

УДК 532.529.6:537.862

© 2002 г. А.И. ГРИГОРЬЕВ, С.О. ШИРЯЕВА

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ВЯЗКОЙ КАПЛИ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Получено дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний заряженной капли несжимаемой жидкости конечной электропроводности с учетом энергопотерь на излучение электромагнитных волн. Показано, что интенсивность энергопотерь, связанных с электромагнитным излучением колеблющейся капли, растет при увеличении ее электропроводности, заряда и поверхностной подвижности носителей заряда. Приведена оценка интенсивности фонового электромагнитного излучения кучевого облака.

*Ключевые слова:* капиллярные колебания, заряженная капля, электромагнитное излучение.

Исследование электромагнитного излучения от колеблющихся заряженных облачных и дождевых капель представляет интерес как в связи с проблемами радиолокационного зондирования облаков и туманов [1–2], так и в связи с разработкой средств диагностики широкого спектра приложений явления электродиспергирования жидкостей [3–6]. В частности, электромагнитное излучение от огней Св. Эльма, загорающих на самолетах, летящих в грозовых облаках, приводит к весьма высокому уровню радиопомех. Появление огней св. Эльма, согласно [3], в большинстве случаев связано с неустойчивостью Тонкса – Френкеля (неустойчивостью заряженной поверхности пленки воды, покрывающей предметы, возле которых наблюдается это явление), сопровождающейся эмиссией большого количества высокодисперсных сильно заряженных капелек, в окрестности которых зажигается самоподдерживающийся за счет фотоионизации коронный разряд.

Задача расчета интенсивности электромагнитного излучения от колеблющейся заряженной капли была впервые сформулирована и решена в [1] для невязкой идеально проводящей капли в вакууме. В связи с актуальностью проблемы представляет интерес решение более общей задачи для капли с реальными свойствами: с отличной от нуля вязкостью и конечной скоростью переноса заряда.

1. Пусть дана сферическая капля радиуса  $R$  вязкой несжимаемой жидкости плотности  $\rho$ , с коэффициентом кинематической вязкости  $\nu$ , удельной проводимостью  $\sigma$ , коэффициентом поверхностного натяжения  $\gamma$ , поверхность которой совершает капиллярные колебания бесконечно малой амплитуды, возникающие вследствие теплового движения молекул. Капля обладает зарядом  $Q$  и находится в вакууме. Уравнение свободной поверхности капли в сферической системе координат с началом в центре масс капли запишется в виде:  $r = R + \xi(\theta, t)$ , где  $\xi$  – возмущение равновесной сферической поверхности капли, вызванное капиллярным волновым движением,  $|\xi| \ll R$ .

Для упрощения записи и последующих вычислений введем безразмерные переменные, в которых  $R = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $\gamma = 1$ . Все остальные величины (за которыми оставим обычные обозначения) выразятся в единицах своих характерных значений

$$r_* = R; \quad t_* = R^{3/2} \rho^{1/2} \gamma^{-1/2}; \quad u_* = R^{-1/2} \rho^{-1/2} \gamma^{1/2}; \quad P_* = R^{-1} \gamma$$

$$s_* = R^{-3/2} \rho^{-1/2} \gamma^{1/2}; \quad Q_* = R^{1/2} \gamma^{1/2}; \quad \nu_* = R^{1/2} \rho^{-1/2} \gamma^{1/2}$$

Математическая формулировка решаемой задачи имеет вид

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P_1 + \nu \Delta \mathbf{u}; \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_j = 0; \mathbf{D}_j = \varepsilon_j \mathbf{E}_j \quad (1.2)$$

$$\Delta \mathbf{E}_j - \frac{\varepsilon_j \mu_j}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_j}{\partial t^2} = \frac{4\pi \sigma \mu_j}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial t}; \quad j = 1, 2 \quad (1.3)$$

$$F(r, \theta, t) \equiv r - 1 - \xi(\theta, t) = 0 \quad (1.4)$$

$r = 1 + \xi$ :

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla F = 0 \quad (1.5)$$

$$(\Pi_{2\tau} - \Pi_{1\tau}) - \nu[\tau(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{n}(\tau \nabla) \mathbf{u}] = 0; \quad \Pi_{\tau} = \frac{\varepsilon}{4\pi} E_n E_{\tau} \quad (1.6)$$

$$-(P_1 - P_2) + 2\nu \mathbf{n}(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{u} - P_E + P_{\gamma} = 0 \quad (1.7)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi \kappa; \quad E_{2\tau} = E_{1\tau} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} - \sigma(\mathbf{n} \mathbf{E}_1) + \operatorname{div}_{\Sigma}(\kappa \mathbf{u}_{\tau} + \kappa b \mathbf{E}_{\tau}) = 0 \quad (1.9)$$

