

УДК 532.542.4

© 2002 г. В.В. МИХАЙЛОВ

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПРИСТЕНОЧНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ КАК СЛЕДСТВИЕ ИХ ПРЕДЕЛЬНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Рассмотрены осредненно-слоистые пристеночные турбулентные течения несжимаемой жидкости для любой степени шероховатости поверхности при коэффициенте трения на стенке, стремящемся к нулю. Предполагалось, что в асимптотическом пределе течение разделяется на две области: внешнюю слабовозмущенную и узкую пристеночную. Выведен закон подобия для возмущений скорости во внешней зоне, в том числе для цилиндрических труб с произвольным поперечным сечением. Путем асимптотического срачивания решений для внутренней и внешней зон доказано существование в области срачивания логарифмического профиля скорости. Проведено согласование имеющихся полуэмпирических решений для течений в трубах на основе единого асимптотического подхода. Предложен ряд полуэмпирических зависимостей для профилей скорости, уточняющих и расширяющих область применимости имеющихся соотношений.

Ключевые слова: турбулентные пристеночные течения, шероховатая поверхность, течения в трубах, полуэмпирические зависимости.

Более чем столетняя история исследований пристеночных турбулентных течений позволила установить ряд их общих свойств, которые в настоящее время не подвергаются сомнению (по крайней мере при достаточно больших числах Рейнольдса). К таким свойствам относятся: наличие в профиле осредненной скорости логарифмического участка и универсальность профиля возмущений скорости (или профиля "избыточной скорости"). Уверенность в справедливости указанных закономерностей базируется на результатах многочисленных экспериментов для плоских и осесимметричных течений. Теоретическое подтверждение этих результатов было получено при введении в рассмотрение определенных гипотез. К таковым относятся гипотезы Прандтля, Кармана [1], Ландау [2], Монина и Яглома [3], объединенные одним общим допущением – напряжение турбулентного трения не зависит от локального значения осредненной скорости. С помощью гипотезы Кармана был установлен "универсальный закон избыточной скорости" для течений в плоском и осесимметричном каналах. Гипотеза Прандтля о длине смешения позволила доказать существование логарифмического участка в профиле скорости. Ландау провел аналогичное доказательство, не вводя понятие длины смешения, а используя теорию размерности.

Результаты Прандтля и Ландау соответствуют данным экспериментов так же, как и вывод Кармана [1] и [3] об универсальности профиля избыточной скорости. Однако доказательства этого свойства течения основаны или на гипотезе о локальной связи турбулентного трения с производными от скорости [1], или на недостаточно оправданном применении принципа относительности Галилея [3].

Здесь дается более строгое доказательство указанных свойств пристеночных турбулентных течений, расширенное на случай цилиндрических труб с произвольным поперечным сечением. Кроме этого предлагаются конкретные полуэмпирические зависимости для профиля скорости и коэффициента сопротивления, которые могут

быть использованы при решении практических задач, в частности при расчете сопротивления труб во всем диапазоне проявления шероховатости.

1. Установим критерии и условия подобия осредненных турбулентных течений несжимаемой жидкости в бесконечных цилиндрических трубах с произвольным поперечным сечением при геометрически малой шероховатости внутренней поверхности в отсутствии объемных сил.

Такие течения при некотором малом удалении от стенок трубы можно считать слоистыми (не зависящими от продольной координаты). Движение жидкости в трубе вызывается градиентом давления вдоль ее образующей dp_m/dx (p_m – давление, осредненное по площади поперечного сечения) и определяется плотностью жидкости ρ , ее кинематической вязкостью ν , характерным поперечным размером R и величиной шероховатости k . Кроме указанных размерных определяющих параметров течение зависит от безразмерной геометрии поперечного сечения, включающей и шероховатость поверхности. В качестве R и k выберем гидравлический радиус трубы $R = 2F/S$ (F – площадь поперечного сечения, S – периметр сечения) и характерную высоту неровностей k . Условия геометрического подобия будем считать выполненными.

