

УДК 532.517.013.4

© 2002 г. М.В. УСТИНОВ

## ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНЕ С ЗАТУПЛЕННОЙ ПЕРЕДНЕЙ КРОМКОЙ К НЕСТАЦИОНАРНЫМ ВИХРЕВЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

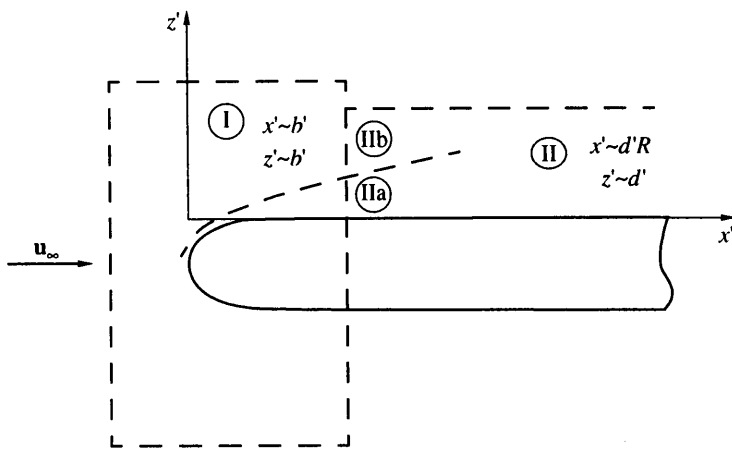
Найдена реакция пограничного слоя на пластине с затупленной передней кромкой на вмероженные в поток вихревые возмущения, завихренность которых перпендикулярна ее поверхности. Показано, что такие вихри порождают в пограничном слое неоднородность продольной компоненты скорости, аналогичную полосчатой структуре, возникающей при повышенной степени турбулентности набегающего потока. Для периодических и локализованных исходных возмущений найдены зависимости амплитуды и формы неоднородности пограничного слоя от расстояния до передней кромки, продольного и поперечного масштабов и других параметров. Обнаружено уменьшение восприимчивости пограничного слоя при увеличении частоты или уменьшении продольного масштаба возмущений.

*Ключевые слова:* пограничный слой, устойчивость, вихревые возмущения, турбулентность.

При повышенной степени турбулентности набегающего потока ( $\epsilon_T > 1\%$ ) ламинарно-турбулентный переход происходит без образования волн Толлмина – Шлихтинга. Вместо них в пограничном слое наблюдается рост низкочастотных возмущений скорости [1]. Визуализация потока показывает, что эти возмущения представляют собой узкие, вытянутые в направлении потока полосы [2]. Предполагается, что такие полосчатые структуры появляются в результате проникновения вихревых возмущений из внешнего потока в пограничный слой и их последующего усиления в нем. Взаимодействие стационарных вихревых возмущений с пограничным слоем исследовалось теоретически в [3–5] и экспериментально в [6, 7]. Оказалось, что как продольные вихри, так и завихренность потока, нормальная к передней кромке, порождают возмущения, аналогичные полосчатой структуре. Они сначала нарастают пропорционально расстоянию от передней кромки, а затем затухают вследствие вязкой диссипации.

Воздействие на пограничный слой плоской пластины нестационарного возмущения, вносимого импульсным выдувом воздуха из трубки, расположенной перед передней кромкой, исследовалось в [8, 9]. В этом случае в пограничном слое возникал "пафф" – локализованное по трансверсальной координате и вытянутое в продольном направлении возмущение, движущееся в направлении потока. Оно обладало всеми свойствами полосчатой структуры, но не усиливалось, а затухало вниз по потоку. Расчеты взаимодействия нестационарных продольных вихрей с пограничным слоем [10] показали, что нестационарность приводит к замедлению, но не к подавлению роста возмущений.

В настоящей работе исследуется восприимчивость пограничного слоя на плоской пластине к нестационарным вихревым возмущениям, завихренность которых нормальна к поверхности пластины. В [5, 11] показано, что такие возмущения, а не продольные вихри, наиболее сильно порождают полосчатую структуру из-за их дополнительного усиления вследствие растяжения вихревых линий течением около затупленной передней кромки. Нормальная к пластине завихренность (или неодно-



Фиг. 1. Схема разделения поля течения на области

родность продольной компоненты скорости в трансверсальном направлении) является главной составляющей возмущения, породившего пафф в [8, 9]. Поэтому полученные результаты позволяют описать развитие локализованных квазистационарных возмущений в пограничном слое.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим обтекание плоской пластины с затупленной передней кромкой потоком вязкой несжимаемой жидкости. Характерный размер затупления передней кромки обозначим  $b'$ . (Здесь и далее размерные величины будем обозначать буквами со штрихом, а безразмерные – без штриха.) Для описания течения введем декартову систему координат, оси  $x, y, z$  которой направим по потоку, параллельно передней кромке и по нормали к поверхности пластины. Начало координат расположим так, чтобы плоскость  $xu$  совпадала с верхней поверхностью пластины, а передняя кромка соответствовала  $x' = 0$  (фиг. 1). Предположим, что в набегающем потоке имеются малые возмущения продольной и трансверсальной компоненты скорости, которые периодичны по размаху и времени с периодами  $d'$  и  $T'$  и однородны по вертикальной координате  $z'$ . Такие возмущения, удовлетворяющие линеаризованным относительно однородного основного течения со скоростью  $u'_\infty$  уравнениям Навье-Стокса, имеют вид

$$\begin{Bmatrix} u'_p \\ v'_p \\ w'_p \end{Bmatrix} = \varepsilon u'_\infty \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{d'}{D'} - i \frac{\sigma' d'}{\beta} \\ 0 \end{Bmatrix} \exp[i\Phi - \sigma' x'] \quad (1.1)$$

$$\Phi = \omega \left( \frac{x' - u'_\infty t'}{D'} \right) + \beta \frac{y'}{d'}; \quad \sigma' = \frac{v'}{u'_\infty d'^2} \left[ \beta^2 + \left( \frac{d'}{D'} \right)^2 \right]$$

где  $u'_p, v'_p, w'_p$  – возмущения продольной, трансверсальной и вертикальной составляющих скорости,  $\varepsilon$  – малый параметр, определяющий их амплитуду,  $D' = u'_\infty T'$  – продольный пространственный период возмущений,  $v'$  – коэффициент динамической вязкости. В разделах 1–3, где рассматриваются периодические по  $y'$  и  $t'$  возмущения, параметры  $\omega$  и  $\beta$  полагаются равными  $2\pi$ . Решение с произвольными  $\omega$  и  $\beta$  потребуется позднее при анализе восприимчивости пограничного слоя к локализованным возмущениям.

