

УДК 532.529.6:537.31

© 2002 г. В.Я. ШКАДОВ, А.А. ШУТОВ

ДЕФОРМАЦИЯ КАПЕЛЬ И ПУЗЫРЬКОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассмотрена стационарная задача о форме капли (пузырька), несмешивающейся с окружающей жидкостью, в однородном электрическом поле. Перенос заряда включает как омический ток через межфазную границу, так и конвективный перенос по поверхности раздела. Капля и пузырек может преобразовываться или в вытянутый, или в сплюснутый сфероид, если конвективный поверхностный перенос отсутствует. В этих условиях знак деформации не меняется при любых параметрах задачи. Конвективный перенос заряда вдоль поверхности инициирует дополнительное движение жидкостей в капле и среде. Однако деформированные капли демонстрируют различное поведение с увеличением интенсивности конвективного переноса. Сжатия сплюснутой капли замедляется и при подходящих условиях деформация сжатия заменяется на деформацию растяжения. В то же время обратного преобразования вытянутого сфероида в сплюснутый не происходит. Расчеты выполнены в предположении выпуклости формы капли. Найдено, что наибольшее отношение большей оси сфероида к меньшей равно 2 : 1 как для вытянутой, так и для сплюснутой капли. В экспериментах с маслами продемонстрирована возможность как замедления скорости сжатия капли, так и обращения знака деформации.

Ключевые слова: электрическое поле, поверхность раздела, заряд, капля, пузырек.

Электрическая часть уравнений электрогидродинамики включает уравнение Пуассона для электрического потенциала, уравнение сохранения заряда и граничные условия на поверхностях разрыва: непрерывность потенциала и баланс между скачком электрической индукции и поверхностной плотностью заряда. Последняя величина в общем случае заранее неизвестна и подлежит определению в процессе решения. Поэтому если задача содержит подвижные межфазные границы, то в рассмотрение следует ввести уравнение переноса поверхностного заряда для описания эволюции поверхностной плотности. Такое уравнение должно учитывать изменение заряда во времени, поверхностную конвекцию и омические потоки на деформируемую межфазную границу. Особое значение приобретает это уравнение в задачах переноса в отсутствие объемного заряда.

Наиболее подробно исследована модель, в которой игнорируется конвекция поверхностного заряда [1–4]. В этом случае перенос заряда регулируется равенством омических токов на межфазную поверхность. В то же время граничное условие для скачка электрической индукции играет пассивную роль, определяя поверхностную плотность, и фактически в задаче не используется. В этой модели капля приобретает форму вытянутого, сплюснутого сфероида или не меняет своей формы в зависимости от величин проводимости, диэлектрической проницаемости и вязкой жидкости внутри и вне капли. Эта модель верно предсказывает знак деформации очень вязких жидкостей капли и среды, однако имеется значительное расхождение между данными расчета и экспериментом [2].

В данной работе задача о деформации капли рассматривается в полной постановке. С этой целью выводится зарядовое уравнение. Это соотношение можно получить на основе физических соображений из баланса потоков заряда с учетом деформации по-

верхности [5]. Более общий метод получения уравнения эволюции поверхностного заряда – процедура осреднения уравнения сохранения объемного заряда вблизи поверхности раздела [6]. В работе [7] приведено зарядовое уравнение для задачи о пульсирующем двойном слое зарядов. В отличие от [7] здесь уравнение переноса для простого слоя заряда рассмотрено в системе координат, которая образует ортогональный базис на межфазной поверхности [8]. Такое уравнение использовалось в [9] для описания течения и устойчивости электрогидродинамической струи со свободной поверхностью.

1. Постановка задачи. Все получаемые результаты должны согласовываться с определением поверхностной плотности заряда σ в электродинамике. Плотность σ вводится путем осреднения уравнения $\text{Div } \mathbf{D} = \rho_{el}$ в нормальном направлении к межфазной границе таким образом, что [10]:

$$D_{ne} - D_{ni} = \sigma, \quad \sigma = \int_{f-h}^{f+h} \rho_{el} dN \quad (1.1)$$

где \mathbf{D} – электрическая индукция, ρ_{el} – объемная плотность заряда, dN – элемент длины в нормальном направлении, $N = f$ – уравнение поверхности раздела. Единичный вектор нормали \mathbf{n} направлен из среды i в среду e , нижний и верхний пределы интегрирования относятся к жидкостям i и e соответственно.

Аналогично процедуре осреднения объемных уравнений вблизи поверхности разрыва, рассмотренной в [6], проинтегрируем уравнение сохранения заряда в подвижной системе отсчета $K(q_1, q_2, q_3)$, в которой свободная поверхность неподвижна и является координатной. Связь координат подвижной системы и неподвижной дается выражениями:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + q_3 \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t} = V_0 \mathbf{n}$$

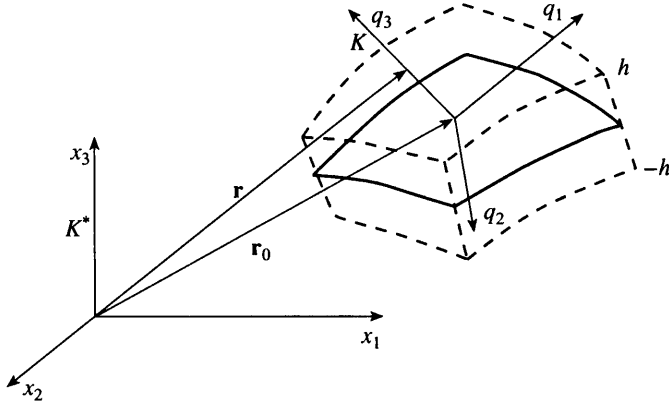
где $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3 = 0, t)$ – параметрическое уравнение поверхности, V_0 – ее скорость в неподвижной системе отсчета K^* (фиг. 1). Уравнение сохранения заряда интегрируется по координате q_3 в слое $-h \leq q_3 \leq h$:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int \rho_{el} H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 = \\ & = \int dq_1 dq_2 \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho_{el} H_1 H_2 H_3 + \frac{\partial}{\partial q_i} (\rho_{el} V^i + \lambda E^i) H_j H_k \right] dq_3 = 0 \end{aligned}$$

