МЕХАНИКА

ЖИДКОСТИ И ГАЗА

№ 3 • 2002

УДК 532.516.5:533.6.011.55

© 2002 г. Б.В. РОГОВ, И.А. СОКОЛОВА

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА ДЛЯ ВЯЗКИХ СМЕШАННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Для стационарных вязких смешанных (с переходом через скорость звука) внутренних и внешних течений получены упрощенные двумерные уравнения Навье–Стокса гиперболического типа в результате специального расщепления градиента давления вдоль доминирующего направления потока на гиперболическую и эллиптическую составляющие. Применение этих уравнений продемонстрировано на расчете течений в сопле Лаваля и на задаче сверхзвукового обтекания затупленных тел. Полученное гиперболическое приближение хорошо описывает взаимодействие потока с обтекаемыми поверхностями для внутренних и внешних течений и применимо в широком диапазоне чисел Маха при умеренных и больших числах Рейнольдса. Приведены примеры расчетов вязких смешанных течений в сопле Лаваля с большой продольной кривизной горла и в ударном слое около сферы и затупленного по сфере цилиндра большого удлинения. В новой постановке решена задача об определении коэффициента сопротивления холодной и горячей сферы в сверхзвуковом потоке воздуха в широком диапазоне числа Рейнольдса. Обнаружен эффект снижения сопротивления сферы при охлаждении ее поверхности в случае малых и умеренных чисел Рейнольдса.

Среди стационарных течений вязкого газа имеется достаточно широкий и представляющий интерес для технических приложений класс течений, в которых передача информации вверх по потоку либо незначительна, либо может быть учтена с помощью интегральных характеристик. К такому классу течений относятся смешанные течения, в которых звуковая поверхность перекрывает большую часть потока. Вследствие того что малые (акустические) возмущения не распространяются против сверхзвукового потока, в указанных течениях физические условия на правой границе, расположенной вниз по потоку от звуковой поверхности, слабо влияют на основную область потока из-за наличия тонких дозвуковых областей вязкого течения [1–5]. В случае внутренних течений такая ситуация реализуется, например, в соплах Лаваля [1, 4]; в случае внешних течений – в ударном слое около обтекаемых сверхзвуковым потоком затупленных тел [2, 3, 5]. Использование для моделирования таких течений полных уравнений Навье–Стокса, содержащих члены порядка числа Кнудсена, нерационально, в особенности это относится к расчетам течений химически и термически неравновесных газовых смесей при умеренных и больших числах Рейнольдса Re [4–10], в которых большую часть времени занимает расчет диффузионно-кинетической части задачи.

Основой упрощения исходной стационарной системы двумерных уравнений Навье–Стокса является выбор одного или нескольких малых параметров и удобной системы координат. В качестве основного малого параметра для системы уравнений Навье–Стокса, записанных в безразмерном виде, принимается погранслойный параметр $1/\mathrm{Re}^{1/2}$. Именно этот параметр используется при получении уравнений пограничного слоя и при упрощении уравнений для течений с малыми и умеренно большими числами Рейнольдса [4–10]. Преимуществом упрощенных уравнений является отсутствие вторых производных от неизвестных функций вдоль продольной координаты, отсчитываемой в преимущественном направлении движения жидкости или газа. Вследствие этого открывается возможность нахождения решений стационарных задач маршевыми методами, что на порядки снижает трудоемкость расчетов по сравнению с интегрированием полных уравнений Навье–Стокса методами установления. Точность описания вязких течений с помощью упрощенных уравнений наиболее высока, если продольные координатные линии близки к линиям тока [11]. Однако упрощенные уравнения, не учитывающие молекулярные процессы переноса в продольном направлении, остаются эллиптическими в дозвуковых областях потока, так как содержат все члены уравнений Эйлера. Поэтому их невозможно интегрировать маршевыми методами в дозвуковых областях потока, поскольку для эллиптической системы уравнений задача Коши является некорректной [12–14].

Наиболее эффективные для численного решения газодинамические модели, описывающие стационарные вязкие течения, основаны на параболических или гиперболических, т.е. неэллиптических системах уравнений. Эти уравнения являются эволюционными по продольной координате, а задача Коши для них является корректной [12–14]. Поэтому их решение может быть найдено быстрыми маршевыми методами за один проход вниз по потоку [4, 5, 8, 12–14]. В дальнейшем эти модели будем называть неэллиптическими, хотя это не означает, что с их помощью нельзя учесть граничные условия для искомых функций на правой границе области течения. Например, параболическая система уравнений модели узкого канала [15] точно описывает стационарное существенно дозвуковое течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических трубах постоянного сечения (течение Гагена–Пуазейля). Заданное значение давления в выходном сечении трубы учитывается с помощью интегральной величины – значения массового расхода жидкости через трубу. Передача информации вверх по потоку в неэллиптических моделях учитывается неявно, в данном случае, интегрально.

Имеются два основных подхода к построению неэллиптических моделей. Первый подход *I* – это единое (для всех уравнений) разложение искомых функций по малым параметрам и различные принятые способы удержания (исключения) в уравнениях членов разного порядка малости относительно основного погранслойного параметра и других малых параметров. Таким способом получено большинство упрощенных систем композитных уравнений, равномерно пригодных во всей области течения [4–10].

Кроме обычного подхода *I* имеется другой подход *II*, при котором упрощенные уравнения выводятся на основе расщепления некоторых искомых функций (или их производных) на составляющие по различным пространственным направлениям [12]. Например, в [16, 17] упрощенные уравнения для вязких течений в каналах получены на основе аддитивного расщепления статического давления p на продольную и поперечную составляющие, которое в двумерном случае имеет вид

$$p = p_{av}(\xi) + p_c(\xi, \eta)$$

где ξ и η – продольная и поперечные координаты, p_{av} – среднее по поперечному сечению канала давление, p_c – поправка, учитывающая поперечное изменение. В [18] используется аналогичное расщепление, но для "вязкой" части давления. В случае внутренних несжимаемых или дозвуковых течений с малыми (при подходящем выборе системы координат [17]) поперечными скоростями поперечное изменение давления мало и его градиентом в продольном направлении в соответствующем уравнении импульса можно пренебречь [16–18], т.е. положить, что

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} \approx \frac{\partial p_{av}}{\partial \xi}$$

Для определения величины p_{av} используется условие постоянства массового расхода через канал в случае стационарных течений. Таким образом, во втором подходе

[16–18] принимается, что продольные и поперечные градиенты давления независимы, а упрощение некоторых уравнений проводится со своим представлением для искомой функции – давления.

Для внутренних смешанных течений в соплах Лаваля неэллиптические модели предложены в [15, 19–21]. Применимость модели узкого канала [15] ограничена малыми углами наклона стенок канала к его оси. Эта модель совсем не учитывает поперечный градиент давления. Основным недостатком модели [19] является пренебрежение в уравнении продольного импульса поперечной неоднородностью давления, вызванной центробежными силами. Это вносит существенную погрешность при расчете течения в транс- и сверхзвуковой частях сопла, в особенности в области его горла, где линии тока сильно искривлены. Применимость модели гладкого канала [20, 21] ограничена умеренными значениями продольной кривизны стенок канала. Упрощение уравнений Навье–Стокса в [15, 20, 21] проведено с помощью подхода *I*, а в [19] – подхода *II*.

В случае задачи сверхзвукового обтекания затупленных тел вязким газом при умеренных и больших числах Рейнольдса неэллиптические модели предложены в [22, 23]. Однако их работоспособность ограничена небольшой величиной азимутального угла, отсчитываемого от передней критической точки. Даже наиболее точная из этих моделей [23] дает значительную (больше 15%) погрешность в величине давления на поверхности обтекаемой сферы при значениях азимутального угла, больших 45°. В то же время, если число Маха набегающего потока достаточно велико, эти модели позволяют рассчитывать тепловые потоки на наветренной части затупленных тел с удовлетворительной точностью. Упрощение уравнений Навье–Стокса в [22] проведено с помощью подхода *I*, а в [23] – подхода *II*. В [23] продольный и поперечный градиенты давления рассматривались независимо, причем последний рассчитывался из уравнения, полученного дифференцированием уравнения для поперечного импульса в гиперзвуковом приближении.

В данной работе для вязких смешанных внутренних и внешних течений предлагается новая газодинамическая модель – гиперболическое приближение уравнений Навье–Стокса. Оно основано на системе уравнений гиперболического типа и применимо в широком диапазоне чисел Маха при умеренных и больших числах Рейнольдса. Модель построена с использованием специального расщепления продольного градиента давления на гиперболическую и эллиптическую составляющие. Возможности модели демонстрируются на решении тестовых и прикладных задач аэрогидродинамики.