Будем считать число Рейнольдса  $R = u'_\infty d' / \nu'$ , вычисленное по поперечному периоду неоднородности, достаточно большим, а поперечный период возмущений  $d'$  малым по сравнению с размером затупления передней кромки  $b'$ . Наконец предположим, что продольный период возмущений  $D'$  по порядку величины равен расстоянию  $L'$ , на котором они усиливаются в пограничном слое. Полагая, что оценка  $L' \sim d'R$ , полученная в [5], справедлива и для нестационарных возмущений, будем считать что  $D' \sim d'R$  или  $T' \sim d'R/u'_\infty$ .

Ограничимся рассмотрением линейной по  $\varepsilon$  задачи об обтекании пластины слабо-неоднородным потоком с возмущениями скорости (1.1). Решение для составляющих скорости  $u', v', w'$  и давления  $p'$  представим в виде

$$\begin{cases} u' \\ v' \\ w' \end{cases} = u'_\infty \begin{cases} U_b \\ 0 \\ W_b \end{cases} \left\{ (x', z') + \varepsilon \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases} (x', z') e^{i\Phi} \right\}$$

$$p' = \rho' u'_\infty{}^2 [P_b(x', z') + \varepsilon p(x', z') e^{i\Phi}]$$

где  $\rho'$  – плотность, безразмерные компоненты скорости  $U_b, W_b$  и давление  $P_b$  соответствуют обтеканию пластины однородным потоком, а  $u, v, w, p$  – возмущениям, порождаемым неоднородностью. Развитие возмущений описывается линеаризованными относительно основного течения уравнениями Навье – Стокса

$$\begin{aligned} \mathbf{L}u + \frac{\partial U_b}{\partial x'} u + \frac{\partial p}{\partial x'} &= \frac{1}{D'} (\mathbf{M}u - i\omega p) \\ \mathbf{L}v + \frac{i\beta}{d'} p &= \frac{1}{D'} \mathbf{M}v \\ \mathbf{L}w + \frac{\partial W_b}{\partial x'} u + \frac{\partial W_b}{\partial z'} w + \frac{\partial p}{\partial z'} &= \frac{1}{D'} \mathbf{M}w \\ u \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{i\beta}{d'} v + \frac{\partial w}{\partial z'} &= -\frac{i\omega}{D'} u \\ \mathbf{L} &= U_b \frac{\partial}{\partial x'} + W_b \frac{\partial}{\partial z'} - \frac{1}{l'} \left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{\beta^2}{d'^2} \right) \\ \mathbf{M} &= i\omega(1 - U_b) + \frac{1}{l'} \left( i\omega \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\omega^2}{d'^2} \right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

где  $l' = \nu' / u'_\infty$  – вязкая длина.

Возмущения скорости  $u, v, w$  удовлетворяют условиям прилипания на поверхности пластины и граничным условиям в набегающем потоке, следующим из (1.1)

$$x' \rightarrow -\infty: \quad u \rightarrow e^{-\sigma'x'}, \quad v \rightarrow -\left( \frac{d'}{D'} + i \frac{\sigma'd'}{\beta} \right) e^{-\sigma'x'}, \quad w \rightarrow 0$$

$$u, v, w(x', y'_w(x')) = 0 \tag{1.3}$$

**2. Решение на начальном участке ( $x'/d' \ll R$ ).** Решение задачи (1.2), (1.3) будем искать методом сращиваемых асимптотических разложений. Поле течения разобьем на две области, схематически показанные на фиг. 1. Область I представляет собой окрестность передней кромки с характерным размером  $b'$  ( $x' \sim b', z' \sim b'$ ). Течение в ней является невязким вне тонкого пограничного слоя. Вязкие члены становятся су-

ществственными в области II длиной порядка  $x' \sim d'R$ . Вертикальный размер этой области порядка  $z' \sim d'$  определяется расстоянием от стенки, на котором проявляется вытесняющее действие пограничного слоя на возмущения скорости. В начальной части области II (при  $b' \ll x' \ll d'R$ ) ее можно разделить на две подобласти: IIa – пограничный слой у стенки, в котором  $z' \sim \sqrt{\nu'x'/u'_\infty}$  и вязкую подобласть IIb, в которой  $\sqrt{\nu'x'/u'_\infty} \ll z' \sim d'$ .