где $H_i = \sqrt{g_{ii}}$ – коэффициенты перехода к системе K , g_{ii} – диагональные элементы фундаментального метрического тензора, λ – проводимость, E^i – напряженность электрического поля. Суммирование в дивергентном члене по i предполагает циклическую перестановку индексов j и k ($i \neq j \neq k \neq i$, $i = 1, 2, 3$). Полагая, что функция ρ_{el} удовлетворяет условиям теоремы о среднем значении интеграла и учитывая (1.1), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\sigma H_1 H_2) + \frac{\partial}{\partial q_1} (\sigma V_1 H_2) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\sigma V_2 H_1) + H_1 H_2 [\rho_{el} V_n]_{-h}^{+h} + \\ & + H_1 H_2 (\lambda_e E_{ne} - \lambda_i E_{ni}) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $[A] = A_e(h) - A_i(-h)$ обозначает скачок величины A , $H_i = H_i(q_1, q_2, q_3 = 0, t)$, $i = 1, 2$ – метрические коэффициенты поверхности в координатах q_1, q_2 . Если предполагать непрерывность скорости на межфазной границе, то в равенстве (1.2) следует положить $V_{ni} = V_{ne} = 0$. Для перехода в неподвижную систему координат K^* необ-



Фиг. 1. Связь лабораторной и подвижной систем отсчета. Орт координаты q_3 направлен по нормали к межфазной поверхности

ходимо учесть изменение скорости: $\mathbf{V}^* = \mathbf{V} + V_0 \mathbf{n}$. В частности, такой же вид будет иметь уравнение (1.2) в любой другой неподвижной системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 , в которой пара координат ξ_1, ξ_2 образуют ортогональную сеть на свободной поверхности $F(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \xi_3 - f(\xi_1, \xi_2, t) = 0$. Поскольку скорость поверхности равна

$$\mathbf{V}_0 = -\frac{\partial F}{\partial t} \frac{\mathbf{n}}{|\nabla F|}$$

то в уравнении (1.2) V_n заменяется выражением $(\partial F / \partial t + \mathbf{V} \nabla F) / |\nabla F|$, которое при условии непрерывности скоростей на межфазной поверхности обращается в нуль, и выражает собой условие непроницаемости границы. В этих условиях уравнение (1.2) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sigma \sqrt{g_0}) + \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\sigma V_1 \sqrt{g_{11}}) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\sigma V_2 \sqrt{g_{22}}) + \sqrt{g_0} (\lambda_e E_{ne} - \lambda_i E_{ni}) = 0 \quad (1.3)$$

где g_{ii} – элементы метрического тензора поверхности $\xi_3 = f(\xi_1, \xi_2, t)$ в координатах $\xi_1, \xi_2, i = 1, 2$; $g_0 = g_{11}g_{22}$. Элементы g_{ii} определяются следующим образом:

$$g_{ii} = H_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_i} \right)^2, \quad i = 1, 2$$

где в координатных зависимостях x, y, z от ξ_1, ξ_2, ξ_3 предполагается, что $\xi_3 = f(\xi_1, \xi_2, t)$. Используемая модель простого слоя заряда не предполагает наличия структуры межфазной поверхности. Поэтому здесь не возникают некоторые эффекты, характерные для структурной границы, например поверхностная проводимость.

Рассмотрение задачи следует проводить в системе координат, в которой две координаты образуют ортогональную сеть на свободной поверхности в любой момент времени. Координаты декартовой системы x, y ортогональны на поверхности $z = f$, если f зависит только от одной из координат x или y . В цилиндрической системе r, z, θ ортогональность имеет место, если $r = f(z, t)$. В сферической системе r, θ, ϕ координаты θ, ϕ образуют ортогональную сеть на теле вращения $r = f(\theta, t)$, а компоненты метрического тензора равны

$$g_{\theta\theta} = (f^2 + f'^2), \quad g_{\phi\phi} = f^2 \sin^2 \theta, \quad f' = \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (1.4)$$

Рассмотрим стационарную осесимметрическую задачу о форме капли в сферической системе координат в однородном электрическом поле. Начало координат расположено в центре капли, форма которой есть шар радиуса r_0 в отсутствие поля. Широта θ отсчитывается от направления вектора напряженности поля E_0 . Предполагаем, что электрический ток в жидкостях протекает в условиях отсутствия объемного заряда. Введенные выше индексы i и e будем относить к жидкостям внутри и вне капли соответственно.

Безразмерные переменные, обозначаемые штрихом у символа, вводятся соответственно для радиуса, давления, скорости, напряженности поля, электрического потенциала и поверхностной плотности заряда следующим образом:

$$r' = \frac{r}{r_0}, \quad p' = \frac{pr_0}{T}, \quad V' = \frac{\mu_e + \mu_i}{\varepsilon_e \varepsilon_0 E_0^2 r_0} V, \quad E' = \frac{E}{E_0}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{E_0 r_0}, \quad \sigma' = \frac{\sigma}{e_e \varepsilon_0 E_0}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

Величины $\mu_{i,e}$, $\varepsilon_{i,e}$, $\lambda_{i,e}$, обозначают вязкость, диэлектрическую проницаемость и проводимость соответствующей жидкости, T – поверхностное натяжение, ε_0 – диэлектрическая константа.