1. Расщепление продольного градиента давления. Для построения адекватного неэллиптического приближения уравнений Навье–Стокса необходимо определить механизмы передачи информации вверх по потоку. Известно, что при умеренных и больших числах Рейнольдса основной механизм такой передачи в безотрывных течениях, ограниченных достаточно гладкими стенками, – акустический, связанный с продольным градиентом давления. Из характеристического анализа упрощенной системы уравнений в пределах невязкого и полностью вязкого течений выяснено, что за передачу информации вверх по потоку через дозвуковые области ответственна лишь "эллиптическая" часть продольного градиента давления [5, 12, 13]. Расщепление продольного градиента давления в соответствующем уравнении импульса на гиперболическую и эллиптическую составляющие впервые предложено в [24]

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \omega \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_h + (1 - \omega) \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_e \tag{1.1}$$

$$\omega = \min \left\{ 1, \sigma \frac{\gamma M_\xi^2}{1 + (\gamma - 1) M_\xi^2} \right\}, \quad 0 < \sigma < 1 \tag{1.2}$$

где σ – числовой параметр, близкий к единице; M_ξ – число Маха, построенное по продольной составляющей скорости; γ – показатель адиабаты. Гиперболическая составляющая (с индексом "h") градиента давления в (1.1) отвечает за распространение невязких (акустических) возмущений вниз по потоку, эллиптическая (с индексом "e") – вверх по потоку. Согласно данному расщеплению, гиперболическая часть градиента давления пренебрежимо мала в существенно дозвуковых областях течения с числом Маха $\mathrm{M} \ll 1$. Вследствие этого расщепление (1.1) не использовалось для построения приближенных моделей, в то же время оно применялось для разработки эффективных численных методов расчета внешних [5, 24–26] и внутренних [26–29] течений.

С другой стороны, приближение для градиента давления в уравнении продольного импульса [19]

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} \approx \frac{\partial p_a}{\partial \xi} \tag{1.3}$$

где $p_a(\xi)$ – распределение давления вдоль оси канала, обеспечивает гиперболичность упрощенной системы уравнений [12]. При этом оказывается, что в существенно дозвуковых областях течения гиперболическая часть (1.3) продольного градиента давления вносит в него основной вклад, если продольные координатные линии ориентированы вдоль направлений линий тока [12].

В двух последующих пунктах, на примере вязких двумерных течений в симметричном канале и в ударном слое около обтекаемого сверхзвуковым потоком затупленного тела, будет показано, что продольный градиент давления может быть расщеплен следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \omega \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_h + (1-\omega)\varphi \left(\frac{\partial p_m}{\partial \xi} \right)_h + (1-\omega) p_m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_e, \quad \varphi = \frac{p}{p_m} \tag{1.4}$$

где $p_m = p(\xi, \eta_m)$ – распределение давления вдоль какой-либо выбранной продольной координатной линии $\eta = \eta_m = \mathrm{const}$; весовая функция ω определяется формулой (1.2) и изменяется от нуля при $M_\xi \ll 1$ до единицы при $M_\xi \gg 1$ и $\sigma \cong 1$. В расщеплении (1.4) гиперболическая составляющая совпадает с правой частью (1.3) в частном случае внутренних течений с малым поперечным градиентом давления ($\varphi \approx 1$, $p_m^{\cdot} = p_a$). Из формулы (1.4) следует, что второй член в правой части расщепления (1.1) в свою очередь может быть разложен на гиперболическую и эллиптическую составляющие. В отличие от (1.1) в расщеплении (1.4) гиперболическая часть градиента давления является его основной составляющей даже при $M_\xi^2 \ll 1$. Это позволяет построить на основе этого расщепления эффективную приближенную модель – гиперболическое приближение уравнений Навье–Стокса.

2. Гиперболическое приближение для внутренних течений. Рассмотрим стационарное ламинарное течение вязкого теплопроводного совершенного газа в плоском или осесимметричном сопле Лаваля. Система безразмерных упрощенных уравнений Навье–Стокса в адаптированной ортогональной системе координат (ξ, η) [20] относительно естественных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} & y^\nu H_\eta \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + y^\nu H_\xi \rho v \frac{\partial u}{\partial \eta} - y^\nu H_\xi H_\eta (K_\eta u - K_\xi v) \rho v - \\ & - \frac{1}{\mathrm{Re}_r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu y^\nu H_\xi \left(\frac{1}{H_\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + K_\eta u \right) \right] - \mu y^\nu H_\xi H_\eta K_\eta \left(\frac{1}{H_\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + K_\eta u \right) \right\} = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$H_\eta \rho u \frac{\partial v}{\partial \xi} + H_\xi \left(\rho v \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + H_\xi H_\eta (K_\eta u - K_\xi v) \rho u = 0 \tag{2.2}$$

$$y^\nu H_\eta \rho u \frac{\partial T^*}{\partial \xi} + y^\nu H_\xi \rho v \frac{\partial T^*}{\partial \eta} - \frac{1}{\mathrm{Re}_r} \frac{\partial}{\partial \eta}\left\{ y^\nu H_\xi \mu \left[(\gamma-1)u\left(\frac{1}{H_\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} + K_\eta u\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\Pr H_\eta}\frac{\partial T}{\partial \eta}\right]\right\} = 0, \quad T^* = T + \frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2+v^2) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(y^\nu H_\eta \rho u) + \frac{\partial}{\partial \eta}(y^\nu H_\xi \rho v) = 0 \tag{2.4}$$

$$\rho = \gamma \frac{p}{T} \tag{2.5}$$

где H_ξ, H_η – параметры Ламе ортогональной системы координат (ξ, η) [20], причем координата ξ является продольной, а η – поперечной; K_ξ, K_η – кривизны координатных линий $\xi = \mathrm{const}$ и $\eta = \mathrm{const}$ [21]; x, y – декартовы (плоское течение, $\nu = 0$) или цилиндрические (осесимметричное течение, $\nu = 1$) координаты; $y = y_w(x)$ – контур стенки сопла; u и v – проекции вектора среднемассовой скорости на линии $\eta = \mathrm{const}$ и $\xi = \mathrm{const}$; ρ, p и T – плотность, статическое давление и температура газа; μ – коэффициент динамической вязкости.

В уравнениях (2.1)–(2.5) использованы безразмерные переменные, построенные по масштабам: ρ_0, T_0 – значения на оси во входном сечении сопла, u_0 – величина скорости звука $\sqrt{\gamma R T_0}$, где R – газовая постоянная, $p_0 = \rho_0 u_0^2$, r_0 – радиус критического сечения сопла; а также – безразмерные комплексы: $\mathrm{Re}_r = \rho_0 u_0 r_0/\mu_0$ – число Рейнольдса, $\gamma = c_{p0}/c_{v0}$ – отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении и объеме, Pr – число Прандтля.

В системе уравнений (2.1)–(2.5) учитываются члены второго порядка теории пограничного слоя [30, 31] и в отличие от упрощенных уравнений модели гладкого канала [32] все члены уравнений Эйлера, включая члены порядка $O[(v/u)^2]$. Более простая модель [32] достаточно хорошо описывает вязкие смешанные безотрывные течения со значительным искривлением линий тока.

Получим неэллиптическую систему уравнений из системы уравнений (2.1)–(2.5) эллиптико-гиперболического типа, упрощая ее следующим образом.

Представим давление p в мультипликативной форме

$$p = p_a(\xi)\varphi(\xi, \eta) \tag{2.6}$$

Для давления на оси сопла $p_a(\xi)$ имеем тривиальное уравнение

$$\frac{\partial p_a}{\partial \eta} = 0 \tag{2.7}$$

Заменим градиент давления в уравнении (2.1) на выражение

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} \approx \varphi\left(\frac{\partial p_a}{\partial \xi}\right) + \omega p_a\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right) \tag{2.8}$$

а весовую функцию $\omega(\xi, \eta)$ возьмем в виде (1.2),

$$\omega = \min\left\{1, \sigma\frac{\gamma M_\xi^2}{1+(\gamma-1)M_\xi^2}\right\}, \quad 0 \leqslant \sigma < 1 \tag{2.9}$$

где $M_\xi = u/T^{1/2}$ – определенное по продольной составляющей скорости локальное значение числа Маха.