Задача для нестационарных возмущений (1.2), (1.3) отличается от аналогичной задачи для стационарной неоднородности потока, рассмотренной в [5], ненулевыми граничными условиями для  $v$ , в набегающем потоке и наличием правых частей в уравнениях (1.2). Правые части этих уравнений порядка  $1/D'$ , а левые – порядка  $1/x'$ , поэтому в вязкой области I и в начальной части области II, где  $x' \ll D' \sim d'R$ , правыми частями можно пренебречь. Возмущениями трансверсальной компоненты скорости в набегающем потоке также будем пренебрегать как малыми порядка  $R^{-1}$  по сравнению с возмущениями ее продольной составляющей. Следовательно, решение для нестационарных возмущений при  $x' \ll d'R$  совпадает с решением стационарной задачи, найденным в [5]. Поэтому здесь приведем только необходимое для дальнейшего анализа решение в начальной части вязкой области II, которое запишем в безразмерных переменных

$$X = \frac{\beta^2 x'}{R d'}; \quad Z = \beta z; \quad T = \frac{\beta^2 t' u'_\infty}{R d'} \quad (2.1)$$

удобных для рассмотрения задачи в основной части этой области. В вязкой области IIb решение имеет вид

$$u(X, Z) \rightarrow 1, \quad v(X, Z) \rightarrow A, \quad w(X, Z) \rightarrow -\beta AZ; \quad X \rightarrow 0, \quad Z \gg \sqrt{X} \quad (2.2)$$

$$A = \frac{\beta b'}{a d'} \ln(b' / d')$$

Большой коэффициент  $A$  здесь описывает усиление возмущений вследствие растяжения вихревых нитей течением в окрестности передней кромки, константа  $a \sim 1$  определяется формой затупления.

В вязкой подобласти IIa решение совпадает (с точностью до коэффициента) с известным аналитическим решением [12]

$$u = \frac{1}{2} ARX\eta f''(\eta), \quad v = -i\beta A f'(\eta), \quad w = -\frac{\beta}{4} A\sqrt{X}[\eta^2 f'' - 3\eta f' - f], \quad \eta = Z/\sqrt{X} \quad (2.3)$$

Здесь  $f(\eta)$  – функция, задающая профиль скорости в пограничном слое Блазиуса, которая находится из краевой задачи

$$f''' + \frac{1}{2} ff'' = 0; \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \quad (2.4)$$

**3. Решение в основной части области II.** Решение при  $X \ll 1$  (2.3) позволяет предположить, что при  $X \sim 1$  возмущения продольной компоненты скорости становятся порядка  $AR$ , а остальных ее составляющих – порядка  $A$ . Поэтому в области II решение будем искать в виде

$$u = ARU(X, Z), \quad v = \beta AV(X, Z), \quad w = \beta AW(X, Z), \quad p = \beta(A/\text{Re})P(X, Z) \quad (3.1)$$

где  $U, V, W, P$  – безразмерные функции, величина которых порядка 1. Подставляя эти выражения в линеаризованные уравнения Навье – Стокса (1.2) и отбрасывая члены

порядка  $1/R^2$ , получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}
 U_0 \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial U_0}{\partial X} U + W_0 \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial U_0}{\partial Z} W &= \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} - U + i\Omega(1 - U_0)U \\
 U_0 \frac{\partial V}{\partial X} + W_0 \frac{\partial V}{\partial Z} &= -iP + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} - V + i\Omega(1 - U_0)V \\
 U_0 \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial W_0}{\partial X} U + W_0 \frac{\partial W}{\partial Z} + \frac{\partial W_0}{\partial Z} W &= -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} - W + i\Omega(1 - U_0)W \\
 \frac{\partial U}{\partial X} + iV + \frac{\partial W}{\partial Z} &= -i\Omega U \quad \Omega = \frac{\omega d' R}{\Gamma u_\infty \beta^2}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

где  $\Omega$  – безразмерная частота. При выводе (3.2) предполагалось, что основное течение в области II соответствует пограничному слою Блазиуса

$$\begin{aligned}
 U_b = U_0(\eta) \quad W_b = \frac{1}{R} W_0(\eta) \quad P_b = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \\
 U_0 = f' \quad W_0 = \frac{1}{2\sqrt{X}}(\eta f' - f) \quad \eta = Z/\sqrt{X}
 \end{aligned}$$

а функция  $f$  удовлетворяет (2.4).

Система (3.2) параболического типа и для нее требуются граничные условия на стенке, при  $Z \rightarrow \infty$  и начальные условия в некотором сечении  $X = X_0$ . При достаточно малом  $X_0$  последние задаются решением в начальной части области II.

$$U = \frac{1}{2} X_0 \eta f''(\eta); \quad V = -if'(\eta) \tag{3.3}$$

которое справедливо как при  $X \sim \sqrt{Z}$ , так и при  $Z \gg \sqrt{X}$ . На стенке имеют место условия прилипания

$$U(X, 0) = V(X, 0) = W(X, 0) = 0 \tag{3.4}$$

Для постановки граничных условий во внешнем потоке потребуем, чтобы продольная  $U$ , трансверсальная  $V$  составляющие скорости и давление  $P$  стремились к конечным пределам  $U_\infty, V_\infty, P_\infty$  при  $Z \rightarrow \infty$ . Такое поведение решения характерно для уравнений пограничного слоя. Учитывая асимптотику основного течения при  $Z \rightarrow \infty$ :  $U_0 \rightarrow 1, W_0 \rightarrow W_{00}/\sqrt{X}, W_{00} = (1/2) \lim_{\eta \rightarrow \infty} (\eta f' - f)$ , получим, что в этом пределе первое

уравнение (3.2) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

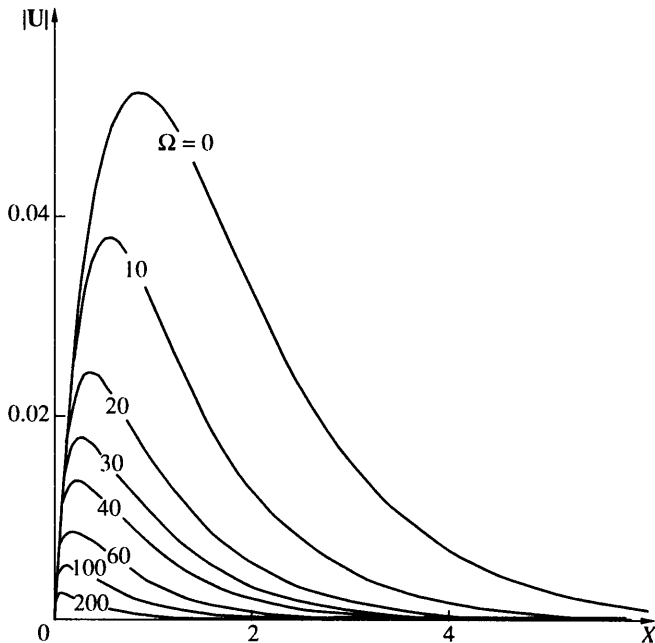
$$\frac{dU_\infty}{dX} = -U_\infty$$

При нулевом начальном условии, следующем из (3.3), его решение есть  $U_\infty \equiv 0$ . Из второго уравнения (3.2) при  $Z \rightarrow \infty$  имеем