В качестве базовых величин, на которые производится нормировка, выбраны параметры внешней сферы. В задаче будут использованы следующие безразмерные величины:

$$\Lambda = \frac{\lambda_i}{\lambda_e}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_e}, \quad M_i = \frac{\mu}{\mu + 1}, \quad M_e = \frac{1}{\mu + 1}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon_e \varepsilon_0 E_0^2 r_0}{T}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon_e \varepsilon_0 T}{\lambda_e (\mu_i + \mu_e) r_0}$$

$$\mu = \frac{\mu_i}{\mu_e}$$

Здесь α – характеризует отношение электрического давления к капиллярному. В безынерционном приближении безразмерная система уравнений имеет следующий вид:

$$\nabla p_{i,e} = \alpha M_{i,e} \nabla V_{i,e}, \quad \text{div } V_{i,e} = 0, \quad \Delta \varphi_{i,e} = 0 \quad (1.5)$$

$$V_r = V_\theta \frac{df}{fd\theta} \quad (1.6)$$

$$\alpha \frac{d}{d\theta} (\sigma V_\theta f \sin \theta) + \frac{1}{\gamma} (E_{ne} - \Lambda E_{ni}) f^2 \sqrt{1 + \frac{f'^2}{f^2}} \sin \theta = 0 \quad (1.7)$$

Уравнение (1.6) есть уравнение непроницаемости, соотношение (1.7) – зарядовое уравнение (1.3) на межфазной поверхности $r = f(\theta)$ с метрическими коэффициентами (1.4). Знак штриха у безразмерной величины опущен. Уравнения (1.5)–(1.7) дополняются следующими граничными условиями на поверхности:

$$r = f(\theta): \quad [V_\theta] = 0, \quad [V_r] = 0, \quad [\varphi] = 0 \quad (1.8)$$

$$E_{ne} - \varepsilon E_{ni} = \sigma \quad (1.9)$$

$$[p]\mathbf{n} - \alpha[M\Pi] = -K\mathbf{n} + \alpha(E_{ne}\mathbf{E}_e - \varepsilon E_{ni}\mathbf{E}_i - (E_e^2 - \varepsilon E_i^2)\mathbf{n}/2) \quad (1.10)$$

$$\varphi \rightarrow -r \cos \theta \quad (r \rightarrow \infty)$$

$$K = \left(1 + \frac{2}{f^2} f'^2 - \frac{f''^2}{f^2}\right) f^{-1} \left(1 + \frac{f'^2}{f^2}\right)^{-3/2} + \left(1 - \frac{\text{ctg} \theta}{f} f'\right) f^{-1} \left(1 + \frac{f'^2}{f^2}\right)^{-1/2}$$

$$\begin{aligned}\Pi_n &= \left(\tau_{rr} - 2 \frac{f'}{f} \tau_{r\theta} + \frac{f'^2}{f^2} \tau_{\theta\theta} \right) \left(1 + \frac{f'^2}{f^2} \right)^{-1} \\ \Pi_\tau &= \left(\tau_{r\theta} \left(1 - \frac{f'^2}{f^2} \right) + (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) \frac{f'}{f} \right) \left(1 + \frac{f'^2}{f^2} \right)^{-1} \\ \tau_{rr} &= 2 \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad \tau_{\theta\theta} = 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right), \quad \tau_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r}\end{aligned}$$

где K – кривизна и Π – вектор вязких натяжений с компонентами Π_n и Π_τ в нормальном и тангенциальном направлениях. Предполагается, что при любых деформациях капли сохраняется ее объем. В отсутствие поля капля не заряжена.

2. Решение задачи. Решение задачи (1.5)–(1.10) ищем в виде разложения по степеням параметра α :

$$\begin{aligned}f(\theta) &= 1 + \alpha f_1(\theta) + \alpha^2 f_2(\theta) \\ \sigma(\theta) &= \sigma_0(\theta) + \alpha \sigma_1(\theta) + \alpha^2 \sigma_2(\theta) \\ \Phi(r, \theta) &= \Phi^{(0)}(r, \theta) + \alpha \Phi^{(1)}(r, \theta) + \alpha^2 \Phi^{(2)}(r, \theta)\end{aligned}\tag{2.1}$$

где Φ обозначает любую величину p, V, φ . Нулевое приближение формально соответствует отсутствию воздействия поля $E_0 = 0$. В этом приближении капля имеет постоянный радиус $f = 1$ и давление в ней относительно внешней среды равно капиллярному $p_i^{(0)} = 2$.

Задача (1.5)–(1.10) в первом приближении имеет вид:

$$\begin{aligned}\nabla p_{i,e}^{(1)} &= M_{i,e} \Delta \mathbf{V}_{i,e}^{(0)}, \quad \text{div } \mathbf{V}_{i,e}^{(0)} = 0, \quad \Delta \Phi_{i,e}^{(0)} = 0 \\ f = 1: \quad V_{\theta i}^{(0)} &= V_{\theta e}^{(0)}, \quad V_{r i}^{(0)} = V_{r e}^{(0)} = 0 \\ E_{r e}^{(0)} - \lambda E_{r i}^{(0)} &= 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$E_{r e}^{(0)} - \varepsilon E_{r i}^{(0)} = \sigma_0\tag{2.3}$$

$$\varphi_i^{(0)} = \varphi_e^{(0)}, \quad \varphi_e^{(0)} \rightarrow -r \cos \theta \quad (r \rightarrow \infty)\tag{2.4}$$

$$\left[M \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta^{(0)}}{\partial r} - \frac{V_\theta^{(0)}}{r} \right) \right] = \sigma_0 E_\theta^{(0)}$$

$$\left[p^{(1)} - 2M \frac{\partial V_r^{(0)}}{\partial r} \right] = Lf_1 + \frac{1}{2} (E_{r e}^{(0)2} - E_{\theta e}^{(0)2} - \varepsilon (E_{r i}^{(0)2} - E_{\theta i}^{(0)2}))$$

$$Lf = \frac{d}{d\eta} (1 - \eta^2) \frac{df}{d\eta} + 2f, \quad \eta = \cos \theta$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$p_i^{(1)} = 14M_i U r^2 P_2(\eta) + \text{const}, \quad p_e^{(1)} = 4M_e U P_2(\eta) / r^3 + \text{const}$$

$$V_{r i}^{(0)} = 2U(r^3 - r)P_2(\eta), \quad V_{\theta i}^{(0)} = U(3r - 5r^3) \sin \theta \cos \theta$$

$$V_{r e}^{(0)} = 2U \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^4} \right) P_2(\eta), \quad V_{\theta e}^{(0)} = -2U \frac{1}{r^4} \sin \theta \cos \theta$$

$$\varphi_e^{(0)} = -\left(r + \frac{1-\Lambda}{\Lambda+2} \frac{1}{r^2}\right) \cos \theta, \quad \varphi_i^{(0)} = -\frac{3}{\Lambda+2} r \cos \theta$$

$$\sigma_0 = 3 \frac{\Lambda - \varepsilon}{\Lambda + 2} \cos \theta, \quad U = \frac{9(\Lambda - \varepsilon)}{10(\Lambda + 2)^2}$$