Исключим из уравнений (2.1)–(2.4) плотность с помощью уравнения состояния (2.5), а давление с помощью (2.6), и определим тип системы уравнений (2.1)–(2.4), (2.7), записанной относительно неизвестных u, v, T, φ, p_a, с учетом замены (2.8). Следуя [13, 24], характеристический анализ системы уравнений был проведен в предельных случаях невязкого и полностью вязкого течений [5, 13]. В результате такого анализа оказалось, что выражение для весовой функции (2.9) обеспечивает ξ-гиперболичность системы уравнений для обоих предельных случаев. Это полностью согласуется с выводом [13], что математические свойства упрощенной системы уравнений, обусловленные наличием в них продольного градиента давления, фактически определяются невязкой природой акустического механизма передачи информации о структуре течения. Поэтому, для краткости, приведем характеристическое уравнение только для невязкой части уравнений

$$\det(\lambda\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 0 \tag{2.10}$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – матрицы при продольных и поперечных градиентах искомых функций, λ – собственные значения. Это уравнение приводится к виду

$$(zu - H_\xi v)^2(az^2 + bz + c) = 0, \quad z = \lambda H_\eta \tag{2.11}$$

$$a = \gamma M_\xi^2 - \omega[1 + (\gamma - 1)M_\xi^2]$$

$$b = -H_\xi M_\xi M_\eta[\gamma + 1 - \omega(\gamma - 1)], \quad c = -H_\xi^2(1 - M_\eta^2) \tag{2.12}$$

Здесь M_η – локальное значение числа Маха, определенное по поперечной составляющей скорости v. Дискриминант D квадратного уравнения $az^2 + bz + c = 0$ имеет вид

$$D = H_\xi^2\{4a + M_\eta^2[(1-\omega)^2(\gamma-1)^2 M_\xi^2 + 4\omega]\}$$

Характеристическое уравнение (2.10) имеет только действительные собственные значения, а рассматриваемая система уравнений гиперболическая относительно переменной ξ во всем диапазоне изменения числа Маха M_ξ [12, 13], если дискриминант $D \geqslant 0$. Выражение для ω (2.9) обеспечивает выполнение этого неравенства.

Соответствующую системе уравнений (2.1)–(2.4), (2.6)–(2.8) модель вязких внутренних течений будем называть гиперболической моделью гладкого канала в отличие от других моделей гладкого канала: параболической [20, 21], основанной на параболической системе уравнений, и эллиптико-гиперболической, базирующейся на системе уравнений (2.1)–(2.5). Гиперболическая модель при $\sigma \approx 1$ описывает течение в сверхзвуковых областях течения так же, как и эллиптико-гиперболическая модель, и максимально полно учитывает невязкую передачу возмущений по потоку и не учитывает ее против потока. Эллиптические свойства исходной системы уравнений, записанной относительно переменных u, v, T, φ и p_a в дозвуковых областях течения связаны с частью градиента давления $(1-\omega)p_a\partial\varphi/\partial\xi$ в уравнении продольного импульса (2.1). Производная $\partial\varphi/\partial\xi$ характеризует степень отклонения от локального подобия нормированных профилей давления поперек сопла: если $\partial\varphi/\partial\xi = 0$, то поперечные профили локально подобны.

Расчетная область ограничивается осью симметрии $\eta = 0$, твердой криволинейной стенкой $\eta = 1$, входным и выходным сечениями.

Для уравнений (2.1) и (2.3) второго порядка относительно η задаются следующие краевые условия: прилипания на стенке $u = 0$ и либо теплоизоляции стенки $\partial T/\partial\eta = 0$, либо для фиксированной температуры $T = T_w$, симметрии на оси $\partial u/\partial\eta = \partial T/\partial\eta = 0$. Для уравнений (2.2), (2.4), (2.7) первого порядка относительно η на стенке задается условие $v = 0$, а на оси – $v = 0$, $\varphi = 1$.

Во входном сечении, расположенном в дозвуковой области, для эволюционных по продольной координате уравнений (2.1)–(2.4) задаются профили u/u_a (u_a – скорость на оси), v/u_a, T как функции поперечной координаты η, а также значение давления p_a на оси. Профиль φ в этом сечении определяется из условия $\partial^2\varphi/\partial^2\xi = 0$. Осевое значение скорости и критический расход газа [1] определяются из дополнительного условия на правой границе дозвуковой области, т.е. на звуковой линии. Это граничное условие есть условие гладкого продолжения решения через звуковую линию $M_\xi = 1$, на которой плохо обусловлена эволюционная матрица коэффициентов при продольных градиентах u, v, T и p_a в системе уравнений гиперболической модели. На этой линии также равен нулю детерминант матрицы при аналогичных градиентах u, v, T и p в исходной системе уравнений (2.1)–(2.4) после исключения из нее плотности с помощью уравнения состояния [32].

3. Гиперболическое приближение для внешних течений. Построим гиперболическое приближение уравнений Навье–Стокса для внешних течений. Будем рассматривать стационарное течение вязкого, теплопроводного совершенного газа в ударном слое у гладкого осесимметричного или плоского затупленного тела, обтекаемого под нулевым углом атаки. Возьмем в качестве исходной систему уравнений полного вязкого ударного слоя [33], которая при умеренных и больших числах Рейнольдса дает описание течения, близкое к описанию с помощью уравнений Навье–Стокса [34, 35]. В криволинейных координатах ξ, η она имеет вид

$$g\frac{\partial}{\partial\xi}(\rho u^2)+\tau y_s\frac{\partial p}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[f\rho u-\tau\eta y_s' p-\frac{\tau H\mu}{\mathrm{Re}_\infty}\left(\frac{1}{y_s}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{K_w u}{H}\right)\right]-\frac{\tau K_w y_s\mu}{\mathrm{Re}_\infty}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{y_s}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{K_w u}{H}\right)+(h+\tau K_w y_s\sin\alpha)\rho u^2+\tau K_w y_s\rho uv+(2\tau-1)y_s' p=0 \tag{3.1}$$

$$g\frac{\partial}{\partial\xi}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial\eta}(f\rho v+\tau Hp)-gK_w\rho u^2+h\rho uv-qy_s p=0 \tag{3.2}$$

$$g\frac{\partial}{\partial\xi}(\rho uT^*)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{f\rho T^*-\frac{\tau H\mu}{\mathrm{Re}_\infty}\left[\frac{1}{y_s\,\mathrm{Pr}}\frac{\partial T}{\partial\eta}+u\cos^2\alpha\left(\frac{1}{y_s}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{K_w u}{H}\right)\right]\right\}+h\rho uT^*=0$$

$$T^*=T+\frac{1}{2}(u^2\cos^2\alpha+v^2) \tag{3.3}$$

$$g\frac{\partial}{\partial\xi}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial\eta}(f\rho)+h\rho u=0 \tag{3.4}$$

$$\rho=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{T} \tag{3.5}$$

$$\xi=\int_0^x\cos\alpha dx,\quad \eta=\frac{y}{y_s},\quad \tau=\left(\frac{r}{r_w}\right)^\nu,\quad r=r_w+\eta y_s\cos\alpha,\quad r_w=\int_0^x\sin\alpha dx$$

$$H=1+K_w\eta y_s,\quad y_s'=\frac{dy_s}{d\xi},\quad f=\tau(Hv-\eta y_s' u\cos^2\alpha),\quad g=\tau y_s\cos^2\alpha$$

$$h=(2\tau-1)y_s'\cos^2\alpha+qy_s\sin\alpha,\quad q=\nu H\frac{\cos\alpha}{r_w}+\tau K_w$$

Здесь x, y – связанные с поверхностью обтекаемого тела естественные ортогональные координаты; r_w, K_w – контур обтекаемого тела и его кривизна; α – угол между касательной к поверхности и осью симметрии тела; $u\cos\alpha$, v – касательная и нормальная к поверхности составляющие вектора среднемассовой скорости; y_s – отход ударной волны.

В системе уравнений (3.1)–(3.4) все величины, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу затупления R_{w0}, компоненты вектора скорости – к V_∞, плотность – к ρ_∞, давление – к $\rho_\infty V_\infty^2$, температура – к V_∞^2 / c_p, коэффициент вязкости – к μ_∞. Нижние индексы ∞, w, 0 и s здесь и далее приписаны значениям величин в набегающем потоке, на теле, на оси симметрии и непосредственно за ударной волной.

Производная от контура ударной волны, входящая в уравнения (3.1)–(3.4), связана с ее отходом y_s геометрическим соотношением

$$\frac{dy_s}{d\xi} = \frac{\operatorname{tg}(\beta - \alpha)}{\cos\alpha} H_s, \quad H_s = 1 + K_w y_s \tag{3.6}$$

где β – угол между касательной к ударной волне и осью симметрии тела.

Неэллиптическую модель получим из системы уравнений полного вязкого ударного слоя, упрощая ее способом, аналогичным тому, который был использован выше для получения упрощенных уравнений внутренних течений. Представим давление p в мультипликативной форме

$$p = p_s(\xi)\varphi(\xi, \eta) \tag{3.7}$$

при этом для давления $p_s(\xi)$ непосредственно за ударной волной имеем тривиальное уравнение

$$\frac{\partial p_s}{\partial \eta} = 0 \tag{3.8}$$

Градиент давления в уравнении (3.1) представим выражением, аналогичным (2.8), в котором p_a заменено на p_s, а в выражении для весовой функции (2.9) $M_\xi - M_x$ – локальное значение числа Маха, вычисленное по продольной составляющей скорости $u\cos\alpha$.