$$\frac{dV_\infty}{dX} = -iP_\infty - V_\infty$$

Из уравнения неразрывности следует, что при  $Z \rightarrow \infty$  вертикальная скорость ведет себя как  $W \approx iV_\infty Z + W_\infty$ . Подставляя это выражение в третье уравнение (3.2) и приравнявая члены порядка  $Z$ , получим равенство

$$\frac{dV_\infty}{dX} = -V_\infty \tag{3.5}$$



Фиг. 2. Зависимости модуля возмущений продольной компоненты скорости от  $X$  при разных безразмерных частотах  $\Omega$

которое не противоречит предыдущему уравнению только при  $P_\infty \equiv 0$ . Это условие для давления вместе с  $U_\infty = 0$  составляют полные граничные условия во внешнем потоке для (3.2). Однако при численном решении этой системы уравнений удобнее пользоваться не граничным условием для  $P$ , а эквивалентным ему условием для  $V$ . Последнее дается решением (3.5) с начальным условием  $V_\infty(X_0) = V_\infty(0) = -i$ , следующим из (3.3). Таким образом, будем рассматривать граничные условия во внешнем потоке вида

$$U(X, \infty) = 0, \quad V(X, \infty) = -i \exp(-X) \quad (3.6)$$

Эти граничные условия, начальные условия (3.3) и условия прилипания (3.4) образуют полную постановку задачи для уравнений (3.2). Единственным параметром, входящим в эту задачу, является безразмерная частота  $\Omega$ , поэтому ее решения  $U, V, W, P$ , кроме  $X$  и  $Z$ , зависят только от  $\Omega$  и не зависят от формы передней кромки, числа Рейнольдса и других параметров. Следовательно, вид решения в области II (3.1) можно трактовать как закон подобия.

Задача (3.2), (3.3), (3.4) (3.6) решалась численно маршевым методом. Для аппроксимации производных по  $X$  использовалась неявная разностная схема второго порядка. Дискретизация производных по  $Z$  проводилась методом коллокаций, причем граничные условия при  $Z = 0$  и  $Z \rightarrow \infty$  выполнялись за счет выбора базисных функций. Более подробно метод решения описан в [5]. Предварительные расчеты показали, что результаты не зависят от места задания начальных условий при  $X_0 \leq 10^{-5}$ , поэтому основные расчеты проводились при  $X_0 = 10^{-5}$ .

Зависимости модуля продольной компоненты скорости  $|U|$  при  $\eta = 2.3$  от  $X$  для различных значений безразмерной частоты  $\Omega$  показаны на фиг. 2. Выбранное расстояние от стенки примерно соответствует максимуму возмущений по  $Z$  при малых  $X$  (положение максимума при этом не зависит от частоты). Решение для остальных

компонент скорости  $V$  и  $W$  не представляет интереса, так как при  $X \sim 1$  они в  $R$  раз меньше возмущений продольной ее компоненты. При всех  $\Omega$  возмущения сначала растут линейно по  $X$  в соответствии с аналитическим решением при  $X \ll 1$  (2.3), затем достигают максимума и далее затухают (см. фиг. 2). При увеличении частоты положение максимума сдвигается в сторону меньших  $X$ , а его величина постепенно уменьшается.

Вертикальные профили модуля возмущений продольной компоненты скорости при  $X = 0.1$  и  $1$  и различных значениях  $\Omega$  построены на фиг. 3, *a* и *б* соответственно. При малых  $\Omega$  и  $X$  они почти совпадают с аналитическим решением [12] (2.3), которое показано жирной сплошной линией. При увеличении расстояния от передней кромки максимум возмущений постепенно удаляется от стенки. Этот сдвиг, практически незаметный при малых  $\Omega$ , становится значительным при большой частоте. Аналогичное поведение возмущений пограничного слоя, вызванных нестационарными продольными вихрями набегающего потока, получено в [10]. Оно также качественно соответствует экспериментальным данным Кендалла, приведенным в этой работе.

Для выявления зависимости решения от основных параметров перепишем выражение для возмущений продольной компоненты скорости (3.1) в размерном виде. Отметим, что безразмерная функция  $U$  в нем на самом деле зависит не от двух ( $X$  и  $Z$ ), а от трех безразмерных переменных  $X$ ,  $Z$  и  $\Omega$ . Для дальнейшего удобнее заменить ее другой функцией  $U_*$ , зависящей от  $X$ ,  $\eta$  и  $\Omega$  и записать выражение для  $U$  из (3.1) в виде

$$u = ARU_*(X, \eta, \Omega) \quad (3.7)$$

Отсюда получается следующее выражение для размерной амплитуды пульсаций скорости  $a'$  в пограничном слое