где $P_n(\eta)$ – полином Лежандра. В данной постановке использованы граничные условия (2.2) и (2.4) для решения уравнения Лапласа, а условие (2.3) служит для определения плотности σ_0 . Поправка к радиусу капли равна

$$f_1 = EP_2(\eta) = \frac{3}{4(\Lambda+2)^2} \left(1 + \Lambda^2 - 2\varepsilon + \frac{3}{5}(\Lambda - \varepsilon) \frac{3\mu + 2}{\mu + 1}\right) P_2(\eta) \quad (2.5)$$

Это выражение совпадает с результатами работ [2, 3]. Если ограничиться только этим приближением, то вытянутость или сплюснутость капли определяется знаком функции F .

В следующем приближении процедура выделения членов одинакового порядка по α связывает квадратичные слагаемые в p и f с линейными членами остальных функций. В результате (1.5)–(1.10) дает следующую задачу:

$$\nabla p_{i,e}^{(2)} = M_{i,e} \Delta \mathbf{V}_{i,e}^{(1)}, \quad \text{div } \mathbf{V}_{i,e}^{(1)} = 0, \quad \Delta \varphi_{i,e}^{(1)} = 0$$

$$f = 1: \quad V_{ne}^{(1)} = V_{ni}^{(1)}, \quad V_n^{(1)} = V_r^{(1)} + f_1 \frac{\partial V_r^{(0)}}{\partial r} - f_1 V_\theta^{(0)}$$

$$\left[V_\theta^{(1)} + f_1 \frac{\partial V_\theta^{(0)}}{\partial r} \right] = 0, \quad [\varphi^{(1)}] = f_1 [E_r^{(0)}]$$

$$\frac{d}{d\theta} \sigma_0 V_\theta^{(0)} \sin \theta + \frac{1}{\gamma} (E_{ne}^{(1)} - \Lambda E_{ni}^{(1)}) \sin \theta = 0, \quad E_{ne}^{(1)} - \varepsilon E_{ni}^{(1)} = \sigma_1$$

$$\left[M \left(\tau_{r\theta}^{(1)} + f_1 \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(0)}}{\partial r} + f_1' (\tau_{rr}^{(0)} - \tau_{\theta\theta}^{(0)}) \right) \right] = \sigma_1 E_\theta^{(0)} + \sigma_0 E_\tau^{(1)}$$

$$\left[p^{(2)} + f_1 \frac{\partial p^{(1)}}{\partial r} \right] - 2 \left[M \left(\frac{\partial V_r^{(1)}}{\partial r} + f_1 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial V_r^{(0)}}{\partial r} - f_1' \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta^{(0)}}{\partial r} - \frac{V_\theta^{(0)}}{r} \right) \right) \right] =$$

$$= Lf_2 - 2f_1(Lf_1 - f_1) + \frac{1}{2} (E_{ne}^2 - E_{te}^2 - \varepsilon(E_{ni}^2 - E_{ti}^2))$$

$$E_n^2 = 2E_r^{(0)} E_n^{(1)}, \quad E_\tau^2 = 2E_\theta^{(0)} E_\tau^{(1)}$$

$$E_n^{(1)} = E_r^{(1)} + f_1 \frac{\partial E_r^{(0)}}{\partial r} - f_1' E_\theta^{(0)}, \quad E_\tau^{(1)} = E_\theta^{(1)} + f_1 \frac{\partial E_\theta^{(0)}}{\partial r} - f_1' E_r^{(0)}$$

Решение для потенциала имеет вид:

$$\varphi_i^{(1)} = A_1 r \cos \theta + A_2 r^3 P_3, \quad \varphi_e^{(1)} = A_3 \frac{1}{r^2} \cos \theta + A_4 \frac{1}{r^4} P_3$$

$$A_1 = W + \frac{18}{5} \frac{1-\Lambda}{(\Lambda+2)^2} F, \quad A_2 = 4W \frac{\Lambda+2}{3\Lambda+4}, \quad W = \frac{12}{5} \gamma U \frac{\Lambda-\varepsilon}{(\Lambda+2)^2}$$

$$A_3 = W + \frac{6}{5} \frac{(1-\Lambda)^2}{(\Lambda+2)^2} F, \quad A_4 = 4W \frac{\Lambda+2}{3\Lambda+4} - \frac{9}{5} \frac{\Lambda(1-\Lambda)}{(\Lambda+2)^2} F$$

Поверхностная плотность заряда в первом порядке равна

$$\sigma_1 = E_{re}^{(1)} - \varepsilon E_{ri}^{(1)} + (\varepsilon - 1) \frac{9}{\Lambda + 2} F \cos \theta \sin^2 \theta + 6 \frac{1 - \Lambda}{\Lambda + 2} F \cos \theta P_2$$

Давления и скорости в окружающей среде и в капле равны соответственно

$$P_e^{(2)} = M_e \left(4B_1 \frac{P_2}{r^3} + \frac{56}{5} B_2 \frac{P_4}{r^5} \right), \quad V_{re}^{(1)} = \left(\frac{2B_1}{r^2} + \frac{2B_3}{r^4} \right) P_2 + \left(\frac{4B_2}{r^4} + \frac{2B_4}{r^6} \right) P_4$$

$$V_{\theta e}^{(1)} = \sin \theta \cos \theta \left(2B_3 \frac{1}{r^4} + \left(\frac{B_2}{r^4} + \frac{B_4}{r^6} \right) (7 \cos^2 \theta - 3) \right)$$

$$P_i^{(2)} = M_i (14B_5 r^2 P_2 + 22B_6 r^4 P_4), \quad V_{ri}^{(1)} = (2B_5 r^3 + 2B_7 r) P_2 + (4B_6 r^5 + 2B_8 r^3) P_4$$

$$V_{\theta i}^{(1)} = \sin \theta \cos \theta \left(-5B_5 r^3 - 3B_7 r - \frac{7}{2} \left(B_6 r^5 + \frac{5}{4} B_8 r^3 \right) (7 \cos^2 \theta - 3) \right)$$