Используя уравнение сохранения импульса, свяжем градиент давления со средним по периметру касательным напряжением τ_m

$$\tau_m = \frac{R}{2} \frac{dp_m}{dx} \quad (1.1)$$

Введем далее среднюю динамическую скорость v_m вместо определяющего параметра dp_m/dx

$$v_m = \sqrt{\frac{\tau_m}{\rho}} \quad (1.2)$$

Составляя безразмерные степенные одночлены из определяющих параметров [4], получим два критерия подобия:

$$R^+ = \frac{v_m R}{\nu}; \quad k_R = \frac{k}{R} \quad (1.3)$$

Зависимые и независимые переменные обезразмерим следующим образом: составляющие скорости отнесем к v_m , линейные размеры – к R . При выделении течения в пристеночной области линейные размеры в этой зоне будем относить к ее характерному поперечному размеру h . При $k = 0$ значение $h \sim \nu/v_m$, а при отсутствии влияния вязкости $h \sim k$. Проведенное рассмотрение в случае $k = 0$ применимо и к ламинарному течению, когда поле безразмерной скорости определяется уравнением Пуассона, причем оператор Лапласа от скорости пропорционален критерию подобия R^+ . Таким образом, этот критерий в случае ламинарного течения может быть исключен, если безразмерную скорость u/v_m разделить на R^+ . Отсюда следует известный закон подобия – распределение u/v_m по безразмерным поперечным координатам ($y/R, z/R$) универсально. В качестве u_0 можно выбрать любое характерное значение скорости (например, максимальную или среднюю скорость).

Рассмотрение случая турбулентного течения осложняется тем, что уравнения Рейнольдса не замкнуты. Поэтому воспользуемся некоторыми качественными экспериментальными результатами, наиболее важным из которых является относительно малое влияние вязкости по сравнению со случаем ламинарного течения. При достаточно гладкой поверхности это влияние сосредоточено в узкой пристеночной области (ламинарный подслой), а при достаточной величине шероховатости может вообще не наблюдаться (полное проявление шероховатости).

Это обстоятельство, а также то, что для турбулентных течений характерны большие числа Re , позволяют рассмотреть эти течения в асимптотической постановке

$R^+ \rightarrow \infty$ и $k_R \rightarrow 0$. При указанном предельном переходе отношение $h/R = h_R$ должно стремиться к нулю, и можно рассмотреть отдельно подобие во внешней и во внутренней областях (характерные размеры R, h). Тогда из определяющих параметров для внутренней области выпадает R и остается лишь один критерий подобия

$$k^+ = k_R R^+ = \frac{v_m k}{\nu} \quad (1.4)$$

Примем (учитывая экспериментальные данные), что в рассматриваемой асимптотической постановке молекулярная вязкость жидкости во внешней зоне пренебрежимо мала по сравнению с турбулентной вязкостью. Тогда параметр ν не может быть определяющим параметром для внешней зоны течения и не должен войти в критерий подобия этой зоны непосредственно. Однако параметр ν может быть существенным, определяя характерный поперечный размер внутренней зоны h , поскольку влиянием $h/R \rightarrow 0$ заведомо пренебречь нельзя, так как внешнее поле течения является слабо-возмущенным.

Таким образом, в качестве критерия подобия для внешней зоны будем иметь

$$h_R = \frac{h}{R} \quad (1.5)$$

Условием подобия для этой зоны является геометрическое подобие распределения местных значений h по периметру трубы (которое может изменяться в зависимости от значения k^+). Таким образом, в общем случае остаются два критерия подобия, в качестве которых можно использовать критерии (1.3) или (1.4), (1.5).

Существуют режимы течения, для которых из указанных критериев остается лишь один. Во-первых, это предельные случаи $k^+ \rightarrow 0$ (гладкая поверхность) и $k^+ \rightarrow \infty$ (отсутствие влияния вязкости). Во-вторых, это случай, когда распределение поперечного размера внутренней зоны по периметру трубы постоянно, т.е. связанное с этим распределением условие подобия выполняется. Естественно, что для этого необходима одинаковая геометрия шероховатости поверхности и одномерность течения (т.е. плоское течение или течение с осевой симметрией). В последнем случае во внешней зоне остается зависимость лишь от критерия подобия (1.5), а значение h можно представить в виде

$$h = k\tau(k^+) = \frac{\nu}{v_*} k^+ \tau(k^+) \quad (1.6)$$

Здесь и далее v_* – динамическая скорость, постоянная по периметру трубы.