$r \rightarrow \infty: D_2 \rightarrow 0; r \rightarrow 0: D_1 \rightarrow 0$

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta \quad d\phi = \frac{4}{3} \pi; \quad V = [0 \leq r \leq 1 + \xi(\theta, t), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi] \quad (1.10)$$

$$\int_V \mathbf{r} \quad r^2 dr \sin \theta \quad d\theta \quad d\phi = 0 \quad (1.11)$$

$$\oint_S \kappa(\theta, t) dS = Q; \quad S = [r = 1 + \xi(\theta, t), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi] \quad (1.12)$$

Индекс 1 относится к жидкости, а индекс 2 – к внешней среде;  $\varepsilon_j$  и  $\mu_j$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости  $j$ -й среды (ниже принимается, что  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$ ,  $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon$ );  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  – поле скоростей;  $P_1(\mathbf{r}, t)$  – давление внутри жидкости при наличии внешнего электрического поля;  $c$  – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме;  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  – орты нормали и касательной к свободной поверхности капли, определенной соотношением (1.4);  $E_n, E_{\tau}$  – нормальная и касательная компоненты напряженности электрического поля;  $P_2$  – давление внешней среды;  $P_E$  и  $P_{\gamma}$  – давления электрических сил и сил поверхностного натяжения на поверхность капли;  $\kappa(\theta, t)$  – поверхностная плотность электрического заряда;  $b$  – подвижность заряженных частиц;  $\mathbf{u}_{\tau}, E_{\tau}$  – вектора, лежащие в плоскости, касательной к поверхности капли;  $\operatorname{div}_{\Sigma} \mathbf{a}$  – поверхностная дивергенция вектора  $\mathbf{a}$ ;  $S = S(\theta, t)$ , определенная (1.12), свободная поверхность капли, по которой ведется интегрирование.

2. Решение сформулированной задачи будем искать методом скаляризации, подробно изложенным в [7, 8]. Отметим только, что в (1.3) уравнение для внешней среды ( $j = 2$ ), которая принимается непроводящей, сводится к векторному волновому уравнению для отыскания напряженности поля  $E_2$ . В жидкости капли, электропроводность которой отлична от нуля, будем решать полное уравнение вида (1.3). Используя схему отыскания решения, подробно описанную в [7, 8], можно после весьма громоздких расчетов получить в линейном по  $c^{-1}$  (по волновому числу  $k \equiv s/c$ ) приближении

дисперсионное уравнение задачи

$$\begin{aligned}
 & (s - 2g_n v) \left\{ s^2 + n(n-1)(n+2) + \frac{Q^2}{2\pi} n - \frac{Q}{4\pi} B_n G_n n^2 (n+1) \right\} + \\
 & + 2s^2 v (n-1)(2n+1) - s^2 \frac{Q}{4\pi} G_n \left[ H_n g_n - \frac{s}{c} (n+1)(2n+1) \right] + \\
 & + s v \frac{Q}{4\pi} G_n \left\{ 2g_n n^2 (n+1) - n(n-1)(n+1)^2 + 4H_n g_n n + \right. \\
 & \left. + H_n n(n^2 - 1)(n-2) \right\} - 4s v^2 g_n n(n-1)(n+2) + \\
 & + \frac{Q}{4\pi} G_n g_n n \left\{ H_n \left[ \frac{Q^2}{2\pi} - (n-1)(n+2) \right] - \frac{Q^2}{4\pi} n(n+1) \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$g_n \left( \sqrt{\frac{s}{v}} \right) \equiv \sqrt{\frac{s}{v}} i_{n+i} \left( \sqrt{\frac{s}{v}} \right) / i_n \left( \sqrt{\frac{s}{v}} \right); \quad H_n(k) = -n - (2n+1)k + O(k^2)$$

$$G_n(k, \varepsilon, \sigma, b, s) \equiv \frac{Q}{s - f_n \lambda(\varepsilon, \sigma, b, s)}; \quad B_n(\varepsilon, \sigma, b, s) \equiv \frac{2s + n\lambda(\varepsilon, \sigma, b, s)}{(n+1)n}$$

$$f_n(k) = -\frac{n}{n+1} \left( 1 + \frac{2n+1}{n} k \right) + O(k^2); \quad \lambda(\varepsilon, \sigma, b, s) \equiv \varepsilon s + 4\pi\sigma + bQ(n+1)$$