$$B_3 = -B_1 - \frac{2}{7} FU, \quad B_4 = -2B_2 - \frac{17}{7} FU, \quad B_5 = -B_1 - \frac{5}{7} FU$$

$$B_6 = -B_2 - \frac{3}{7} FU, \quad B_7 = -B_1 + \frac{3}{7} FU, \quad B_8 = -2B_2 - \frac{6}{7} FU$$

$$B_1 = 3FU - \frac{6}{35} FUG - \frac{3}{5} FU \frac{\Lambda + 14}{\Lambda + 2} - \frac{3}{70} W \frac{80\varepsilon - 40 + 54\varepsilon\Lambda - 130\Lambda - 69\Lambda^2}{(\Lambda + 2)(3\Lambda + 4)}$$

$$B_2 = \frac{23}{21} FU - \frac{10}{21} W \frac{6\varepsilon + 4 - 3\Lambda}{3\Lambda + 4}, \quad G = M_i - M_e = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}$$

Поправка к зависимости радиуса от широтного угла имеет вид:

$$f_2 = A_{20} + A_{22} P_2(\eta) + A_{24} P_4(\eta) \quad (2.6)$$

$$A_{20} = -\frac{F^2}{5}$$

$$A_{22} = \frac{79\Lambda - 94}{35(\Lambda + 2)} F^2 + \frac{1}{4} \left(5 + 3G - \frac{6}{35} G^2 \right) FU +$$

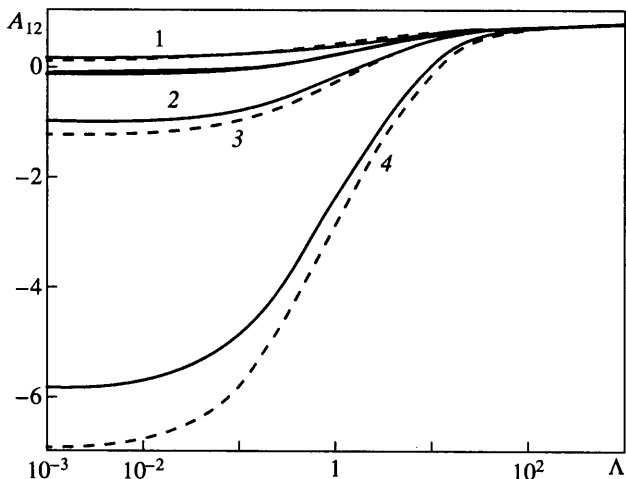
$$+ \frac{W}{14} \left(\frac{20\varepsilon + 116 + 24\varepsilon\Lambda + 251\Lambda + 114\Lambda^2}{(\Lambda + 2)(3\Lambda + 4)} + \frac{3(5 + G)}{20} \frac{80\varepsilon - 40 + 54\varepsilon\Lambda - 130\Lambda - 69\Lambda^2}{(\Lambda + 2)(3\Lambda + 4)} \right)$$

$$A_{24} = \frac{26}{35} F^2 + \frac{1}{15} \left(1 - \frac{11}{21} G \right) FU + \frac{W}{21} \left(2 \frac{3\varepsilon - 12 + 16\Lambda}{3\Lambda + 4} + \frac{9 + G}{3} \frac{6\varepsilon + 4 - 3\Lambda}{3\Lambda + 4} \right)$$

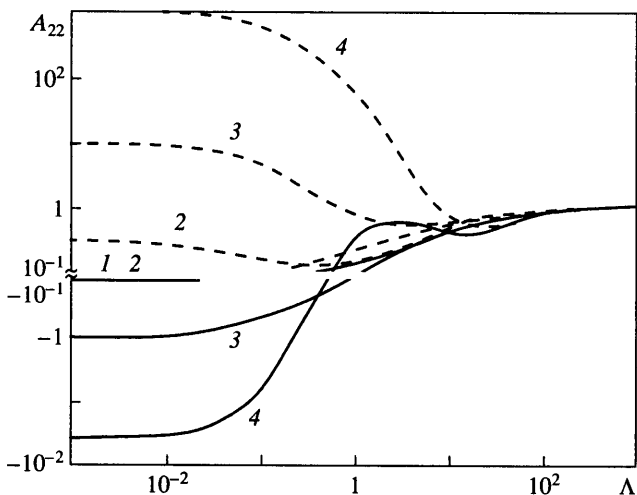
Здесь A_{20} – константа, определяемая из условия постоянства объема капли. Члены в (2.6), пропорциональные F^2 и FU , совпадают с данными работы [4]. С учетом первого и второго приближения (2.5) и (2.6) имеем следующее разложение радиуса капли:

$$f = 1 + \alpha A_{12} P_2 + \alpha^2 (A_{20} + A_{22} P_2 + A_{24} P_4) \quad (2.7)$$

где $A_{12} = F$. На фиг. 2–4 приведены зависимости коэффициентов A_{ij} в соотношении (2.7) от относительной проводимости Λ при различных значениях параметров μ и γ . Линейный коэффициент A_{12} от γ не зависит, и так же, как квадратичные коэффициенты, слабо зависит от относительной вязкости μ (фиг. 2). В то же время вклад A_{22} и A_{24} не мал по сравнению с линейным членом по α . С ростом γ влияние квадратичного слагаемого в (2.7) может на порядки превосходить вклад A_{12} (фиг. 3,4). Этот



Фиг. 2. Зависимость коэффициента A_{12} от относительной проводимости Λ . Сплошные линии $\mu = 0.01$, штриховые $\mu = 100$, $\epsilon = 0.1; 0.5; 2; 10$ (кривые 1–4)