Функция $\tau(k^+)$ зависит не только от значения k^+ , но (как функционал) от геометрии шероховатой поверхности, отнормированной масштабом k . Для обеспечения предельных характерных масштабов эта функция должна удовлетворять условиям

$$\tau(k^+) \rightarrow \text{const}(k^+)^{-1}, \quad k^+ \rightarrow 0; \quad \tau(k^+) \rightarrow \text{const}, \quad k^+ \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

В общем случае произвольного поперечного сечения трубы для некоторого характерного безразмерного значения скорости во внешнем течении (например, для средней скорости) можно записать $u_m/\nu_m = \Phi(h_R, k^+)$. Используя эту связь, заменим критерий подобия h_R на u_m/ν_m . Далее перейдем в систему координат, которая движется вдоль образующей трубы со скоростью u_m (или приведем в движение трубу со скоростью $-u_m$).

Отметим, что при указанном рассмотрении вместо критерия u_m/ν_m появляется $-u_m/\nu_m$, т.е. безразмерная скорость движения стенки трубы. Однако на движение жидкости во внешней зоне этот критерий не должен оказывать влияния, поскольку оно описывается уравнениями Эйлера, которые не могут обеспечить условие при-

липания. За выполнение условий на стенке гладкой или шероховатой трубы ответственно течение во внутренней пристеночной области (аналог ламинарного пограничного слоя). Без учета этого обстоятельства применение для доказательства принципа относительности Галилея (как, например, в [3]) неоправдано.

Таким образом, в указанной системе координат $u_m = 0$ и остается один критерий подобия для внешней области течения – (k^+) . Следовательно, для случая произвольного поперечного сечения трубы получим

$$\frac{u - u_m}{v_m} = f_1\left(\frac{y}{R}, \frac{z}{R}, k^+\right), \quad \frac{v}{v_m} = f_2\left(\frac{y}{R}, \frac{z}{R}, k^+\right), \quad \frac{w}{v_m} = f_3\left(\frac{y}{R}, \frac{z}{R}, k^+\right) \quad (1.8)$$

Здесь v , w – скорости вторичных течений; y , z – поперечные координаты.

Для плоских и осесимметричных течений при произвольном значении k^+ (но с одинаковой шероховатостью поверхности!)

$$\frac{u - u_m}{v_*} = f\left(\frac{y}{R}\right) \quad (1.9)$$

Согласно изложенному выше, значение u_m может быть заменено в (1.8) и (1.9) на любое другое характерное значение скорости, например на максимальную (по сечению) скорость u_{\max} . Это равносильно добавлению к функциям f_1 , f некоторых констант. В этом случае соотношение (1.9) будет записано в виде универсального закона избыточной скорости для течений в круглых трубах [1].

Введем коэффициент сопротивления трубы λ , используя (1.1), (1.2). Тогда

$$\lambda = 4R \frac{dp_m}{dx} \frac{1}{\rho u_m^2}, \quad \sqrt{\frac{\lambda}{8}} = \frac{v_m}{u_m} \quad (1.10)$$

При этом соотношения (1.8) примут вид

$$\frac{u}{u_m} = 1 + \sqrt{\frac{\lambda}{8}} f_1, \quad \frac{v}{u_m} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} f_2, \quad \frac{w}{u_m} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} f_3 \quad (1.11)$$

Из полученных формул следует, что при $k^+ = \text{const}$ (в частности, $k^+ = 0$ или ∞) относительная избыточная скорость $(u/u_m - 1)$ и относительные поперечные скорости вторичных течений пропорциональны квадратному корню из коэффициента сопротивления трубы. Естественно, что при этом должно быть обеспечено геометрическое подобие поперечных сечений труб и геометрическое подобие формы шероховатости в соответствующих точках внутреннего периметра трубы. Особо подчеркнем, что зависимость (1.11) от k^+ свидетельствует о том, что в общем случае вязкость ν нельзя исключать из числа определяющих параметров для внешней зоны течения.

Дадим асимптотическое решение полученных соотношений для случая течения в круглой трубе, применив метод сращиваемых внутренних и внешних разложений. Примем, что геометрические характеристики шероховатости одинаковы на всей внутренней поверхности трубы. Это обеспечивает осесимметричность течения. Координата y отсчитывается от поверхности трубы вдоль радиуса.