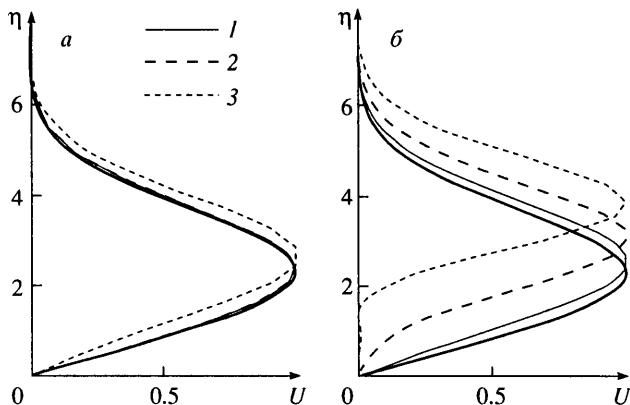
$$a'(x', z') = \varepsilon \frac{u'_\infty}{a} \ln\left(\frac{b'}{d'}\right) R_b \left| U_* \left( \frac{4\pi^2 v' x'}{u'_\infty d'^2}, z' \sqrt{\frac{u'_\infty}{v' x'}}, \frac{d'^2 \omega'}{4\pi^2 v'} \right) \right|$$

где  $\omega' = 2\pi/T'$  – размерная частота,  $R_b = u'_\infty b' / v'$  – число Рейнольдса, вычисленное по размеру затупления передней кромки. Из него видно, что одинаковые законы развития имеют возмущения, частота которых обратно пропорциональна квадрату поперечного периода. При этом расстояние от передней кромки, на котором они достигают максимума, пропорционально  $d'^2$ . Максимальная по  $x$  амплитуда возмущений очень слабо (логарифмически) зависит от их поперечного масштаба и определяется в основном размером затупления передней кромки. Сравнение вида зависимостей от основных параметров стационарных возмущений, порожденных продольными вихрями и неоднородностью потока в трансверсальном направлении, проведено в [5]. Для нестационарных возмущений сравнить законы развития этих двух видов возмущений невозможно из-за отсутствия соответствующих данных в работе [10], где приведены результаты только для нескольких конкретных значений поперечного периода и частоты.

**4. Решение для локализованного возмущения.** Имея решение для периодических по  $y$  и  $t$  возмущений, найдем реакцию пограничного слоя на локализованное в пространстве и времени возмущение, аналогичное вносимому в поток в экспериментах [8, 9]. Пусть  $D'$  и  $d'$  – его продольный и поперечный размеры, а продольная компонента скорости в набегающем потоке имеет вид

$$u'(x', y', t') = u'_\infty [1 + \varepsilon u_i(x, y, t)]; \quad x' \rightarrow -\infty \quad (4.1)$$

где  $x = x'/d'$ ,  $y = y'/d'$ ,  $t = u'_\infty t' / D'$  – безразмерные координаты и время, а функция  $u_i$ ,



Фиг. 3. Вертикальные профили модуля возмущений продольной компоненты скорости  $U = |u|/|u|_{\max}$  при  $X = 0.1$  (а) и  $X = 1$  (б). Кривые 1–3 соответствуют  $\Omega = 0, 10, 40$

задающая форму неоднородности скорости, представима в виде интеграла Фурье

$$u_i(x, y, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\omega, \beta) \exp[-\sigma(\omega, \beta)x + i\omega(x-t) + i\beta y] d\omega d\beta \quad (4.2)$$

$$\sigma = \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$$

Здесь  $g(\omega, \beta)$  – образ  $u_i$  при преобразовании Фурье по переменным  $y$  и  $t$ , вычисленный при  $x = 0$

$$g(\omega, \beta) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} u_i(0, y, t) \exp[i\omega t - i\beta y] dy dt$$

Так как задача о возмущениях пограничного слоя, порождаемых набегающим потоком вида (4.1), линейна и однородна по переменным  $y$  и  $t$ , то в силу принципа суперпозиции, ее решение есть интеграл по  $\omega$  и  $\beta$  от возмущений, порожденных подынтегральным выражением (4.2). То есть продольная компонента скорости в пограничном слое имеет вид

$$u'_p(x', y', t') = u'_\infty [U_p(x, z) + \epsilon u(x, y, z, t)] \quad (4.3)$$

$$u_i(x, y, z, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\omega, \beta) u_*(\omega, \beta, x, z) \exp[i\omega(x-t) + i\beta y] d\omega d\beta$$

где  $u_*(\omega, \beta, x, z)$  – возмущения в пограничном слое при неоднородности набегающего потока

$$u'_p(x, y, t) = \epsilon u'_\infty \exp[-\sigma(\omega, \beta)x + i\omega(x-t) + i\beta y]$$

которая, будучи записанной в размерных переменных, в точности совпадает с (1.1). Следовательно, функция  $u_*$  дается решением задачи для периодической неоднородности потока (3.7). Выразив в нем универсальные переменные  $X$  и  $\Omega$  через  $x, \omega$ ;  $X = \beta^2 x, \Omega = \omega/\beta^2$ , получим искомое решение

$$u = AR \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\omega, \beta) U_* \left( \beta^2 x, \eta, \frac{\omega}{\beta^2} \right) \exp[i\omega(x-t) + i\beta y] d\omega d\beta \quad (4.4)$$



При малых  $x$  (когда  $\beta^2 x \ll 1$  для всех  $\beta$ , дающих существенный вклад в интеграл (4.4)) справедливо аналитическое решение в начальной части области  $\Pi$  (2.3)  $U_* = 1/2 X \eta f''$  и выражение для локализованного возмущения в пограничном слое существенно упрощается

$$u = \frac{1}{2} AR \eta f'' \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 g(\omega, \beta) \exp[i\omega(x-t) + i\beta y] d\beta = \frac{1}{2} AR \eta f'' \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}(0, y, t-x) \quad (4.5)$$

Из этого простого решения видно, что при  $x \ll 1$  возмущения возрастают линейно по  $x$  со скоростью, не зависящей от их поперечного и продольного (временного) масштабов. Их вертикальный профиль не зависит от  $y$ ,  $x$  и  $t$  и определяется аналитическим решением (2.3). Профиль возмущений скорости в пограничном слое по трансверсальной координате  $y$  также не зависит от  $x$ , однако он радикально отличается от профиля неоднородности скорости набегающего потока. Зависимость возмущений от времени при фиксированном  $x$  отличается от исходной в набегающем потоке только сдвигом по времени.