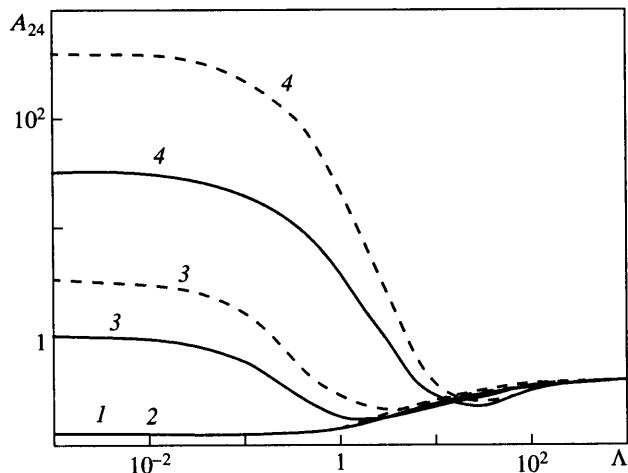
Фиг. 3. Зависимость коэффициента A_{22} от Λ , $\mu = 1$. Сплошные линии $\gamma = 0.01$, штриховые $\gamma = 10$, $\epsilon = 0.1; 0.5; 2; 10$ (кривые 1–4)

эффект объясняется тем, что ряды (2.1) являются фактически двухпараметрическими разложениями по параметрам α и γ . Причем первое слагаемое, пропорциональное γ , появляется только во втором порядке разложения по α . Так же, как в линейном приближении, условиями неизменности сферической формы капли является совместное выполнение равенств $\epsilon = 1$ и $\Lambda = 1$.

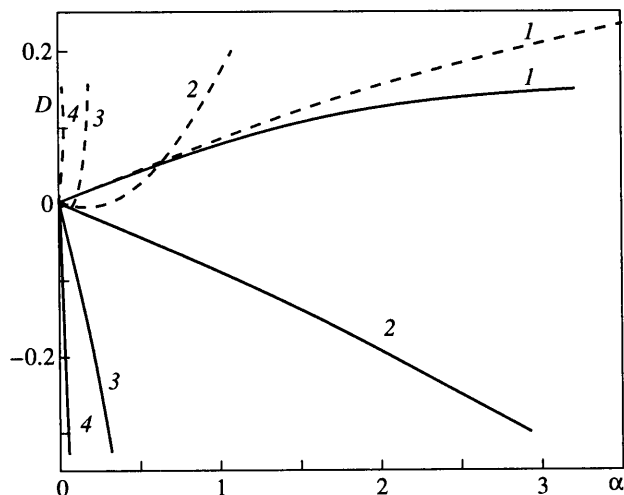
Деформацию капли определим следующим параметром [2]:

$$D = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}, \quad r_1 = f(\theta = 0), \quad r_2 = f(\theta = \pi/2) \quad (2.8)$$

где r_1 и r_2 есть размер полуоси капли в продольном и поперечном направлении по отношению к вектору напряженности поля соответственно. Значение $D > 0$ соответствует вытянутому сфероиду, а $D < 0$ – сплюснутому.

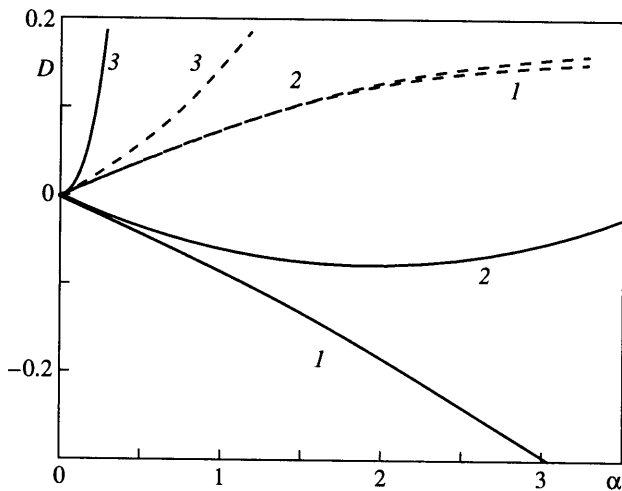


Фиг. 4. Зависимость коэффициента A_{42} от Λ , $\mu = 1$. Обозначения кривых те же, что на фиг. 3



Фиг. 5. Зависимость деформации капли $D = (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)$ от напряженности поля, $\Lambda = 10^{-3}$, $\mu = 0.1$. Обозначения кривых те же, что на фиг. 3

На фиг. 5 представлены зависимости деформации капли D от напряженности поля при некоторых значениях параметров ϵ , μ , γ и $\Lambda = 10^{-3}$. При переходе от $\gamma = 0.01$ к большим значениям сужается область параметров, при которых возможно сжатие капли. С увеличением Λ такой характер зависимостей $D(\alpha)$ не меняется. Кривые фиг. 5 строились в диапазоне $0 \leq \alpha \leq \alpha_k$, где α_k есть наибольшее α , при котором $f(\theta)$ остается выпуклой. Такой выбор диапазона α обусловлен данными наблюдений, согласно которым капля устойчива, пока ее фигура эллипсоидальна, а в момент распада она принимает гантелеобразную форму [11]. Эта гипотеза о стабильности только выпуклой формы широко используется априорно в теоретических исследованиях формы и устойчивости капли [12–15]. Как видно из графиков, результатом влияния параметра γ является предотвращение сжатия капли. Качественно такое воздействие можно объяснить конвективным переносом зарядов по поверхности капли, направленным от экватора к полюсам.



Фиг. 6. Зависимость деформации пузырька от напряженности поля, $\Lambda = 0$, $\mu = 0$. Сплошные линии $\epsilon = 0.5$, штриховые $\epsilon = 0.1$; $\gamma = 0$; 1; 100 (кривые 1–3)

В отсутствие конвекции поверхностного заряда ($\gamma = 0$) деформацию связывают с течением в капле следующим образом [2,3]. При $\epsilon \ll \Lambda$ скорость жидкости на межфазной поверхности направлена от экватора к полюсам. В то же время функция F в соотношении (2.5) положительна, т.е. сфероид вытянут по направлению поля. В противоположном случае $\epsilon \gg \Lambda$ течение направлено от полюсов к экватору, функция $F < 0$, и сфероид сплюснут. Если $\gamma > 0$, то в соответствии с соотношением (1.7) градиент конвективного потока заряда направлен в сторону наибольшего изменения омического тока, который максимален у полюсов. Следовательно, конвекция поверхностного заряда вызывает дополнительное движение жидкости от экватора к полюсам независимо от степени деформации капли.