Тогда, используя (1.9) в качестве внешнего асимптотического разложения, запишем во внешней области

$$\frac{u}{u_m} = 1 + \sqrt{\frac{\lambda}{8}} f\left(\frac{y}{R}\right) + o(\sqrt{\lambda}) \quad (1.12)$$

Для внутренней области, где вблизи поверхности течение может и не быть слоистым

$$\frac{u}{v_m} = \Phi\left(\frac{y}{h}, \frac{x}{h}, \frac{z}{h}, k^+\right)$$

Однако при $y/h \rightarrow \infty$ трехмерность течения должна исчезнуть, что приводит к соотношению

$$\frac{u}{u_m} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \varphi\left(\frac{y}{h}, k^+\right) + o(\sqrt{\lambda}) \quad (1.13)$$

Уравнения (1.12) и (1.13) являются по существу двучленными и одночленными асимптотическими разложениями по малому параметру $\sqrt{\lambda}$ с остаточным (малым по сравнению с $\sqrt{\lambda}$) членом $o(\sqrt{\lambda})$.

Пусть $y/R = \eta$, $y/h = \zeta$. Продифференцируем (1.12) и (1.13) по y и, пренебрегая остаточными членами, получим условие срачивания производных

$$\frac{1}{u_*} \frac{du}{dy} = \frac{df}{d\eta} \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{d\zeta} \frac{1}{h} \quad (1.14)$$

Это равенство должно выполняться при любых значениях параметра λ , что требует определенного вида функций f и φ . Поскольку внешнее решение не зависит от h , а внутреннее – от R , производные от f и φ должны обеспечить независимость равенства (1.14) от η , R и от ζ , h .

Следовательно

$$\frac{df}{d\eta} = \frac{A}{\eta}, \quad \frac{d\varphi}{d\zeta} = \frac{A}{\zeta} \quad (1.15)$$

Здесь A – безразмерный параметр, который не должен быть связан ни с η , ни с ζ , являясь таким образом универсальной постоянной в задачах, где срачиваются разложения типа (1.12), (1.13). (Постоянная Кармана – величина обратная A .)

Интегрируя (1.15), получим логарифмические зависимости для f и φ в области срачивания

$$f = A \ln\left(a \frac{y}{R}\right), \quad \varphi = A \ln\left(\frac{y}{h}\right) \quad (1.16)$$

Здесь a – константа, связанная с постоянной интегрирования. При этом аналогичная постоянная второго уравнения (1.15) принята равной нулю, что равносильно выбору определенного масштаба h , который был до этого неопределен.

Соотношения (1.16) показывают, что профиль скорости в области срачивания должен быть логарифмическим независимо от масштабирования y . При этом параметр подобия k^+ для функции φ на логарифмическом участке пропадает, входя только в масштаб h .

Первое из соотношений (1.16) раскрывает логарифмическую особенность во внешнем профиле скорости при $\eta \rightarrow 0$. Значение постоянной a определяется нормировкой характерного масштаба внешнего течения (здесь R). По существу соотношения (1.12) и (1.13) со значениями f и φ из (1.16) описывают один и тот же участок течения (область срачивания), но в разных масштабах.

Для срачивания скорости внешнего и внутреннего течений используем оставшийся произвольным малый параметр λ . Подставляя в (1.12) и (1.13) соотношения (1.16) и приравнивая значения u/u_m , получим формулу для расчета λ , т.е. коэффициента сопротивления трубы

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = A \ln\left(\frac{R}{ah}\right) \quad (1.17)$$

Эта формула функционально полностью соответствует формулам Прандтля и Кармана, выведенными ими соответственно для гладкой трубы и трубы с песочной шероховатостью (при полном ее проявлении [1]).

Асимптотическая погрешность полученного решения связана с ошибкой в задании характерного значения R из-за присутствия пристеночной зоны с размером h . Тогда, приняв, что относительная погрешность равна h/R , из (1.17) следует $h/R \sim \exp(-\text{const}/\sqrt{\lambda})$, $\text{const} > 0$.

Согласно полученному соотношению, порядок величины остаточных членов в (1.12) и (1.13) экспоненциально мал.

Эксперименты [1] подтверждают высокую точность формулы (1.17) при экспериментально подобранных A и ah .

2. Применим полученные результаты для описания характеристик течения в трубах. Прежде всего отметим, что предложенные в [1] соотношения для профиля скорости и коэффициента сопротивления противоречивы ($A = 2.50$ и 2.46).

Представляется, что это вызвано неточностью выделения логарифмического участка профиля скорости. Согласно измерениям Лауфера [5], этот участок ограничен сверху значением $y/R = 0.2$. Ограничение снизу для случая гладкой трубы, как показывают многочисленные измерения, соответствует условию $y^+ \geq 100$. Таким образом, из всех экспериментальных точек для u/v_* необходимо оставить лишь те, которые лежат в диапазоне $100 < y^+ < 0.2R^+$. Подобная обработка результатов измерений [1] сделана на фиг. 1.

