \infty$  из уравнения (2.8) имеем

$$\tau(z)_{z \rightarrow \infty} \sim \left(1 + \frac{a z^{1/2}}{b^{1/2}}\right) z - \frac{1}{2b}$$

Если известно время  $t_0$ , за которое разлитая на поверхности лужа полностью впитывается трещиновато-пористой средой, то согласно уравнению (2.8) максимальная глубина зоны загрязнения дается выражением

$$z_1 = \frac{1}{a(\pi b)^{1/2}} \left[ \left( b t_0 + \frac{1}{2} \right) \operatorname{erf}(b t_0)^{1/2} + \left( \frac{b t_0}{\pi} \right)^{1/2} \exp(-b t_0) \right] \quad (2.11)$$

Эта глубина достигается за время  $t_1 = t_0 + z_1$ .

Выражение для насыщенности (2.3) с учетом (2.8) может быть упрощено. Согласно (2.3)

$$s(z, t) = 1 - a \int_0^{\eta} \frac{\exp[-b(t-z-u)] \Psi'_u du}{(t-z-u)^{1/2}} \quad (2.12)$$

Используя равенство

$$\int_0^{\eta(z)} \frac{du}{[u(t-z-u)]^{1/2}} = 2 \arcsin\left(\frac{\eta}{t-z}\right)^{1/2}$$

из (2.8), (2.12) после преобразований получим

$$s(z, t) = \frac{2}{\pi} \left[ \exp(-\gamma^2) \arccos \frac{\alpha}{\gamma} + \pi^{1/2} \int_0^{\beta} \exp(-u^2) \operatorname{erf}(\gamma^2 - u^2)^{1/2} du \right] \quad (2.13)$$

$$\beta = \{b[t - \tau(z)]\}^{1/2}, \quad \gamma = [b(t-z)]^{1/2}$$

Непосредственная проверка показывает, что выражения (2.13), (2.8) являются решением задачи (1.4)–(1.6).

**3. Обсуждение результатов.** Своеобразие предложенной постановки задачи заключается в двух особенностях правой части уравнений (1.1) и (1.4). Первая из них – независимость величины  $j$  от насыщенности трещин  $s$ . Физически это эквивалентно принятию гипотезы о том, что при всех  $s$  пленка жидкости полностью покрывает поверхность блоков, и пропитка всегда идет через полную поверхность всасывания. При этом объем  $\Omega$  загрязнения в блоках (при прочих равных условиях) оказывается наибольшим. Следовательно, решение задачи (1.1)–(1.4) дает верхнюю оценку защитных свойств зоны аэрации.

Раскрытие реальных трещин существенно переменено, а их пространство частично заполнено породой и представляет собой крупнозернистую (по сравнению с блоками) пористую среду. При неполном насыщении такой сложной гидравлической системы жидкость может течь по некоторой "русловой сети", лишь частично покрывая поверхность блоков. Для учета этого обстоятельства скорость пропитки необходимо считать функцией  $s$ , положив, например,  $j = s^n j_0(z, t)$  в (1.1) или  $a = a_0 s^n$  в (1.4). Здесь  $n > 0$  – параметр модели.

Оказывается, что движение переднего фронта загрязнения существенно зависит от величины  $n$ . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим условие баланса масс на фронте как

на разрыве насыщенности. В силу (1.4)  $s_* w = s_*$ , где  $w$  – скорость фронта, а  $s_*$  – значение  $s$  на нем. Отсюда следует, что при  $s_* \neq 0$  фронт всегда движется вместе с жидкостью с постоянной скоростью  $w = 1$ . Но при  $s_* = 0$  это уравнение вырождается, и траекторию фронта приходится искать другим способом. Так, в разд. 2 она определяется из уравнения (2.5). Связь условия  $s_* = 0$  с параметром  $n$  устанавливается методом характеристик. Согласно формуле (1.4) при  $a = a_0 s^n$  вдоль характеристики имеем:

$$s^{-n} ds = -j_0(z, t) dz$$

причем в точках фронта значение  $j$  неограничено. Отсюда следует, что если интеграл

$$\int_0^1 s^{-n} ds$$

сходится ( $0 \leq n < 1$ ), то фронт не может включать в себя конечные отрезки характеристик и на нем всюду  $s_* = 0$ . Если же этот интеграл расходится ( $1 \leq n < \infty$ ), то  $w = 1$  даже при  $s_* = 0$ , и условие (1.6) становится излишним.

При  $n = 1$ ,  $a = a_0 s$  задача (1.4), (1.5) формально отличается от постановки, данной в работе [8], описанием массообмена между блоками и трещинами. Так, в [8] величина  $j$  определяется решением задачи о массопереносе в типовом блоке и поэтому зависит от формы последнего. В случае же предложенной выше постановки используется универсальное феноменологическое описание  $j$  [6], содержащее два эмпирических параметра  $a$  и  $b$ . В этом и состоит вторая особенность модели (1.4)–(1.6).