В области параметров $0.01 \leq \mu \leq 100$, $0.02 \leq \epsilon \leq 50$, $10^{-3} \leq \Lambda \leq 10^3$, $\gamma \leq 1000$ и $\alpha \leq \alpha_k$ вычисленные значения деформации капли не выходят за пределы интервала $-0.33 \leq D \leq 0.33$, что соответствует отношению полуосей сфероида 1:2.

Аналогичное поведение демонстрируют пузырьки ($\mu = 0$, $\Lambda = 0$, $\epsilon_i = 1$) в предположении их несжимаемости. Под действием поля пузырьки могут как сплющиваться, так и вытягиваться по полю. Однако, как видно из фиг. 6, деформация сплющивания пузырьков подавляется с ростом γ или уменьшением ϵ . Наиболее велика область параметра $\gamma \lesssim 1$, в которой возможно сплющивание пузырьков для минимально возможных значений диэлектрической проницаемости окружающей жидкости $\epsilon_e \sim 2$. В частности, такими свойствами обладают вязкие диэлектрические жидкости с проводящими примесями. Однако уже при $\epsilon_e \geq 4$ пузырьки показывают только деформацию растяжения независимо от значения γ . Согласно [16], пузырьки диаметром менее 0.1 мм слабо деформируются под действием сил плавучести. Вероятно, к мелким пузырькам в наибольшей степени применим этот анализ. В работах [17, 18] исследование формы и устойчивости выполнено в априорном предположении о вытянутости пузырька в электрическом поле, однако следует учитывать, что при определенных условиях его формой является сплюснутый сфероид.

3. Эксперимент. Наблюдение деформации капель проводилось в прямоугольной ячейке с основанием 4×4 см и высотой 1.5 см. Боковые стенки выполнены из стекла, на металлические основания подавалось постоянное напряжение в пределах 0–10 кВ. Капли исследуемой жидкости диаметром 1.5–0.1 мм вводились в жидкость ячейки с помощью тонкого капилляра. В качестве исследуемых жидкостей использовались касторовое масло, веретенное масло, кремнийорганическая жидкость и вода. Свойств-

Таблица 1

	Жидкость	ϵ_L	$\lambda_L, \text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$	$\mu_L, \text{Пз}$	$T^*, \text{дин/см}$
<i>a</i>	Кремнийорганическая жидкость	2.69	$1.4 \cdot 10^{-12}$	11.9	–
<i>b</i>	Касторовое масло	5.1	$2.1 \cdot 10^{-10}$	14	1.2
<i>c</i>	Веретенное масло	2	$6 \cdot 10^{-12}$	0.73	0.14
<i>d</i>	Вода	81	10^{-6}	0.01	38

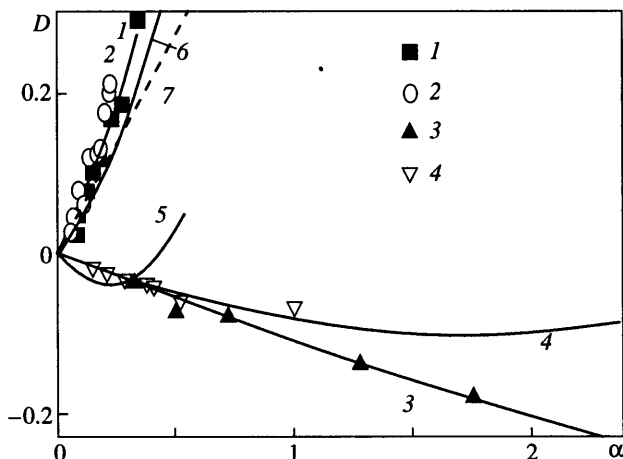
Таблица 2

<i>N</i>	Система	$r_0, \text{мм}$	ϵ	μ	Λ	γ
1	ba	0.15	1.9	1.18	150	54
2	da	0.5–0.8	30	$8.4 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^5$	770
3	ab	0.3	0.527	0.85	$6.67 \cdot 10^{-3}$	0.32
4	ab	0.09	0.527	0.85	$6.67 \cdot 10^{-3}$	1.1
5	ac	0.05	1.3	16.3	0.23	6.5
6	ca	0.05	0.74	0.061	4.3	37.7

ва этих жидкостей приведены в табл. 1 (позиции *a–d*), где ϵ_L , λ_L , μ_L – диэлектрическая проницаемость, проводимость и вязкость жидкости, T^* – коэффициент поверхностного натяжения межфазной границы жидкости с кремнийорганической жидкостью. Размеры капель определялись по фотографиям. Суммарная погрешность эксперимента составляла 10%.

На фиг. 7 приведены зависимости деформации капли от напряженности поля. В каждой паре жидкостей первая обозначает каплю. Точки обозначают экспериментальные данные, соответствующие кривые – результаты вычислений. Параметры жидких систем для каждой кривой графика приведены в табл. 2. Согласно линейному по α приближению (2.5), перестановка жидкостей в паре капля – среда приводит к изменению знака D , если ϵ/Λ значительно отличается от единицы. Примером таких пар являются *ab* и *ba* (фиг. 7, кривые 1, 3 и 4). В то же время увеличение γ снижает степень сплюснутости капли (кривые 3 и 4). Этот эффект более выражен у пары *ac* с радиусом капель 0.05 мм. В пределах экспериментальной ошибки системы *ac* и *ca* показывают только деформацию растяжения (фиг. 7, кривые 5 и 6).

Экспериментальные исследования проводились в условиях, максимально близких к условиям работы [2]. В ней приведено сравнение экспериментальных данных с линейным приближением (2.5) и найдено значительное расхождение результатов, которые в некоторых случаях различались в несколько раз. С учетом только линейных членов деформация описывается выражением $D_T = 3\alpha A_{12}/4$. На фиг. 7 для сравнения приведена эта зависимость, соответствующая параметрам кривой 2 (пунктирная линия 7). В данном случае отношение $\langle D \rangle / D_T = 1.54$, где $\langle D \rangle$ – среднеквадратичный наклон прямой, построенной по экспериментальным точкам кривой 2. Отметим, что интерпретация экспериментальных результатов в слабых полях ($\alpha \ll 1$) затруднена из-за систематических ошибок, связанных с искажением формы капли оптической системой. В особенности это касается объектов, попадающих не в центр, а на периферию фотокадра. Вследствие этого эксперименты выполняются вне области, в которой можно надежно наблюдать линейную зависимость. В работе [2] целью экспериментов была проверка линейной зависимости $D_T = 3\alpha A_{12}/4$, однако сравнение данных в некоторых опытах проводилось в области, где существенны квадратичные члены (до $\alpha \sim 2$).