При этом значение $R^+ = (\text{Re}_D \sqrt{\lambda})/(4\sqrt{2})$ рассчитывалось с помощью универсального закона сопротивления [1]. На фиг. 1 показаны экспериментальные данные [1], расположенные в диапазоне y^+ , соответствующем записанному выше, а также предложенная в [1] аппроксимация $u/v_* = 2.50 \ln y^+ + 5.5$ и прямая

$$u/v_* = 2.44 \ln y^+ + 5.5 \quad (2.1)$$

Отметим, что значение $A = 2.44$ соответствует рекомендациям [6] и результатам измерений Лауфера. Если использовать это значение A и в универсальном законе сопротивления [1], то во всем приведенном в [1] диапазоне $2.8 \leq \lg(\sqrt{\lambda} \text{Re}_D) \leq 5.4$ будем иметь практически тот же результат при

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.986 \lg(\sqrt{\lambda} \text{Re}_D) - 0.71 \quad (2.2)$$

Приведем (2.1), (2.2) к виду, даваемому выражениями (1.16), (1.17)

$$\frac{u}{v_*} = 2.44 \ln \left(3.368 \frac{u_m \sqrt{\lambda}}{v} y \right) = 2.44 \ln \left(\frac{y}{h_1} \right) \quad (2.3)$$

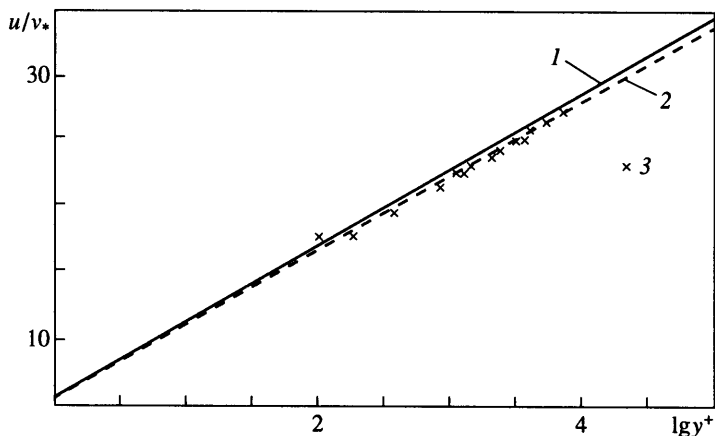
$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 2.44 \ln \left(0.8782 \frac{u_m \sqrt{\lambda}}{v} R \right) = 2.44 \ln \left(\frac{R}{ah_1} \right)$$

Отсюда получим

$$h_1 = 0.2969 \frac{v}{u_m \sqrt{\lambda}}, \quad a = 3.835 \quad (2.4)$$

Таким образом, логарифмическая особенность в универсальном законе избыточной скорости должна иметь (согласно (1.16)) вид

$$\frac{u - u_m}{v_*} = 2.44 \ln \left(3.835 \frac{y}{R} \right) = 2.44 \ln \left(\frac{y}{R} \right) + 3.280$$



Фиг. 1. Аппроксимация логарифмического участка профиля скорости для гладкой поверхности: 1 – по формуле из [1]; 2 – по формуле (2.1); 3 – экспериментальные данные [1]

Используем экспериментальное соотношение [1], полученное для связи средней u_m и максимальной u_{\max} скоростей

$$\frac{u_{\max} - u_m}{v_*} = 4.07 \quad (2.5)$$

Тогда

$$\frac{u_{\max} - u}{v_*} = -2.44 \ln\left(\frac{y}{R}\right) + 0.79 \quad (2.6)$$

Эта формула совпадает с экспериментальной формулой Лауфера [5], если слагаемое 0.79 заменить на 0.8.