Указанные параметры не поддаются прямому измерению, но могут быть найдены по косвенным данным методами теории обратных задач. Пусть, например, на момент времени  $t$  из анализа кернов известно распределение загрязнения в блоках  $\Omega_1(z, t)$  в интервале  $z \in [0, H]$ . Соответствующий теоретический профиль согласно (2.8) описывается выражением

$$\Omega(z, t; a, b) = a \int_{\tau(z)}^t \frac{e^{-b(\theta-\tau)}}{(\theta-\tau)^{1/2}} d\theta = \frac{a\pi^{1/2}}{b^{1/2}} \operatorname{erf}[b(t-\tau)]^{1/2}$$

Параметры  $a$  и  $b$  находятся из условия минимума квадратичного отклонения

$$J(t; a, b) = \int_0^H (\Omega - \Omega_1)^2 dz$$

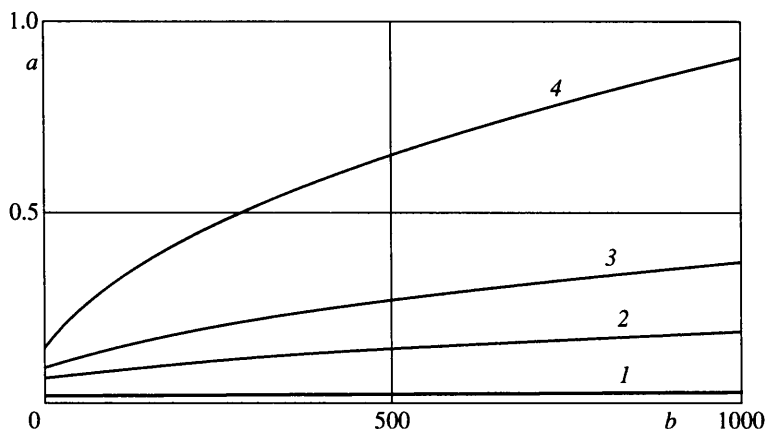
Из результатов разд. 2 заслуживает внимания равенство (2.8), описывающее траекторию фронта.

Во-первых, оно порождает практически важное соотношение (2.11), определяющее глубину проникновения загрязнения  $z_1$ , и тем самым область первичного загрязнения зоны аэрации. Действительно, пусть  $\varphi(x, y)$  – исходное распределение глубины загрязняющей лужи  $h(x, y, t)$  на поверхности земли:  $h(x, y, 0) = \varphi(x, y)$ . Поскольку  $dh/dt = mw$ ,  $w = 1$ , время поглощения  $t_0$  в точке  $(x, y)$  равно  $m^{-1}\varphi(x, y)$ , и  $z = z_1(m^{-1}\varphi(x, y))$  есть уравнение нижней границы указанной области.

С практической точки зрения наибольший интерес представляет ответ на вопрос, достигнет ли заданная порция загрязнения зеркала грунтовых вод. Этот ответ также дается соотношением (2.11). На зеркале грунтовых вод  $z_1 = 1$ . Порция загрязнения характеризуется величиной  $t_0$ . При этом (2.11) дает зависимость  $a = a(b, t_0)$ .

График этой зависимости (см. фигуру) разделяет область параметров ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ) на две части. Если точка  $(b, a)$  расположена ниже указанного графика, то загрязнение не достигает зеркала, и наоборот.

**Заключение.** Предложена математическая модель процесса миграции жидкого загрязнения в грунте с поверхности земли к зеркалу грунтовых вод вследствие быстрого



Зависимость  $a = a(b)$  при достижении фронтом глубины  $z_1 = 1$  для значений времени  $t_0 = 0.001; 0.01; 0.02; 0.05$  (кривые 1–4)

(аварийного) разлива жидкости с образованием лужи значительной площади. Рассмотрен случай трещиновато-пористой структуры грунта. Использовано описание потока жидкости из трещин в блоки, согласующееся с экспериментальными данными. Получено аналитическое решение задачи. Найдены траектория переднего фронта жидкости, глубина проникновения в грунт заданной ее порции, а также распределение загрязнения в трещинах и блоках.

Решение задачи зависит от двух параметров. В плоскости этих параметров построена кривая, разделяющая случаи достижения или недостижения загрязнением зеркала грунтовых вод.

Работа поддержана РФФИ (№ 02-01-00987).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мироненко В.А., Румынин В.Г. Проблемы гидрогеологии. Монография в 3-х томах. Т. 1. Теоретическое изучение и моделирование миграционных процессов. М.: Изд. Московск. гос. горн. ун-та, 1998. 611 с.
2. Богданов И.И., Галамай О.В., Ентов В.М. О проникновении жидких загрязнителей в водоносные пласты // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 5. С. 119–129.
3. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132. № 3. С. 532–548.
4. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
5. Боксерман А.А., Данилов В.Л., Желтов Ю.П. и др. К теории фильтрации несмешивающихся жидкостей в трещиновато-пористых средах // Теория и практика добычи нефти. Ежегодник ВНИИ нефтегаз. М.: Недра, 1966. С. 12–30.
6. Скворцов Э.В. К одномерной задаче вытеснения нефти водой в трещиновато-пористой среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 5. С. 164–168.
7. Костерин А.В., Селин В.И. Миграция органических жидкостей в трещиновато-пористой зоне аэрации // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Математ. моделир. физ. процессов. 2000. Вып. 2. С. 53–57.
8. Tang D.H., Frind E.O., Sudicky E.A. Contaminant transport in fractured porous media: analytical solution for a single fracture // Water resources research. 1981. V. 17. № 3. P. 555–564.

Казань

Поступила в редакцию  
2.XI.2001