Фиг. 7. Зависимость деформации капли от напряженности поля. Параметры жидких систем, соответствующих кривым 1–6, приведены в табл. 2. Штриховая линия 7 – линейное приближение для системы da

Таким образом, учет поверхностной конвекции заряда существенно корректирует линейное приближение деформации капли. Необходимость повторения опытов диктуется также тем, что здесь использованы жидкости значительно меньшей вязкости 1–10 Пз по сравнению с величиной ~ 100 Пз, характерной для работы [2]. В рассматриваемом случае более значительно влияние сопутствующих эффектов: движение капли вследствие разности плотностей и конвекция жидкости в ячейке в сильных полях. Эксперименты выполнялись вплоть до критических значений α_k , соответствующих распаду капли на равные части. Найдено, что незначительные отклонения, выходящие за пределы экспериментальной ошибки, обнаруживаются только вблизи α_k . Кроме того, расчетные значения α_k удовлетворительно совпадают с экспериментальными величинами.

Заключение. Под действием электрического поля сферические капли и пузырьки трансформируются в вытянутый или сплюснутый сфероид. В очень вязких жидкостях движение зарядов на границе раздела регулируется преимущественно омическими токами. В этом случае форма сфероида определяется только диэлектрической проницаемостью, проводимостью и вязкостью сред, причем деформация является монотонной функцией напряженности поля. В маловязких жидкостях становится существенной конвекция заряда на межфазной поверхности, действие которой сводится к снижению степени сплюснутости капли.

Эксперименты показали, что уменьшение радиуса капли уменьшает деформацию, если капля преобразуется в сплюснутый сфероид. В подходящих условиях деформация меняет знак, однако этот процесс односторонний. Расчеты показывают, что переход от сплюснутого к вытянутому сфероиду возможен при увеличении напряженности поля, а обратная трансформация невозможна. Это объясняется тем, что поверхностная конвекция заряда генерирует дополнительные потоки, направленные от экватора к полюсам, которые стимулируют вытягивание капли.

Вычисление деформации производилось в диапазоне напряженности от нуля до предельного значения, при котором форма капли остается выпуклой. Это предположение основано на данных наблюдения устойчивых форм в электрическом поле [11]. Экспериментальные значения напряженности деления капли удовлетворительно согласуются с расчетными значениями, соответствующими предельной выпуклой форме капли.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Калужской области (№ 00-01-00645 и 01-01-96002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Taylor G.* Studies in electrohydrodynamics. I. The circulation produced in a drop by an electric field // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1966. V. 291. № 1425. P. 159–166.
2. *Torza S., Cox R.G., Mason S.G.* Electrohydrodynamic deformation and burst of liquid drops // Phyl. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1971. V. 269. № 1198. P. 295–319.
3. *Melcher J.R., Taylor G.I.* Electrohydrodynamics: a review of the role of interfacial shear stresses // Annu. Rev. Fluid Mech. Palo Alto: California, 1969. V. 1. P. 111–146.
4. *Ajayi O.O.* A note on Taylor's electrohydrodynamic theory // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1978. V. 364. № 1719. P. 499–507.
5. *Gonzalez A., Castellanos A., Velarde M.G.* On the possibility of solitary waves at the surface of a liquid conductor // Fluid Physics: Lecture Notes Summer Schools. Eds. M.G. Velarde and C.I. Christov. Singapore: World Scientific, 1995. P. 442–459.
6. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
7. *Gogosov V.V., Shaposhnikova G.A.* Electrohydrodynamics of surface phenomena // Intern. J. Appl. Electromagnetics Materials. 1990. V. 1. № 1. P. 45–58.
8. *Шутов А.А., Алонцева Н.М., Шкадов В.Я.* Теоретическое и экспериментальное исследование электрогидродинамических струйных и пленочных течений, их устойчивости и моделирование процесса диспергирования жидкости // Тр. регионального конкурса научных проектов в области естественных наук. Калуга: Изд. дом Эйдос, 2000. Вып. 1. С. 67–88.
9. *Shkadov V.Ya., Shutov A.A.* Disintegration of a charged viscous jet in a high electric field // Fluid Dynamics Res. 2001. V. 28. № 1. P. 23–39.
10. *Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А.* Курс теоретической физики. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962. 820 с.
11. *Sample S.B., Raghupathy B., Hendricks C.D.* Quiescent distortion and resonant oscillations of a liquid drop in an electric field // Intern. J. Eng. Sci. 1970. V. 8. № 1. P. 97–109.
12. *Brazier-Smith P.R.* Stability and shape of isolated and pairs of water drops in an electric field // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 1. P. 1–6.
13. *Sabry A.A.* Symmetric and asymmetric stabilities of charged liquid drops // Physica. A. 1980. V. 101. № 1. P. 223–242.
14. *Rosenkilde C.E.* A dielectric fluid drop in an electric field // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1969. V. 312. № 1511. P. 473–494.
15. *Feng Z.C., Leal L.G.* Numerical simulation of the dynamics of an electrically levitated drop // Intern. J. Multiphase Flow. 1996. V. 22. № 1. P. 93–120.
16. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 539 с.
17. *Cheng K.J., Chaddock J.B.* Deformation and stability of drops and bubbles in an electric field // Phys. Lett. 1984. V. 106a. № 1, 2. P. 51–53.
18. *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* О диспергировании в электростатическом поле заряженного газового пузыря в жидком диэлектрике // Ж. техн. физ. 2000. Т. 70. Вып. 6. С. 37–42.

Москва,
Обнинск
E-mail: fci@meteo.ru

Поступила в редакцию
8.XI.2001