Определим математический тип полученной системы дифференциальных уравнений (3.1)–(3.4), (3.6), (3.8) с учетом (2.8), записав ее относительно неизвестных u, v, T, φ, p_s, y_s и исключив из уравнений (3.1)–(3.4) плотность ρ с помощью уравнения состояния (3.5), а $dy_s/d\xi$ с помощью (3.6). Для исследования этого вопроса применяется такой же подход, что в случае внутренних течений. Характеристическое уравнение для невязкой части системы уравнений можно привести к виду

$$\lambda(zu\cos\alpha - Hv)^2(az^2 + bz + c) = 0$$

$$z = \lambda y_s \cos\alpha + \varepsilon$$

$$a = \gamma M_x^2 - \omega[1 + (\gamma - 1)M_x^2]$$

$$b = -HM_x M_y[\gamma + 1 - \omega(\gamma - 1)] - \varepsilon(1 - \omega)[1 + (\gamma - 1)M_x^2]$$

$$c = -H^2(1 - M_y^2) + \varepsilon(1 - \omega)(\gamma - 1)HM_x M_y$$

Здесь M_y – локальное значение числа Маха, определенное по поперечной составляющей скорости v; $\varepsilon = \eta H_s \operatorname{tg}(\beta - \alpha)$.

Характеристическое уравнение имеет только действительные собственные значения. Следовательно, рассматриваемая система уравнений имеет гиперболический тип относительно переменной ξ во всем диапазоне изменения числа Маха M_x [12, 13], как и система упрощенных уравнений для внутренних течений.

Полученную упрощенную систему уравнений будем называть моделью гиперболического вязкого ударного слоя. Упрощение связано с гиперболическим приближением продольного градиента давления, описываемого аналогом формулы (2.8), в уравнении продольного импульса. При $\sigma \approx 1$ эта модель описывает сверхзвуковые области течения так же, как и модель полного вязкого ударного слоя, и максимально полно учитывает невязкую передачу возмущений по потоку, и не учитывает ее против потока. Эллиптические свойства исходной системы уравнений связаны с частью градиента давления $(1-\omega)p_s\partial\varphi/\partial\xi$ в (3.1), которая в гиперболической системе отсутствует. Производная $\partial\varphi/\partial\xi$ характеризует степень отклонения от локального подобия нормированных профилей давления поперек ударного слоя.

Краевыми условиями для уравнений (3.1)–(3.4), (3.8) относительно переменных u, v, T, φ, p_s являются: на ударной волне ($\eta = 1$) – три из четырех обобщенных соотношений Ренкина–Гюгонио для u_s, v_s, T_s [9, 36] и $\varphi_s = 1$; на обтекаемой поверхности ($\eta = 0$) – заданная температура, условия прилипания и непротекания для компонент скорости. Оставшееся (четвертое) соотношение Ренкина–Гюгонио

$$p_s = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{T_s}{p_s}\right)\sin^2\beta \tag{3.9}$$

связывает угол β с p_s и T_s и совместно с уравнением (3.6) служит для определения отхода ударной волны y_s.

Начальные условия для искомых функций на оси (плоскости) симметрии определяются из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в которые при $\xi = 0$ вырождаются уравнения (3.1)–(3.4), (3.8). При этом распределения искомых функций на оси симметрии, а также значение отхода y_{s0} зависят от величины кривизны ударной волны K_{s0}.

Кривизна ударной волны K_{s0} определяется из дополнительного условия на правой границе дозвуковой области (звуковой линии $M_x = 1$). Детерминант эволюционной матрицы при продольных градиентах u, v, T, p_s в уравнениях гиперболического вязкого ударного слоя, как и детерминант матрицы при градиентах u, v, T, p в уравнениях полного вязкого ударного слоя, на звуковой линии равен нулю. Вследствие плохой обусловленности эволюционной матрицы интегральные кривые уравнений гиперболического вязкого ударного слоя, соответствующие различным значениям K_{s0}, ветвятся в окрестности звуковой линии. Подобное поведение интегральных кривых имеет место и для уравнений, описывающих вязкое смешанное течение в сопле Лаваля [37, 38]. В случае внутренних течений аналогом величины K_{s0} является величина расхода газа. Аналогично существованию единственного значения критического расхода [1] для уравнений гиперболического вязкого ударного слоя также существует некоторое "критическое" значение K_{s0}, которому соответствует единственная (предельная) интегральная кривая, которая может быть гладко продолжена за звуковую линию. Эта интегральная кривая и есть искомое решение задачи.

Численное решение полученной гиперболической системы уравнений находится маршевым методом [38].

4. Итерационно-маршевый метод решения упрощенных уравнений Навье–Стокса эллиптико-гиперболического типа. Для оценки точности гиперболического приближения уравнений Навье–Стокса для внутренних и внешних течений оно сравнивалось с исходными газодинамическими моделями, основанными на системах уравнений (2.1)–(2.5) и (3.1)–(3.5) эллиптико-гиперболического типа. Для интегрирования таких систем уравнений имеются эффективные итерационно-маршевые методы, устойчивые во всем диапазоне изменения числа Маха как для внутренних течений [29, 32], так и внешних [5, 25, 39].

В данной работе разработан итерационно-маршевый метод, пригодный для расчета вязких внутренних и внешних течений во всем спектре числа Маха. Этот метод основан на глобальных итерациях только одной функции: $\partial\varphi/\partial\xi$. Поэтому он алгоритмически проще, чем методы [32] и [5, 25, 39], в которых итерируются пары функций v/u, $\partial p/\partial\xi$ и y_s, $\partial p/\partial\xi$ соответственно. Предлагаемый алгоритм требует в 4–5 раз меньше глобальных итераций по эллиптическим членам, чем алгоритмы [5, 25, 39], разработанные для расчета вязкого сверхзвукового обтекания затупленных тел. При этом предполагается, что относительные численные погрешности давления, его продольного градиента, отхода и наклона головной ударной волны меньше чем 10^{-2}. На каждой глобальной итерации предложенного алгоритма требуется три маршевых прохода от линии торможения до звуковой линии (для уточнения значения кривизны K_{s0}) и еще один завершающий марш через всю расчетную область. Нетрудно оценить, что для решения задачи сверхзвукового обтекания данный алгоритм требует, по крайней мере, в 2 раза меньше времени, чем алгоритмы [5, 25, 39]. При увеличении точности расчетов путем уменьшения шага по маршевой координате соотношение между количеством глобальных итераций в методах [5, 25, 39] и предложенном алгоритме возрастает, что обусловлено более быстрой передачей информации вверх по потоку за одну итерацию. Число глобальных итераций для данного алгоритма и [32] близко друг к другу, если в качестве начального решения для алгоритма [32] взять гиперболическое приближение.

В случае внутренних течений для решения системы уравнений (2.1)–(2.5), эллиптической в дозвуковых областях, будем использовать глобальные итерации с фиксацией на каждой из них эволюционных производных, ответственных за передачу информации против потока в дозвуковых областях течения [5, 12, 13, 25–29, 32, 39]. Другими словами, будем находить решение итерациями по продольной составляющей градиента функции φ, характеризующей степень отклонения от локального подобия нормированных поперечных распределений давления. Предварительно в систему уравнений вместо искомого давления p вводятся две искомые функции φ, p_a по формуле (2.6). На текущей глобальной итерации маршевым методом [38] интегрируется регуляризованная система уравнений (2.1)–(2.4), (2.7).

Регуляризация заключается в замене в уравнении (2.1) $\partial p/\partial\xi$ на выражение

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \varphi\left(\frac{dp_a}{d\xi}\right)_h + p_a\left[\omega\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_h + (1-\omega)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_e\right] \tag{4.1}$$

Эволюционные производные с индексом "h" отвечают за передачу информации по потоку, а с "e" – против потока. Градиент $(\partial\varphi/\partial\xi)_e$ рассчитывается по полю функции φ, вычисленному на предыдущей глобальной итерации. Передача информации против течения в дозвуковых областях учитывается тем, что при разностной аппроксимации производной $(\partial\varphi/\partial\xi)_e$ на текущем маршевом слое используются значения φ вниз по потоку от этого слоя.

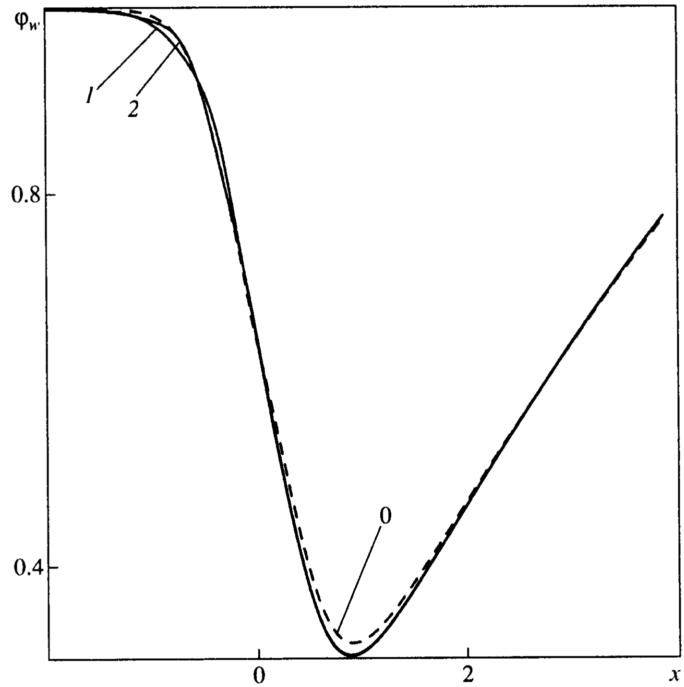
Расщепление продольного градиента давления (4.1) на гиперболическую и эллиптическую составляющие можно представить также в виде (1.4) с $p_m = p_a$.