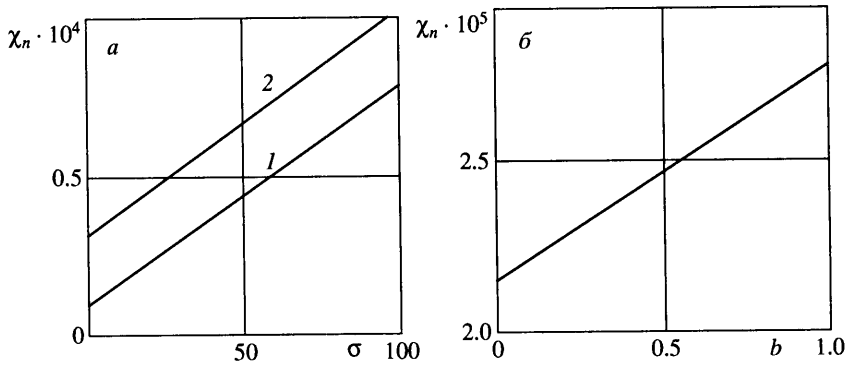
Здесь  $s$  – комплексная частота;  $i_n(x)$  – модифицированные сферические функции Бесселя первого рода [9]. В использованном линейном по  $c^{-1}$  приближении уравнение (1.3) для отыскания напряженности поля внутри капли ( $j = 1$ ) может быть заменено соответствующим волновым, поскольку вклад правой части (1.3) при  $j = 1$  проявляется лишь в квадратичном по  $c^{-1}$  приближении. В дисперсионное уравнение (2.1) волновое число  $k_1 \equiv s (\varepsilon_1 \mu_1)^{1/2} c^{-1}$  вообще не вошло, поскольку разложение  $i_n(k_1 r)$  модифицированных сферических функций Бесселя первого рода, через которые определяется напряженность электрического поля внутри капли, по малой величине  $k_1 r$  содержит лишь четные степени  $k_1 r$  и в линейном приближении содержит лишь независящие от  $R_1 r$  слагаемые.

При  $c \rightarrow \infty$ ,  $v \neq 0$ ,  $\sigma = \text{const}$ ,  $b = \text{const}$ ,  $\varepsilon = \text{const}$  это дисперсионное уравнение приводится к дисперсионному уравнению для заряженной вязкой капли с конечной проводимостью, полученному в [8]. Для идеально проводящей жидкости в пределе малой вязкости (при  $s \gg v$ ) дисперсионное уравнение (2.1) приводится к виду

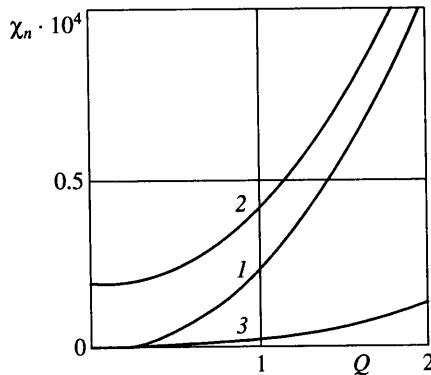
$$s^2 + 2sv(n-1)(2n+1) + \frac{s}{c} \frac{Q^2}{4\pi} (n+1)(2n+1) + n(n-1) \left[ (n+2) - \frac{Q^2}{4\pi} \right] = 0 \tag{2.2}$$