Аналогично случаю гладкой трубы модернизируем формулу Никурадзе для шероховатой трубы. Тогда при $A = 2.44$ практически без потери точности получим

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.9861 \lg \frac{R}{k} + 1.78 \quad (2.7)$$

Из соотношений (2.7), (1.17) имеем

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 2.44 \ln\left(7.872 \frac{R}{k}\right), \quad ah_2 = 0.1270k \quad (2.8)$$

При полученном универсальном (для круглой трубы) значении $a = 3.835$ находим h_2 , а затем, используя (1.16), формулу для логарифмического участка скорости

$$h_2 = 0.03312k, \quad \frac{u}{v_*} = 2.44 \ln\left(30.19 \frac{y}{k}\right) = 2.44 \ln \frac{y}{k} + 8.31 \quad (2.9)$$

Приведем для сравнения аналогичную формулу из [1]

$$\frac{u}{v_*} = 2.50 \ln \frac{y}{k} + 8.5$$

Соотношения (2.3), (2.8) установлены для двух предельных режимов течения в круглой трубе, соответствующих гидравлически гладкой поверхности ($k^+ = 0$) и полному проявлению песочной шероховатости ($k^+ = \infty$) [1].

При определенных допущениях можно найти аналогичные формулы во всем диапазоне k^+ и даже для шероховатостей другого типа, если использовать для значения h зависимость вида (1.6). Такую зависимость можно получить из приведенной в [7] формулы для сопротивления трубы во всем диапазоне значений k^+ . Эта формула получена путем аппроксимации экспериментальных данных [1] для песочной шероховатости. Проведя замену значения $A = 2.46$ на 2.44 и обеспечивая при $k^+ \rightarrow 0$ и $k^+ \rightarrow \infty$ выполнение уравнений (2.2), (2.7), получим

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = -2.44 \ln \left[0.2541 \frac{k_e}{D} \left(\exp \left(-\frac{\sigma \omega(\alpha)}{k_e^+} \right) + \frac{3.169}{k_e^+} \right) \right] \quad (2.10)$$

Из этого уравнения и соотношения (1.17) при $a = 3.835$ будем иметь

$$h = 0.03313 k_e \left(\exp \left(-\frac{\sigma \omega(\alpha)}{k_e^+} \right) + \frac{3.169}{k_e^+} \right) \quad (2.11)$$

При $k_e^+ \rightarrow 0$ и $k_e^+ \rightarrow \infty$ из (2.11) следуют соответственно (2.4), (2.8) для параметров h_1 и h_2 .

Значение σ в (2.10) есть постоянная, которую необходимо выбрать из условия наилучшей аппроксимации экспериментальных данных, а параметр α – отношение эффективной гидравлической шероховатости k_e к характерной геометрической шероховатости k [7]. При этом для случая песочной шероховатости $\alpha = 1$, а для технической $\alpha = 0$.

Функция $\omega = \omega(\alpha)$ должна выбираться с помощью экспериментальных данных, удовлетворяя условиям $\omega(1) = 1$, $\omega(0) = 0$. (Отметим, что в [7] принято $\omega(\alpha) = \alpha$, $\sigma = 7.5$.) Укажем также, что характерная геометрическая шероховатость k весьма неопределенное понятие для видов шероховатости с различными размерами неровностей. Тем не менее можно ожидать, что соотношение (2.11) будет давать приемлемые результаты в случаях, когда геометрия неровностей различного размера близка к геометрии песчинок.

Учитывая сделанные замечания, ограничивающие область применения (2.11), с целью выбора значения постоянной σ рассмотрим случай песочной шероховатости $\alpha = 1$, $k = k_e$. Подставим (2.11) во второе уравнение (1.16), записав его в виде

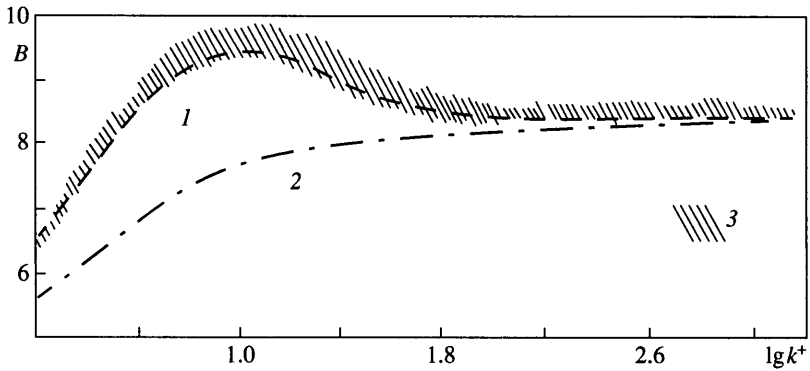
$$\frac{u}{u_*} = A \ln \frac{y}{k} + B, \quad A = 2.44, \quad B = 8.31 - 2.44 \ln \left[\exp \left(-\frac{\sigma \omega(\alpha)}{k^+} \right) + \frac{3.169}{k^+} \right] \quad (2.12)$$

Экспериментальные значения B в промежуточной области проявления шероховатости $1.6 \leq k^+ \leq 1000$ приведены в [1]. При этом величина B вычислялась при $A = 2.50$. Последнее не позволяет провести корректное сравнение экспериментальных данных и результатов расчета B по формуле (2.12). Однако, учитывая, что при полном проявлении шероховатости ($k^+ \rightarrow \infty$) разница между экспериментальным значением $B = 8.5$ и $B = 8.31$ сравнительно мала, можно достаточно точно определить значение постоянной σ .