В случае сверхзвукового истечения из сопла [1] при расчете $(\partial\varphi/\partial\xi)_e$ в выходном сечении используется мягкое граничное условие $\partial^2\varphi/\partial\xi^2 = 0$ [40]. Распределение φ во входном сечении определялось путем линейной экстраполяции из внутренних точек расчетной области, т.е. из условия $\partial^2\varphi/\partial\xi^2 = 0$.

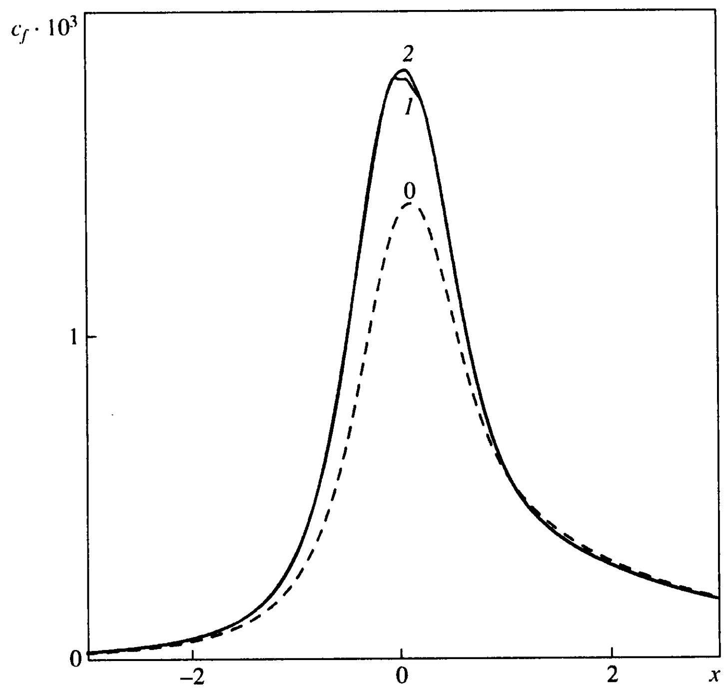
Используемая при интегрировании неявная конечно-разностная схема [38] имеет четвертый порядок точности по координате η и второй по координате ξ. В расчетах вводилась неравномерная сетка со сгущением узлов к стенке и к критическому сечению сопла. Разностные уравнения на каждом маршевом шаге решались векторной прогонкой. При расчете течения в сопле Лаваля коэффициент σ в формуле (2.9) брался в интервале $0.97 \leqslant \sigma \leqslant 0.99$.

В качестве начального приближения для решения системы уравнений (2.1)–(2.5) применяется гиперболическое приближение с $(\partial\varphi/\partial\xi)_e = 0$ в (4.1).

Поскольку значения производной $(\partial\varphi/\partial\xi)_e$ используются лишь в дозвуковых областях течения, где $1 - \omega \neq 0$, то гиперболическое приближение близко к точному решению, если в дозвуковых областях выполняется условие $\partial\ln\varphi/\partial\xi \ll \partial\ln p_a/\partial\xi$ – условие локального подобия для нормированных поперечных распределений давления.



Фиг. 1. Сходимость итераций для распределений приведенного давления φ на стенке; цифры указывают номер глобальной итерации, 0 – гиперболическое приближение



Фиг. 2. Сходимость итераций для распределения коэффициента трения c_f; цифры указывают номер глобальной итерации

При расчете течения в ударном слое в рамках системы уравнений (3.1)–(3.5) полного вязкого ударного слоя [33] в выражении для продольного градиента давления (4.1) p_a заменено на p_s.

Система уравнений (3.1)–(3.4) и (3.8) интегрировалась с помощью неявной конечно-разностной схемы [38]. Использовалась неравномерная сетка со сгущением к поверхности тела. Разностные аналоги уравнений (3.1)–(3.4), (3.8) для u, v, T, φ, p_s на каждом маршевом слое решались векторной прогонкой совместно с уравнениями (3.6), (3.9) для y_s. Коэффициент σ полагался равным 0.95. В качестве начального приближения для итерационного процесса использовалось гиперболическое приближение.

5. Результаты расчетов для течения через сопло Лаваля. Точность гиперболического приближения для внутренних вязких смешанных течений демонстрируется на примере расчета течения воздуха с $\mathrm{Re}_r = 10^6$ в коническом сопле с углами полураствора сужающегося и расширяющегося конусов, равных 30°, и кривизной горла $K_w = 1.0$ и углами полураствора 45 и 15° и кривизной 1.6.

Скорость сходимости глобальных итераций по полю функции φ показана на фиг. 1, где приводятся ее распределения на стенке φ_w для гиперболического приближения, первой и второй итераций. Абсциссе $x = 0$ на графиках соответствует минимальное сечение сопла. Видно, что гиперболическое приближение дает решение, близкое к точному решению эллиптико-гиперболической системы уравнений (2.1)–(2.5), несмотря на то, что φ_w вблизи горла сопла падает в 3 раза. Сходимость коэффициента вязкого трения на стенке c_f показана на фиг. 2. Уже первая глобальная итерация дает распределение c_f вдоль стенки, близкое к точному распределению.

Распределения давления p на оси и стенке, нормированные на давление торможения p_*, для гиперболического приближения и эллиптико-гиперболической модели гладкого канала показаны на фиг. 3 и 4. Видно, что гиперболическое приближение хорошо воспроизводит поле давления для сопла с $K_w = 1.0$ и удовлетворительно с кривизной 1.6.

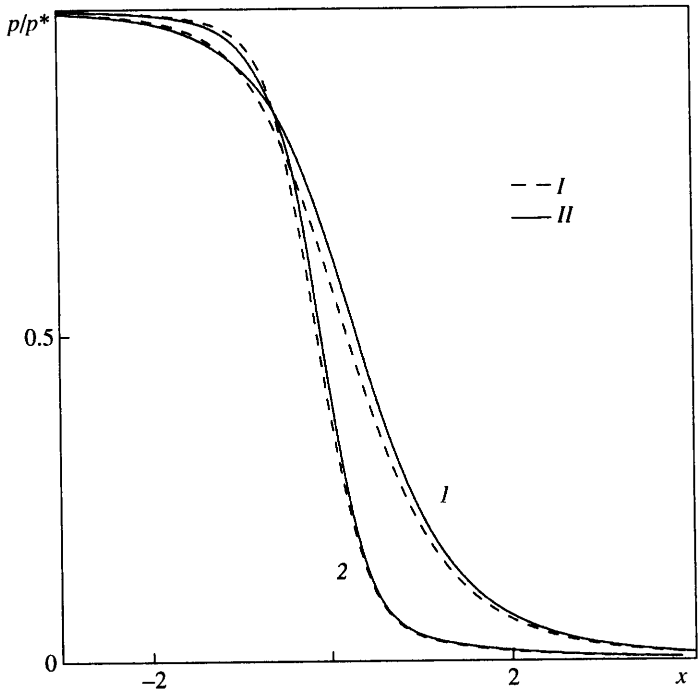
6. Результаты расчетов для течения в ударном слое. Точность гиперболического приближения для внешних вязких смешанных течений демонстрируется на примере расчета сверхзвукового обтекания сферы и затупленного по сфере цилиндра большого удлинения воздухом с $\gamma = 1.4$, $\mu \sim T^{0.5}$, $\mathrm{Pr} = 0.7$.

Ответвление распределений $(\partial\varphi/\partial\xi)_w$ от искомого предельного распределения около звуковой линии для случая обтекания сферы показано на фиг. 5. По оси абсцисс отложены значения азимутального угла $\theta = \pi/2 - \alpha$. Предельное решение получается при интегрировании путем перехода вблизи звуковой линии с полностью неявной схемы на неявную с экстраполяцией производной $\partial p_s/\partial\xi$ только в уравнении продольного импульса [38]. Это обеспечивает хорошую обусловленность эволюционной матрицы во всей расчетной области.