Несложно видеть, что при  $v = 0$  и  $c \rightarrow \infty$  (2.2) сводится к дисперсионному уравнению для заряженной капли идеально проводящей невязкой жидкости, полученному Рэлеем [4]. При  $v \neq 0$ ,  $c \rightarrow \infty$  (2.2) сводится к дисперсионному уравнению для заряженной капли идеально проводящей маловязкой жидкости [10]. При конечном значении константы  $c$  третье слагаемое в (2.2) определяет декремент затухания  $\chi_n$  капиллярных осцилляций заряженной капли идеально проводящей жидкости, связанный с излучением ею электромагнитных волн

$$\chi_n = \frac{Q^2}{8\pi c} (n+1)(2n+1)$$



Фиг. 1. Зависимость безразмерного декремента затухания  $\chi_n$  капиллярных осцилляций капли, связанного с электромагнитным излучением, от безразмерной электропроводности жидкости  $\sigma$  (а) и поверхностной подвижности носителей заряда  $b$  (б) при  $n = 100$ ,  $Q = 1$ ,  $\epsilon = 80$ : а)  $b = 0.5$ ,  $\nu = 0$ ,  $10^{-2}$  (линии 1, 2); б)  $\sigma = 25$ ,  $\nu = 0$



Фиг. 2. Зависимость безразмерного декремента затухания  $\chi_n$  капиллярных осцилляций капли, связанного с электромагнитным излучением, от безразмерного заряда капли  $Q$  при  $n = 100$ ,  $\epsilon = 80$ . Кривые 1 ( $\nu = 0$ ) – 2 ( $\nu = 10^{-2}$ ) соответствуют проводящим каплям ( $b = 0.5$ ,  $\sigma = 25$ ), кривая 3 – диэлектрической ( $\nu = 0$ ,  $b = 0$ ,  $\sigma = 0$ )

В общем случае для жидкости с конечной электропроводностью декремент затухания  $\chi_n$  должен зависеть от величины электропроводности  $\sigma$  и поверхностной подвижности носителей заряда  $b$ . Численные расчеты по полному дисперсионному уравнению (2.1) показывают, что величина декремента затухания  $\chi_n$  капиллярных осцилляций капли, связанного с излучением ею электромагнитных волн, линейно растет с увеличением  $\sigma$  и  $b$  в области их значений, представляющей интерес с позиций приложений (фиг. 1). Интенсивность электромагнитного излучения при этом растет  $\sim \chi_n \exp(2\chi_n t)$ .

Из фиг. 1 видно, что вклад в декремент затухания, связанный с вязкостью, не зависит от  $\sigma$  и влияние вязкости сводится к простому вертикальному сдвигу зависимости  $\chi_n = \chi_n(\sigma)$ , полученной для невязкой жидкости. Численный расчет по (2.1) показывает, что с увеличением заряда капли  $Q$  (с увеличением поверхностной плотности заряда  $\kappa$ ) при конечных значениях электропроводности  $\sigma$  и подвижности  $b$  декремент  $\chi_n$  как для идеальной, так и для маловязкой жидкости растет квадратично по  $Q$  (фиг. 2). Декремент для заряженной капли невязкой диэлектрической жидкости отличен от нуля, когда заряд "вморожен" в поверхность капли, т.е. заряженная

диэлектрическая капля при осцилляциях также излучает электромагнитные волны, хотя с заметно меньшей интенсивностью (кривая 3 на фиг. 2).

Влияние вязкости, не сказываясь на функциональной зависимости декремента затухания  $\chi_n$  капиллярных осцилляций капли, связанного с излучением ею электромагнитных волн:  $\chi_n = \chi_n(\sigma, b, Q)$ , проявляется в снижении с увеличением  $\nu$  частот колебаний поверхности вплоть до полного их исчезновения, что приводит к прекращению электромагнитного излучения каплей на соответствующей частоте. Численные расчеты показывают, что осцилляции моды с  $n = 100$  прекращаются при  $\nu \approx 0.05$ , а основной моды с  $n = 2$  – при  $\nu \approx 0.75$ .

3. Выражение для мощности  $W$  электромагнитного излучения осциллирующей заряженной капли на фиксированной частоте в размерной форме запишем, учитывая, что энергия поверхностных колебаний  $n$ -й моды  $w_n$  убывает со временем экспоненциально с характерным временем  $2\chi_n$  [1]

$$W = -\frac{dw_n}{dt} \equiv w_n \frac{Q^2}{4\pi c \rho R^5} (n+1)(2n+1) \quad (3.1)$$

Здесь энергию  $w_n$  можно на основе теоремы вириала представить как удвоенную среднюю за период кинетическую энергию движения жидкости в капле, связанную с  $n$ -модой колебаний ее поверхности [11]

$$w_n = \frac{2\pi R^3 \rho s_n^2 z_n^2}{n(2n+1)} \quad (3.2)$$

где  $z_n \equiv Z_n R$  – размерная амплитуда  $n$ -й моды, а для частоты  $s_n$  в случае малой вязкости можно использовать выражение, полученное в приближении идеальной жидкости

$$s_n^2 = \frac{\gamma}{\rho R^3} n(n-1) \left[ (n+2) - \frac{Q^2}{4\pi\gamma R^3} \right] \quad (3.3)$$