Для нахождения асимптотики решения при  $x \gg 1$  перейдем в (4.4) к интегрированию по универсальным переменным  $X$  и  $\Omega$ .

$$u = \frac{AR}{x^{3/2}} \iint_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{X} g\left(\Omega \frac{X}{x}, \sqrt{\frac{X}{x}}\right) U_*(X, \eta, \Omega) \exp[i\Omega(1-\xi) + i\kappa\sqrt{X}] d\Omega dX \quad (4.6)$$

$$\kappa = y/\sqrt{X}, \quad \xi = t/x$$

Предположим, что  $U_*$  достаточно быстро стремится к нулю при  $|X|, |\Omega| \rightarrow \infty$  так, что определяющий вклад в (4.6) вносит интеграл по ограниченной области  $|X| \leq X_m, |\Omega| \leq \Omega_m$ . Тогда при  $x \gg X_m \Omega_m$  оба аргумента функции  $g$  близки к нулю, и она может быть оценена как

$$g\left(\Omega \frac{X}{x}, \sqrt{\frac{X}{x}}\right) \approx g(0, 0) = \frac{1}{4\pi^2} V; \quad V = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dt u_i(0, y, t)$$

В этих предположениях решение для возмущений в пограничном слое перестает зависеть от формы исходной неоднородности и принимает вид

$$u \approx \frac{ARV}{x^{3/2}} I(\xi, \kappa, \eta) \quad (4.7)$$

$$I = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{X} U_*(X, \eta, \Omega) \exp[i\Omega(1-\xi) + i\kappa\sqrt{X}] d\Omega dX$$

Найденная асимптотика решения показывает, что вдали от передней кромки возмущения затухают как  $x^{-3/2}$ . Множитель  $I$ , определяющий форму возмущенной области, зависит от комбинации  $t/x$ , следовательно, максимум возмущений смещается вниз по потоку с некоторой постоянной скоростью, а длина возмущенной области увеличивается пропорционально времени. Поперечный ее размер пропорционален  $\sqrt{x}$  или  $\sqrt{t}$ . Эти свойства решения соответствуют характеристикам паффов, наблюдавшихся в [8, 9].

Для сравнения приведем здесь также выражение для возмущений пограничного слоя от стационарной неоднородности потока вида  $u_i(x, y, t) = u_i(x, y)$ , которое получается аналогично выводу (4.4) при использовании только преобразования Фурье по  $y$

в представлении для решения

$$u_y = AR \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(\beta) \overline{U_*}(\beta^2 x, \eta, 0) \exp(i\beta y) d\beta \quad (4.8)$$

$$g_0(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_i(0, y) \exp(-i\beta y) dy$$

Здесь  $g_0(\beta)$  – фурье-образ неоднородности скорости. Описанным выше способом находятся стационарные возмущения при малом и большом расстояниях от передней кромки

$$u_y \approx \frac{1}{2} AR x \eta f'' \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}(0, y); \quad x \ll 1$$

$$u_y \approx \frac{AR V_0}{\sqrt{x}} I_0(x, \eta); \quad x \gg 1$$

(4.9)

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{X}} U_*(X, \eta, 0) \exp(ix\sqrt{X}) dX, \quad V_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u_i(0, y) dy$$

При  $x \ll 1$  асимптотические решения для стационарных и нестационарных возмущений совпадают, тогда как при  $x \gg 1$  они имеют разный закон затухания.

В качестве примера решения при  $x \sim 1$  рассмотрим возмущения пограничного слоя, порождаемые неоднородностью потока

$$u_i(0, y, t) = \exp[-y^2 - (t/\lambda)^2] \quad (4.10)$$

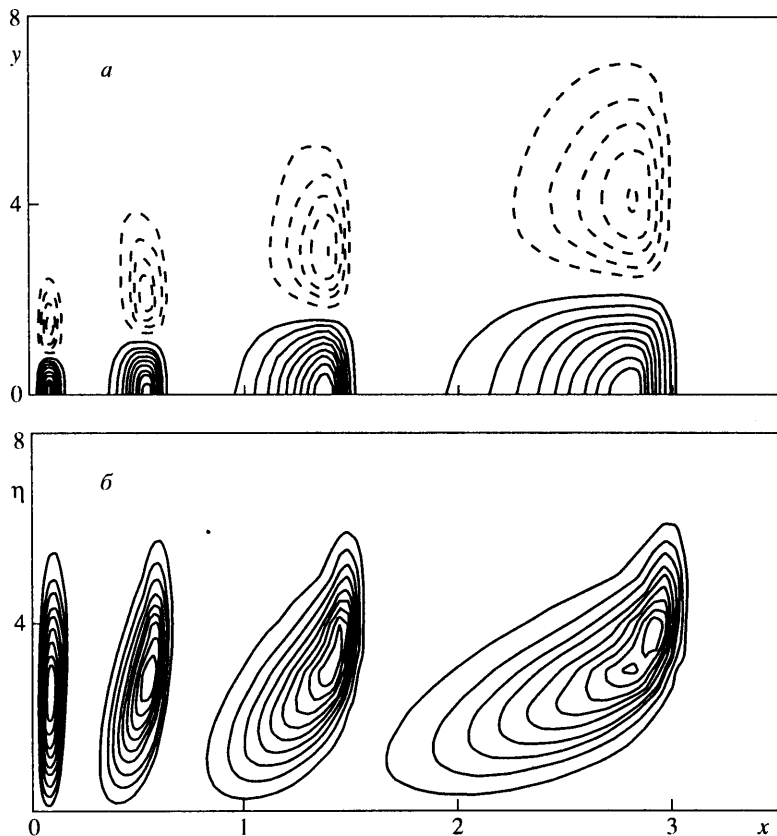
которая может служить моделью импульсного возмущения набегающего потока в экспериментах [8, 9]. Параметр  $\lambda$  задает характерную длину неоднородности (во времени или пространстве). Выбранная форма неоднородности также удобна для численного нахождения решения, так как ее фурье-образ