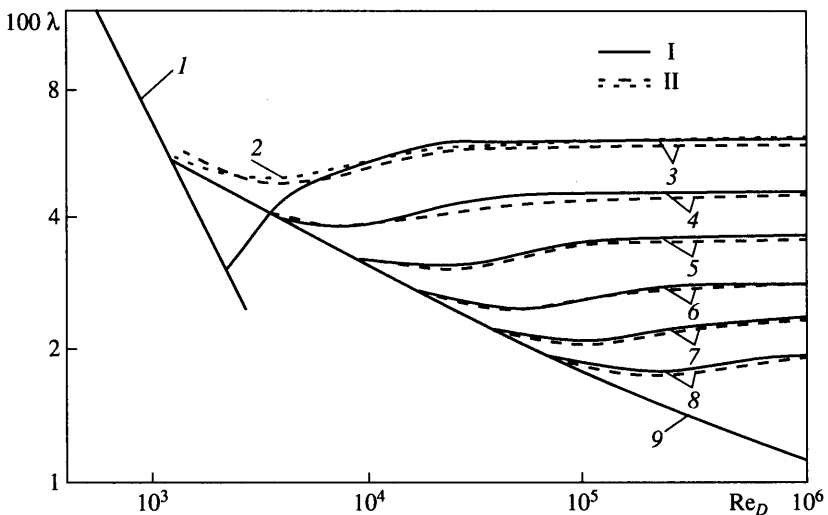
Данные эксперимента и результаты расчета при $\sigma = 12$, $\omega(\alpha) = 1$ (кривая 1) показаны на фиг. 2. Здесь же линией 2 нанесен расчет для случая технической шероховатости $\alpha = 0$, $\omega(\alpha) = 0$.

Сравнение результатов расчета коэффициента сопротивления λ для случая песочной шероховатости ($\omega(\alpha) = 1$, $\sigma = 12$, кривые 1) с аппроксимацией экспериментальных данных [1] (кривые 2) дано на фиг. 3.

Из приведенного рассмотрения следует, что для определения коэффициента сопротивления достаточно знать лишь вид логарифмической особенности, записанной во внутренних и внешних переменных.



Фиг. 2. Значения параметра B : 1 – по формуле (2.12) при $\omega(\alpha) = 1$, $\sigma = 12$; 2 – по (2.12) при $\omega(\alpha) = 0$ (техническая шероховатость); 3 – экспериментальные данные [1] для песочной шероховатости



Фиг. 3. Коэффициент сопротивления круглой трубы: I – аппроксимация измерений [1] (песочная шероховатость); II – расчет по (2.10) при $\omega(\alpha) = 1$, $\sigma = 12$; I – ламинарное течение в гладкой трубе; 2–8 – турбулентное течение при шероховатостях $R/k = 14; 15; 30.6; 60; 126; 252; 507$; 9 – гладкая труба

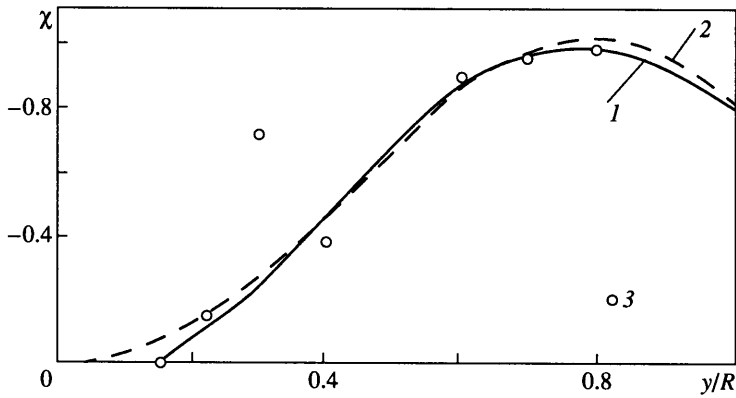
Однако в ряде других практических задач требуется знание и всего универсального профиля избыточной скорости. Выделим логарифмическую особенность (2.6) в явном виде и запишем форму такого профиля как

$$\psi(\eta) = \frac{u_{\max} - u}{\nu_*} = -2.44 \ln \eta + 0.79 + \chi(\eta), \quad \eta = \frac{y}{R} \quad (2.13)$$