Подставим (3.3), (3.2) в (3.1) и запишем окончательное выражение для интенсивности электромагнитного излучения от единичной колеблющейся заряженной капли маловязкой жидкости (такой, чтобы влияние вязкости на частоту осцилляций было пренебрежимо малым)

$$W = \frac{\gamma Q^2 z_n^2}{2c \rho R^5} (n^2 - 1) \left[ (n+2) - \frac{Q^2}{4\pi\gamma R^3} \right] \quad (3.4)$$

Рассмотрим два наиболее вероятных источника электромагнитного излучения капель в грозовом (кучевом) облаке.

Первый возможный источник электромагнитного излучения связан с колебаниями мелких заряженных капель из диапазона наиболее часто встречающихся в облаке размеров от 3 до 30 мкм. Концентрация таких капель в облаке  $\sim 10^3 \text{ см}^{-3}$ . Осцилляции облачных капель могут быть вызваны различными причинами: коагуляцией; дроблением на более мелкие в результате столкновительных процессов или в результате реализации электростатической неустойчивости; гидродинамическим и электрическим взаимодействиями близко пролетающих капель; аэродинамическим взаимодействием с развитой мелкомасштабной турбулентностью, характерной для грозовых облаков. Амплитуды  $z_n$  колебаний поверхности облачных капель, согласно данным натуральных наблюдений [12–13], могут достигать десятков процентов от радиуса капли. Иными словами, отношение  $(z_n/R)$ , входящее в (3.4), можно принимать не зависящим от радиуса и имеющим величину порядка десятых долей единицы. Данные натуральных измерений средних зарядов на каплях в грозовых облаках [14] показывают, что отношение  $(Q^2/R^3)$  можно считать примерно постоянным для капель разных размеров.

Согласно [14],  $Q^2/4\pi\gamma R^3 \ll 1$  для средних зарядов на каплях. В итоге, согласно (3.4), интенсивность электромагнитного излучения от осциллирующей облачной капли наиболее сильно зависит от номера моды  $n$  реализующихся осцилляций и их амплитуды ( $z_n/R$ ).

Для численных оценок примем  $n = 2$ ;  $\gamma = 73$  дин/см;  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>;  $z_n = 0.1 R$ ;  $R = 30$  мкм;  $Q = 2.5 \cdot 10^{-6}$  СГСЕ. Тогда из (3.4) несложно получить  $W \approx 3.5 \cdot 10^{-10}$  Вт на частоте  $\approx 100$  кГц. Если учесть сказанное о постоянстве отношения ( $Q^2/R^3$ ) и о концентрации мелких капель, то интенсивность электромагнитного излучения из объема в 1 см<sup>3</sup> будет  $\approx 5 \cdot 10^{-16}$  Вт и приходится на полосу частот 100 кГц – 3 МГц. Интегральная же интенсивность электромагнитного излучения из грозового облака диаметром 5 км будет уже значительной:  $W_{int} \approx 2.3$  Вт. В проведенной оценке принималось, что осцилляции всех капель связаны с основной модой  $n = 2$ . Если рассмотреть возбуждение более высоких мод, то при прочих равных условиях интегральная интенсивность излучения (при учете малости параметра  $Q^2/4\pi\gamma R^3$ ) будет увеличиваться  $\sim n^3$ .