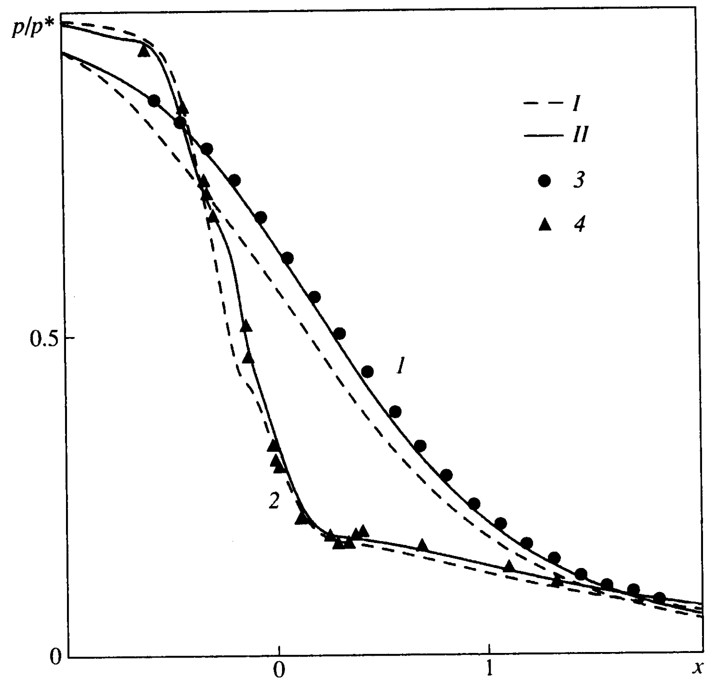
Уменьшение максимальных невязок $\Delta f^k = f^k - f^{k-1}$ газодинамических функций $f = y_s$, $dy_s/d\xi$ и p в зависимости от номера глобальной итерации k для случая обтекания охлаждаемой сферы ($T_w = 0.2$) сверхзвуковым потоком с $\mathrm{M}_\infty = 5$, $\mathrm{Re}_\infty = 10^3$ показано на фиг. 6. Нулевой итерации соответствует гиперболическое приближение. Видно, что невязки Δf^k убывают приблизительно по линейному закону. Для получения решения уравнений полного вязкого ударного слоя с точностью до 1% достаточно одной глобальной итерации.

Рассчитанные по различным моделям распределения относительного давления p_w/p_{w0} вдоль поверхности сферы приведены на фиг. 7. Видно, что они близки для моделей гиперболического и полного вязкого ударного слоя. Погрешность модели [23], наилучшей из моделей [22, 23], значительна при $\theta > \pi/4$.

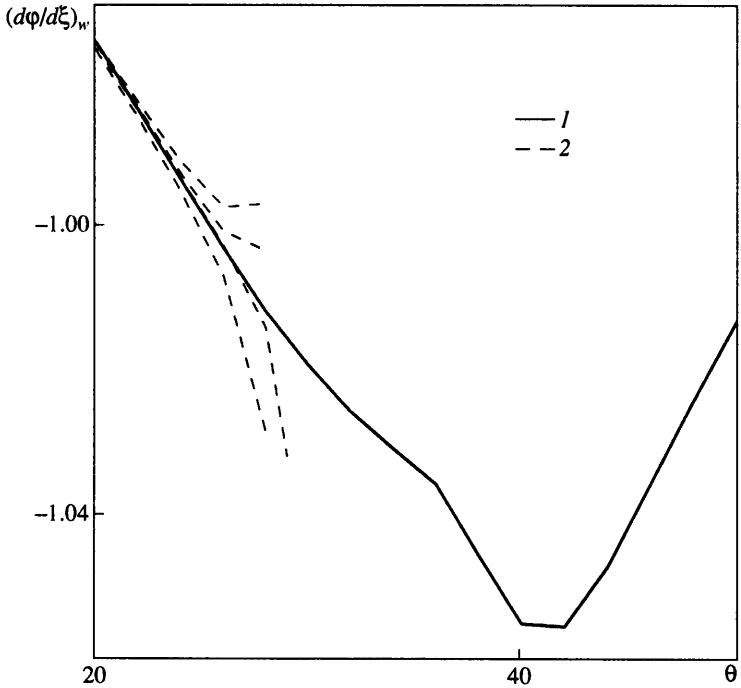
Распределения относительного теплового потока q_w/q_{w0} вдоль поверхности сферы показаны на фиг. 8. Видно, что результаты расчетов по моделям гиперболического и полного вязкого ударного слоя близки.



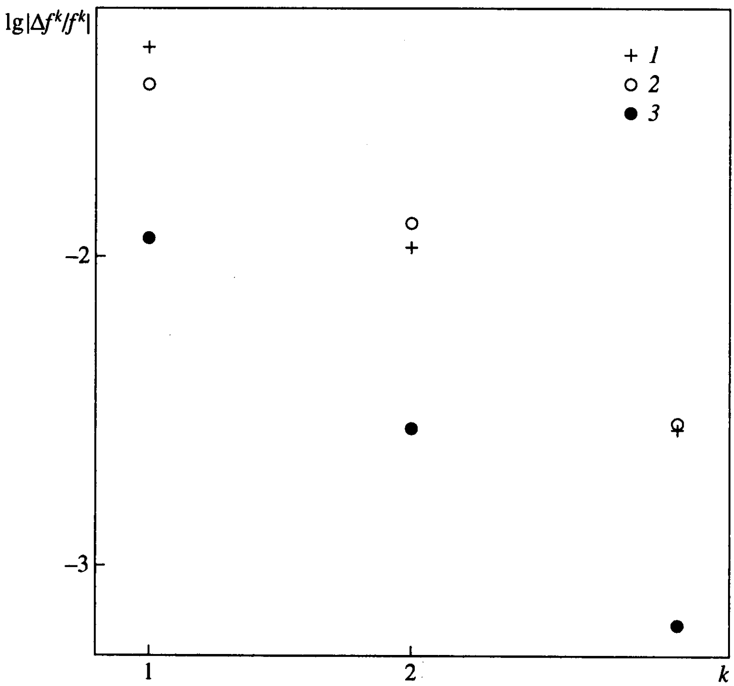
Фиг. 3. Распределения давления p/p_* на оси (*1*) и стенке (*2*) для $K_w = 1.0$ и адиабатической стенки: *I* – гиперболическое приближение, *II* – эллиптико-гиперболическая модель гладкого канала



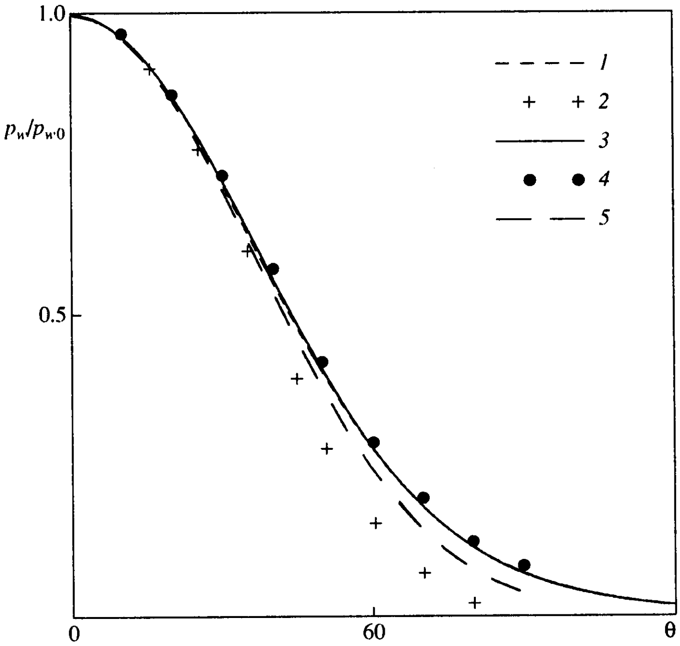
Фиг. 4. Распределения давления p/p_* на оси (*1*, *3*) и стенке (*2*, *4*) для $K_w = 1.6$ и адиабатической стенки: *I* – гиперболическое приближение, *II* – эллиптико-гиперболическая модель гладкого канала; *3*, *4* – экспериментальные данные [41]



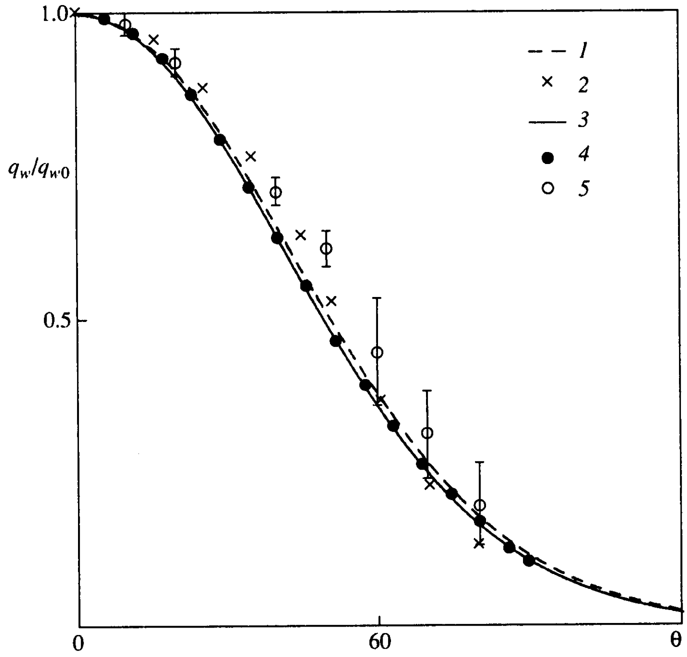
Фиг. 5. Ветвление решений, соответствующих разным значениям кривизны K_{s0} ударной волны на оси симметрии, вблизи звуковой линии: *1* – искомое предельное решение, *2* – ответвляющиеся от предельного решения