$$g(\omega, \beta) = \frac{\lambda}{4\pi} \exp[-\beta^2 - (\lambda\omega/2)^2]$$

быстро затухает при  $|\omega|, |\beta| \rightarrow \infty$ . Фиг. 4 показывает результаты расчета возмущений продольной составляющей скорости, вызванных неоднородностью (4.10) с  $\lambda = 0.05$ . На фиг. 4а и б построены изолинии функций  $u(x, y, \eta, t)$  для четырех последовательных моментов времени  $t = 0.1, 0.6, 1.5$  и 3 в горизонтальной ( $\eta = 3$ ) и вертикальной ( $y = 0$ ) плоскостях. Из этой фигуры видно, что возмущения пограничного слоя состоят из области повышенной скорости в центре и двух областей пониженной скорости по бокам. Распределение скорости по трансверсальной координате качественно согласуется с решением при малых  $x$  (4.5), которое для исходной неоднородности (4.10) принимает вид

$$u = AR x \eta f'' (1 - 2y^2) \exp \left[ -y^2 - \left( \frac{t-x}{\lambda} \right)^2 \right] \quad (4.11)$$

При  $t = 0.1$  возмущения хорошо описываются этим аналитическим решением. Форма возмущенной области в горизонтальной плоскости практически симметрична по  $x$  относительно максимума и ее длина приблизительно равна длине исходной неоднородности  $2\lambda \sim 0.1$ . Расстояние от центра до минимума скорости  $y_{\min} \approx 1.3$ , найденное из фиг. 4, хорошо согласуется с теоретическим значением  $y_{\min} = \sqrt{3/2} \approx 1.22$ , следующим из (4.11). В ходе дальнейшего развития возмущение смещается вниз по потоку

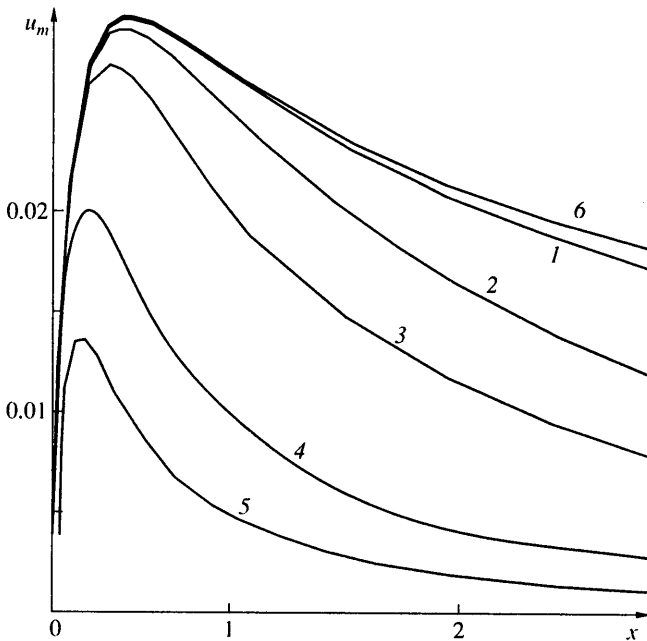


Фиг. 4. Изолинии возмущений продольной компоненты скорости для локализованного возмущения с  $\lambda = 0.05$  при  $t = 0.1, 0.6, 1.5, 3$ ; *a* – в горизонтальной плоскости при  $\eta = 3$ ; *b* – в вертикальной плоскости на оси симметрии. Шаг изолиний 0.1 максимума, сплошные и штриховые линии соответствуют положительным и отрицательным возмущениям

приблизительно пропорционально  $t$ , удлинняясь и расширяясь. При этом его форма становится несимметричной, и максимум смещается к переднему краю возмущенной области.

В вертикальной плоскости почти симметричное по  $x$  при  $t = 0.1$  возмущение постепенно приобретает форму, характерную для паффа. Его передняя часть поднимается на внешнюю границу пограничного слоя, а задняя – приближается к стенке. При этом максимум возмущения постепенно смещается вверх от  $\eta_{\max} = 2.3$  при  $t = 0.1$  до  $\eta_{\max} = 3.8$  при  $t = 3$ . При больших  $t$  возникает второй локальный максимум, расположенный несколько ниже и сзади основного. Аналогичная закономерность наблюдалась в [8]. При выбранном значении  $\lambda = 0.05$  возмущения усиливаются примерно до  $t = 0.5$ , а затем затухают. Следовательно, они принимают выраженную несимметричную форму только когда становятся затухающими. В экспериментах [8, 9] наблюдалась такая же закономерность.

Для исследования влияния длины или продолжительности исходной неоднородности на развитие возмущений в пограничном слое были рассчитаны возмущения при различных  $\lambda$ . Полученные результаты показаны на фиг. 5 в виде зависимостей максимальной по  $t$  и  $y$  величины возмущения скорости  $u_m$  при фиксированном  $x$  от расстояния до передней кромки  $x$ . При всех  $\lambda$  возмущения сначала возрастают со скоростью, не зависящей от их продольного масштаба, достигают максимума и затем



Фиг. 5. Зависимости максимального (по  $y$  и  $t$ ) возмущения скорости от  $x$  для локализованных возмущений различной длины. Кривые 1–5 соответствуют  $\lambda = 2, 0.5, 0.2, 0.05, 0.02$ ; кривая 6 – решение для стационарной неоднородности (4.8)

затухают. При  $\lambda = 2$  зависимость  $u_m(x)$  практически не отличается от аналогичной зависимости для стационарной неоднородности, обозначенной цифрой 6. При уменьшении продольного масштаба  $\lambda$  максимум смещается в сторону меньших  $x$ , а его величина уменьшается. Однако изменение характера развития возмущений при уменьшении продольного масштаба гораздо слабей, чем квадратичная зависимость положения максимума от поперечного масштаба.