Второй возможный источник электромагнитного излучения связан, согласно [1], со свободно падающими в облаке гидрометеорами, коагулирующими с более мелкими капельками и потому непрерывно колеблющимися и, следовательно, излучающими. Однако в [1] на роль излучающих гидрометеоров предлагались сильно заряженные капли радиуса  $R = 1$  мм, концентрация которых в облаке, согласно данным наблюдений [14, 15], весьма мала  $\sim 1$  м<sup>-3</sup>. В итоге оценки интенсивности электромагнитного излучения из грозового облака, основанные на обсуждаемом механизме, проведенные для экстремальных численных значений зарядов и концентраций капель с  $R = 1$  мм, по всей видимости, существенно завышены. Тем не менее сам механизм, предложенный в [1], несомненно должен работать, если в его основу положить на порядок более мелкие капли с  $R = 100$  мкм, концентрация которых в грозовом облаке, согласно данным наблюдений [14, 15], достаточно высока  $\sim 10^3$  м<sup>-3</sup>, а скорость их свободного падения имеет величину  $\approx 78$  см/с. При такой скорости падения сквозь облако более мелких капель с радиусами 3–30 мкм с максимумом концентрации, приходящимся на диапазон размеров 3–7 мкм, гидрометеор будет испытывать ежесекундно около 22 столкновений, при которых в нем будут возбуждаться осцилляции мод с  $n \approx 20$ . Принимая  $z_n = 0.1 R$ ;  $Q = 5 \cdot 10^{-4}$  СГСЕ [14], несложно оценить по (3.4) интенсивность электромагнитного излучения (на частоте  $\approx 25$  кГц) единичного гидрометеора  $W \approx 2.3 \cdot 10^{-15}$  Вт. Интегральную интенсивность электромагнитного излучения от всех гидрометеоров в грозовом облаке диаметром 5 км легко найти:  $W_{int} \approx 0.15$  Вт.

Таким образом, из двух вышеразобранных возможных источников электромагнитного излучения осциллирующих капель в грозовом облаке первый, связанный с осцилляциями низких мод мелких капелек, имеет большую интенсивность и идет в области более высоких частот, чем второй, связанный с осцилляциями высоких мод крупных капель, свободно падающих в облаке в поле силы тяжести (гидрометеоров).

**Заключение.** Интенсивность электромагнитного излучения осциллирующей заряженной капли с конечными электропроводностью  $\sigma$  и поверхностной подвижностью носителей заряда  $b$  увеличивается с ростом  $\sigma$  и  $b$  по закону  $\sim \chi_n(\sigma, b) \exp[2\chi_n(\sigma, b) t]$ , где  $\chi_n(\sigma, b)$  – линейная функция  $\sigma$  и  $b$ . Зависимость интенсивности излучения от величины заряда  $Q$  и номера моды  $n$  осцилляций такая же, как и у идеально проводящей капли. Влияние вязкости жидкости  $\nu$  на электромагнитное излучение капли реализуется через зависимость от  $\nu$  частоты осцилляций  $\text{Im } s = \text{Im } s(\nu)$ .

Фоновое электромагнитное излучение заряженных облаков естественного и искусственного происхождения может быть частично объяснено электромагнитным излучением, связанным с капиллярными колебаниями капель, составляющих облако, как крупных с  $R \approx 100$  мкм, так и мелких с  $R \sim 10$  мкм.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П. О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
2. Качурин Л.Г. Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 463 с.
3. Grigor'ev A.I., Grigor'eva I.D., Shiryayeva S.O. Ball lightning and St. Elmo's fire as forms of thunderstorm activity // J. Scient. Exploration. 1991. V. 5. № 2. P. 163–190.
4. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
5. Григорьев А.И. Электродиспергирование жидкости при реализации колебательной неустойчивости ее свободной поверхности // Журн. техн. физики. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 22–27.
6. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Деление заряженных капель во внешнем электрическом поле на части сравнимых размеров (Обзор) // Электрон. обраб. материалов. 2000. № 4. С. 17–28.
7. Ширяева С.О., Лазарянец А.Э. и др. Метод скаляризации векторных краевых задач: Препринт № 27. Ярославль: ИМРАН, 1994. 126 с.
8. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные колебания заряженной капли вязкой жидкости с конечной проводимостью // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 107–118.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами // Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
10. Григорьев А.И., Лазарянец А.Э. Рэлеевская неустойчивость заряженной вязкой капли // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 11–17.
11. Hendricks C.D., Schneider J.M. Stability of conducting droplet under the unfluence of surface tension and electrostatic forces // J. Amer. Phys. 1963. V. 31. № 6. P. 450–453.
12. Beard K.V. Cloud and precipitation physics research 1983–1986 // Rev. Geophys. 1987. V. 25. № 3. P. 357–370.
13. Стерлядкин В.В. Натурные измерения колебаний капель осадков // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1988. Т. 24. № 6. С. 613–621.
14. Облака и облачная атмосфера. Справочник / Ред. И.П. Мазин и др. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 647 с.
15. Мазин И.П., Шметер С.М. Облака, строение и физика образования. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 279 с.

Ярославль

Поступила в редакцию  
16.VII.2001