Фиг. 6. Убыль невязки Δf газодинамической функции f в зависимости от номера глобальной итерации k для $f = y_s$, $dy_s/d\xi$ и p (точки *1*–*3*)



Фиг. 7. Распределения давления p_w/p_{w0} вдоль поверхности сферы для $M_\infty = 10$, $Re_\infty = 10^3$, $T_w = 0.2$: *1* – расчеты по модели гиперболического вязкого ударного слоя; *2* – по модели [23] ($Re_\infty = 10^4$); *3, 4* – по модели полного вязкого ударного слоя, полученные в данной работе методом глобальных итераций и в [42] методом установления; *5* – по уравнениям Эйлера [43]



Фиг. 8. Распределения теплового потока q_w/q_{w0} вдоль поверхности сферы для $M_\infty = 7.5$, $Re_\infty = 10^3$, $T_w = 0.24$; *1* – расчеты по модели гиперболического вязкого ударного слоя; *2* – по модели [23] ($Re_\infty = 10^4$); *3, 4* – по модели полного вязкого ударного слоя, полученные в данной работе методом глобальных итераций и в [42] методом установления; *5* – экспериментальные данные [44]

Сравнение рассчитанных по моделям гиперболического и полного вязкого ударного слоя полных сопротивлений лобовых и боковых поверхностей затупленных по сфере цилиндров разного удлинения L показано на фиг. 9. Точка на фигуре – расчет сопротивления полусферы по полным уравнениям Навье–Стокса [3]. Различие составляет менее 1–2%.

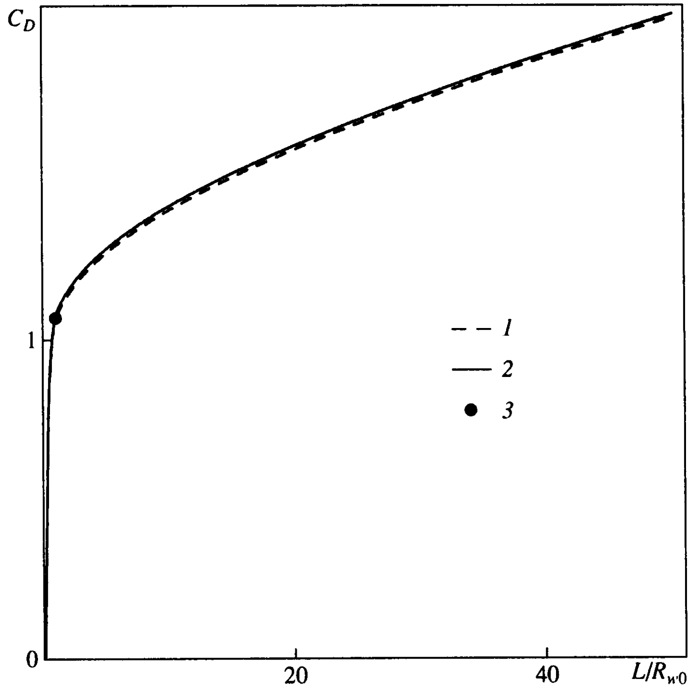
7. Задача о снижении сопротивления тела путем регулирования температуры его поверхности. Рассмотрим важную для практики задачу возможного снижения аэродинамического сопротивления тела с помощью поддержания температуры его поверхности на заданном уровне на примере вязкого обтекания сферы сверхзвуковым потоком воздуха. Предполагается, что температура T_∞ набегающего потока фиксирована (300 K), а его скорость v_∞ и давление p_∞, а также температура поверхности T_w, являются параметрами задачи.

На фиг. 10 представлены результаты расчетов суммарного сопротивления давления и трения сферического сегмента с углом полураствора $\theta = 2\pi/3$ для различных значений температуры T_w и числа M_∞ в широком диапазоне числа Рейнольдса. Вклад в сопротивление донной области сферы мал [3] и здесь не учитывается. Свойства воздуха описываются параметрами: $\gamma = 1.4$, $\mu \sim T^{0.67}$, $\mathrm{Pr} = 0.7$. Расчеты сопротивления при $M_\infty = 10$ приведены с использованием только гиперболического приближения. При $M_\infty = 3$ результаты расчетов по гиперболическому приближению скорректированы путем одной итерации по эллиптической составляющей продольного градиента давления. Поправка в величине сопротивления составляет 1–6%. Из фиг. 10 видно, что при малых и умеренных числах Рейнольдса охлаждение поверхности сферы приводит к снижению ее сопротивления. При этом эффект снижения сопротивления существенно зависит от величины числа Маха: с уменьшением M_∞ эффект возрастает. Анализ показывает, что данный эффект при значениях числа Рейнольдса, когда ударный слой около тела является полностью вязким, связан с поджатием ударного слоя при его охлаждении.

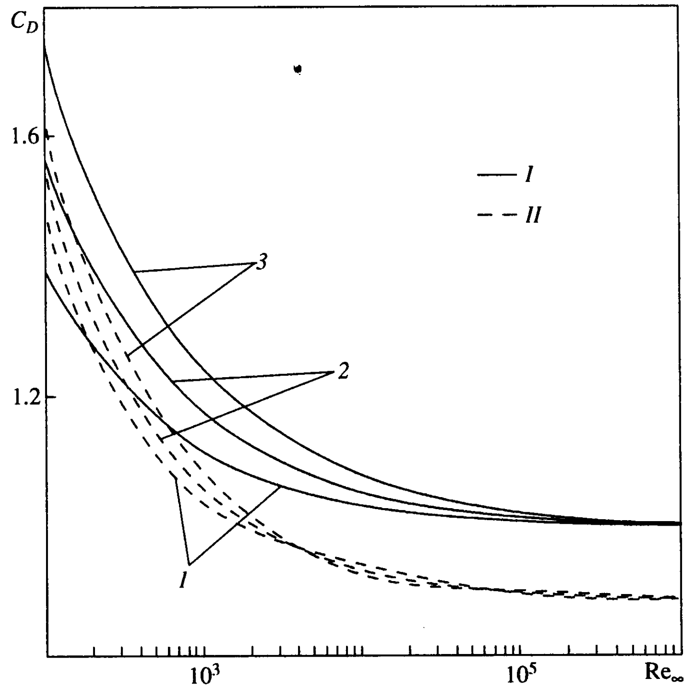
Заключенне. Для описания вязких внутренних и внешних стационарных смешанных двумерных течений предложена новая система упрощенных уравнений Навье–Стокса гиперболического типа, решения которой близки к решениям систем уравнений эллиптико-гиперболического типа [32, 33]. Она получена на основе более детального по сравнению с [24] расщепления продольного градиента давления на эллиптическую и гиперболическую составляющие. На примере расчета смешанных течений в сопле Лаваля и ударном слое около обтекаемого сверхзвуковым потоком затупленного тела показано, что вклад эллиптической части уравнений полного вязкого ударного слоя [33] и эллиптико-гиперболических уравнений гладкого канала [32] в искомые функции невелик. Определяющий вклад в решение вносит гиперболическая часть системы уравнений.

Новая модель – гиперболическое приближение уравнений Навье–Стокса – дает более точное описание смешанных вязких течений в каналах, соплах, в ударном слое около обтекаемых сверзвуковым потоком затупленных тел при больших и умеренных числах Рейнольдса, чем известные неэллиптические модели. Это продемонстрировано на решении тестовых задач газовой динамики. Гиперболическое приближение позволяет проводить расчеты длинных сопел со значительной продольной кривизной горла и расчеты сверхзвукового обтекания тонких затупленных тел с длинами до сотен калибров. Новая модель хорошо воспроизводит поле давления при течениях в соплах с $K_w = 1.0$ и удовлетворительно – тепловой поток и трение на стенке. Для внешних течений эта модель достаточно точно предсказывает аэродинамические характеристики – такие, как давление, сопротивление, тепловой поток и др.

На основе качественной аналогии смешанных течений в ударном слое и в сопле Лаваля по-новому ставится и решается задача о расчете поля течения в вязком ударном слое около обтекаемого сверхзвуковым потоком затупленного тела. Показано, что если пренебречь акустическим механизмом переноса возмущений или его



Фиг. 9. Зависимости коэффициента полного сопротивления C_D лобовой и боковой поверхностей затупленного по сфере цилиндра от его удлинения L при $M_\infty = 20$, $Re_\infty = 750$ и $T_w = 0.025$: *1* – расчеты по модели гиперболического вязкого ударного слоя; *2* – по модели полного вязкого ударного слоя; *3* – сопротивление полусферы – по уравнениям Навье–Стокса [3]



Фиг. 10. Зависимости коэффициента полного сопротивления C_D сферы от числа Рейнольдса для $T_\infty = 300$ K: кривые I, II – $M_\infty = 3$ и 10; кривые *1*–*3* – $T_w = 300$, 1000 и 2000 K

"заморозить", то течение в дозвуковой части ударного слоя, включая неизвестный отход головной ударной волны, определяется явлением запирания потока в окрестности звуковой линии. В теории сопла Лаваля явление запирания потока в окрестности минимального сечения сопла (в окрестности звуковой линии) также определяет структуру течения в дозвуковой сужающейся части сопла, включая величину массового расхода газа через сопло.