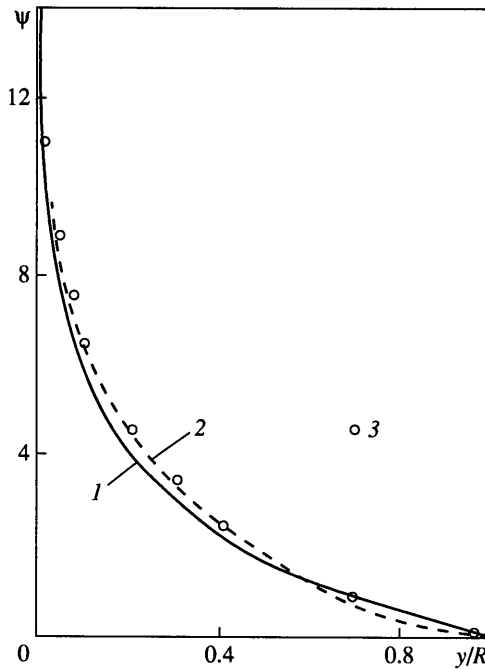
Экспериментальные данные для поправочной функции $\chi(\eta)$ приведены в [5].

Учитывая функциональный вид этой зависимости и определяя значения констант в двухпараметрической формуле для $\chi(\eta)$, из (2.5) и краевого условия $\chi(1) = -0.79$ можно предложить аппроксимацию

$$\chi(\eta) = -\eta^2(4.52 - 3.73\eta) \quad (2.14)$$



Фиг. 4. Функция χ в универсальном законе избыточной скорости для круглой трубы; 1 – аппроксимация экспериментальных результатов [5]; 2 – расчет по (2.14); 3 – данные измерений [5]



Фиг. 5. Универсальный закон $\psi(y/R)$ избыточной скорости для круглой трубы: 1 – по формуле из [1]; 2 – по формулам (2.13), (2.14); 3 – результаты измерений [1] для гладкой трубы при $Re_D = 10^6$

Сравнение этой зависимости с экспериментальными данными [5] показано на фиг. 4 (кривая 2). Здесь же (кривая 1) нанесена непосредственная аппроксимация этих данных, предложенная в [5] (условие (2.5) при этом не выполнено).

На фиг. 5 расчет универсальной функции $\psi(\eta)$ по формулам (2.13), (2.14) сравнивается с данными экспериментов Никурадзе и с универсальным логарифмическим профилем Прандтля $\psi(\eta) = -2.50 \ln \eta$ (соответственно кривые 2, 1). Из экспериментальных результатов наиболее близким к асимптотическому решению должен быть результат испытаний при минимальном коэффициенте сопротивления λ (гладкая труба, $Re_D = 10^6$). Именно этот результат достаточно хорошо описывается

соотношениями (2.13), (2.14). Применяя эти соотношения для определения значения $\eta = \eta_0$ ($\psi(\eta_0) = 4.07$), получим $\eta_0 \approx 0.24$.

Заключение. Основным результатом работы является более строгое обоснование известного для течений в каналах и круглых цилиндрических трубах закона дефекта скорости.

Использованный подход позволил показать применимость этого закона и к трубам с произвольным поперечным сечением на режимах без проявления или с полным проявлением шероховатости.

Определенную пользу при решении практических задач могут принести и полученные асимптотические зависимости для профиля скорости и коэффициента сопротивления круглых гладких и шероховатых труб.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 744 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1955. 639 с.
4. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Гостехиздат, 1957. 375 с.
5. Хинце И.О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
6. Computation of turbulent Boundary Layers. AFOSR-IFP. Stanford Conference. Proceedings. V. 2. Stanford. California: Stanford Univ. Press, 1969. 519 p.
7. Михайлов В.В. Уточненная формула для расчета коэффициента гидравлического сопротивления трубопроводов. // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 4. С. 159–161.

Москва

E-mail: drsnv@aerocentr.msl.su

Поступила в редакцию

14.V.2001