Поэтому наиболее вероятной причиной различий в нарастании полосчатых структур, порожденных внешней турбулентностью в [1] и импульсным вдувом воздуха в [8, 9], является разный поперечный масштаб исходных возмущений. В условиях эксперимента [8] при  $u'_\infty = 6.6$  м/с и полуширине возмущения  $d' \sim 0.5$  мм расстояние до максимума можно оценить как  $x'_m = (u'_\infty d'^2 / \nu') x_m \approx 7$  см (здесь  $x_m \approx 0.4$  – безразмерное расстояние до максимума зависимости  $u_m(x)$  на фиг. 5). Эта оценка удовлетворительно согласуется с положением максимума амплитуды возмущения  $x'_m \approx 20$  мм, найденным в [8]. Поперечный масштаб пульсаций во внешнем потоке в [1] оценивался как  $d' \approx 5$  мм, что по аналогичной формуле дает  $x'_m \approx 7$  м. Естественно, что в этом эксперименте возмущения возрастали по длине во всей области измерений, а в [8] они почти сразу же начинали затухать.

**Заключение.** Решена задача о восприимчивости пограничного слоя на пластине с затупленной передней кромкой к замороженным в поток периодическим по  $x$  и  $y$  вихревым возмущениям, вектор завихренности которых нормален к поверхности пластины. Эти возмущения усиливаются в пограничном слое в  $R_b$  раз ( $R_b$  – число Рейнольдса, вычисленное по размеру затупления передней кромки), порождая неоднородность в основном продольной компоненты скорости, аналогичную полосчатой структуре, наблюдаемой при повышенной степени турбулентности набегающего потока. При уменьшении продольного периода возмущений (или увеличении их частоты) восприимчивость пограничного слоя к ним снижается.

На основе решения для периодических возмущений найдена реакция пограничного слоя на локализованное возмущение, аналогичное создаваемому выдувом воздуха из трубки в экспериментах [8, 9]. В этом случае образуется пафф – локализованное возмущение пограничного слоя, сносимое вниз по потоку. При малом расстоянии от передней кромки  $x'$  оно усиливается пропорционально  $x'$  и сохраняет постоянными длину и ширину. Вдали от передней кромки пафф затухает как  $x'^{-3/2}$ , его длина увеличивается пропорционально  $x'$ , а ширина пропорционально  $\sqrt{x'}$ . При  $x' \sim d'R$  ( $d'$  – ширина исходной неоднородности,  $R$  – число Рейнольдса, вычисленное по  $d'$ ) амплитуда возмущения достигает максимума порядка  $R_b$ . Найденное решение хорошо согласуется с результатами экспериментов [8, 9].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№№ 01-01-00614 и 00-15-96069).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Westin K.J.A., Boiko A.V., Klingmann B.G., Kozlov V.V., Alfredsson P.H.* Experiments in a boundary layer subjected to freestream turbulence. Pt I. Boundary layer structure and receptivity // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 281. P. 193–218.
2. *Alfredsson P.H., Bakchinov A.A., Kozlov V.V., Matsubara M.* Laminar-turbulent transition at a high level of a free stream turbulence // *IUTAM Symp. on Nonlinear Instability and Transition in Three-Dimensional Boundary layers: Proc. Dordrecht: Kluwer, 1996. P. 423–246.*
3. *Luchini P.* Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface: optimal perturbations // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 404. P. 289–309.
4. *Andersson P., Berggren M., Henningson D.S.* Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers // *Phys. Fluids.* 1999. V. 11. P. 134–150.
5. *Устинов М.В.* Восприимчивость пограничного слоя на плоской пластине с затупленной передней кромкой к стационарной неоднородности набегающего потока // *ПМТФ.* 2000. № 4. С. 93–100.
6. *Bertolotti E.P., Kendall J.M.* Response of the Blasius boundary layer to controlled free-stream vortices of axial form // *AIAA paper. № 97-2018.* 1997. 12 P.
7. *Wattmuff J.H.* Detrimental effects of almost immeasurably small freestream nonuniformities generated by wing-tunnel screens // *AIAA Journal.* 1998. V. 36. № 3. P. 379–386.
8. *Бакчинов А.А., Грек Г.П., Катасонов В.В.* Экспериментальное исследование процесса развития и структуры локализованных вихревых возмущений в пограничном слое на плоской пластине. Препринт № 1–97. Новосибирск: ИТПМ СО РАН, 1997. 58 с.
9. *Westin K.J.A., Bakchinov A.A., Kozlov V.V., Alfredsson P.H.* Experiments on localized disturbances in a flat plate boundary layer. Pt I. The receptivity and evolution of a localized free stream disturbances // *Eur. J. Mech. B/Fluids.* 1998. V. 17. № 6. P. 823–846.
10. *Bertolotti F.P.* Response of the Blasius boundary layer to free-stream vorticity // *Phys. Fluids.* 1997. V. 9. № 8. P. 2286–2299.
11. *Golgstein M.E., Leib S.J., Cowley S.J.* Distortion of a flat plate boundary layer by free-stream vorticity normal to the plate // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 237. P. 231–260.
12. *Crow S.C.* The spanwise perturbations of two-dimensional boundary layers // *J. Fluid Mech.* 1966. V. 24. Pt. 1. P. 153–164.

Москва  
E-mail: [ustinov@stb.aerocentr.msk.su](mailto:ustinov@stb.aerocentr.msk.su)

Поступила в редакцию  
16.VIII.2001