С использованием гиперболического приближения уравнений Навье–Стокса в новой постановке решена задача об определении коэффициента сопротивления холодной и горячей сферы в сверхзвуковом потоке воздуха в широком диапазоне числа Рейнольдса. Обнаружен эффект снижения сопротивления сферы при охлаждении ее поверхности в случае малых и умеренных чисел Рейнольдса. При этом этот эффект существенно зависит от величины числа Маха потока: с его уменьшением эффект возрастает.

На основе указанного расщепления градиента давления численно исследован акустический механизм переноса возмущений против потока для течений со значительным искривлением линий тока. В качестве таких течений рассмотрены течения в сопле Лаваля и в ударном слое около сферы. Установлено, что акустический механизм переноса в продольном направлении может быть разделен на глобальный и локальный механизмы. При этом глобальный механизм отвечает за перенос возмущений давления через все поле течения вверх по потоку с помощью интегральных характеристик течения – таких, например, как величина массового расхода газа через сопло. Механизм переноса возмущений давления, связанный с эллиптической составляющей градиента давления, оказался пространственно локальным: уже первая глобальная итерация по этой составляющей градиента давления дает решение эллиптико-гиперболических систем уравнений, близкое к точному.

В заключение авторы выражают благодарность Г.А. Тирскому за конструктивное обсуждение работы. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (№ 00-01-00151), программами "Ведущие научные школы" (№ 00-15-96030) и Минобразования России в области технических наук (ТОО-6.8-1458).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пирумов У.Г., Росляков Г.С.* Течения газа в соплах. М.: Изд-во МГУ, 1978. 351 с.
2. *Кокошинская Н.С., Павлов Б.М., Пасконов В.М.* Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом. М.: Изд-во МГУ, 1980. 246 с.
3. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механизме сплошных сред. М.: Наука, 1984. 519 с.
4. *Лапин Ю.В., Стрелец М.Х.* Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989. 368 с.
5. *Головачев Ю.П.* Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. М.: Наука; Физматлит, 1996. 374 с.
6. *Лапин Ю.В., Нехамкина О.А., Поспелов В.А. и др.* Численное моделирование внутренних течений вязких химически реагирующих газовых смесей // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. Т. 19. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 86–185.
7. *Гершбейн Э.А., Пейгин С.В., Тирский Г.А.* Сверхзвуковое обтекание тел при малых и умеренных числах Рейнольдса // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. Т. 19. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 3–85.
8. *Тирский Г.А., Утюжников С.В.* Современные газодинамические модели внешних и внутренних задач сверх- и гиперзвуковой аэродинамики // Моделирование в механике. 1993. Т. 7. № 2. С. 5–28.
9. *Тирский Г.А.* Континуальные модели в задачах гиперзвукового обтекания затупленных тел разреженным газом // ПММ. 1997. Т. 61. № 6. С. 903–930.
10. *Rubin S.G., Tannehill J.C.* Parabolized/reduced Navier–Stokes computational techniques // Annu. Rev. Fluid Mech. 1992. V. 24. P. 117–144.

11. *Черный С.Г.* О выборе системы координат для численного решения упрощенных уравнений Навье–Стокса // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982. Т. 13. № 1. С. 132–146.
12. *Fletcher C.A.J.* Computational Techniques for Fluid Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1988. = *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991. Т. 1. 502 с.; Т. 2, 552 с.
13. *Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H.* Computational Fluids Mechanics and Heat Transfer. Washington: Hemisphere, 1984. = *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 1. 384 с.; Т. 2. 726 с.
14. *Ковеня В.М., Яненко Н.Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 304 с.
15. *Williams J.C.* Viscous compressible and incompressible flow in slender channels // AIAA Journal. 1963. V. 1. № 1. P. 186–195.
16. *Patankar S.V., Spalding D.B.* A calculation procedure for heat, mass. and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1972. V. 15. № 10. P. 1787–1806.
17. *Roberts D.W., Forester C.K.* Parabolic procedure for flows in ducts with arbitrary cross sections // AIAA Journal. 1979. V. 17. № 1. P. 33–40.
18. *Briley W.R.* Numerical method for predicting three-dimensional steady viscous flow in ducts // J. Comp. Phys. 1974. V. 14. № 1. P. 8–28.
19. *Kreskovsky J.P., Shamroth S.J.* An implicit marching method for the two-dimensional reduced Navier-Stokes equations at arbitrary Mach number // Comp. Methods in Appl. Mech. and Engng. 1978. V. 13. № 3. P. 307–334.
20. *Рогов Б.В., Соколова И.А.* Уравнения вязких течений в гладких каналах переменного сечения // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 5. С. 615–618.
21. *Рогов Б.В., Соколова И.А.* Об асимптотической точности приближения гладкого канала при описании вязких течений // Докл. РАН. 1997. Т. 357. № 2. С. 190–194.
22. *Cheng H.K.* The blunt-body problem in hypersonic flow at low Reynolds number // Inst. Aerospace Sci. Paper. 1963. № 63–92. 120 p.
23. *Бородин А.И., Пейгин С.В.* Пространственное обтекание затупленных тел в рамках модели параболизованного вязкого ударного слоя // Мат. моделирование. 1993. Т. 5. № 1. С. 16–25.
24. *Vigneron Y.C., Rakich J.V., Tannehill J.C.* Calculation of supersonic viscous flow kover delta wings with sharp subsonic leading edges // AIAA Paper. 1978. № 78–1137. 19 p.
25. *Ковалев В.Л., Крупнов А.А., Тирский Г.А.* Решение уравнений вязкого ударного слоя методом простых глобальных итераций по градиенту давления и форме ударной волны // Докл. РАН. 1994. Т. 338. № 3. С. 333–336.
26. *Lawrence S.L., Tannehill J.C., Chaussee D.S.* Upwind algorithm for the parabolized Navier-Stokes equations // AIAA Journal. 1989. V. 27. № 9. P. 1175–1183.
27. *Каратаев С.Г., Котеров В.Н.* Численный метод расчета сверхзвуковых течений вязкого газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30. № 4. С. 586–600.
28. *Копченов В.И., Ласкин И.Н.* Об одной конечно-разностной схеме для численного решения параболизованных уравнений Навье–Стокса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36. № 2. С. 126–137.
29. *Kaushik S., Rubin S.G.* Pressure based flux-split solutions for incompressible and compressible internal flows // Computers and Fluids. 1998. V. 27. № 1. P. 71–94.
30. *Ван-Дайк М.* Теория сжимаемого пограничного слоя во втором приближении с применением к обтеканию затупленных тел гиперзвуковым потоком // Исследование гиперзвуковых течений. М.: Мир, 1964. С. 35–58.
31. *Davis R.T., Werle M.J., Wornom S.F.* A consistent formulation of compressible boundary-layer theory with second-order curvature and displacement effects // AIAA Journal. 1970. V. 8. № 9. P. 1701–1703.
32. *Калиткин Н.Н., Рогов Б.В., Соколова И.А.* Решение прямой задачи сопла итерациями по направлениям линий тока // Докл. РАН. 2000. Т. 370. № 1. С. 46–49.
33. *Davis R.T.* Numerical solution of the hypersonic viscous shock-layer equations // AIAA Journal. 1970. V. 8. № 5. P. 843–851.
34. Численное исследование современных задач газовой динамики / Под ред. О.М. Белоцерковского М.: Наука, 1974. 397 с.

35. *Громов В.Г., Сахаров В.И., Фатеева Е.И.* Численное исследование гиперзвукового обтекания затупленных тел вязких химически реагирующим газом // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 5. С. 177–186.
36. *Седов Л.И., Михайлова М.П., Чёрный Г.Г.* О влиянии вязкости и теплопроводности на течение газа за сильно искривленной ударной волной // Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. и естеств. наук. 1953. № 3. С. 95–100.
37. *Rogov B.V., Sokolova I.A.* Efficient simplified model for internal viscous flow. // AIAA Paper. 1998. № 98–2493. 9p.
38. *Калиткин Н.Н., Рогов Б.В., Соколова И.А.* Двухстадийный маршевый расчет вязких течений через сопло Лаваля // Мат. моделирование. 1999. Т. 11. № 7. С. 95–117.
39. *Васильевский С.А., Тирский Г.А., Утюжников С.В.* Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 5. С. 741–750.
40. *Егоров Ю.Э., Стрелец М.Х., Шур М.Л.* Применение метода масштабирования сжимаемости для расчета стационарных течений вязких газов и газовых смесей в соплах Лаваля // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 10. С. 3–12.
41. *Cuffel R.F., Back L.H., Massier P.F.* Transonic flowfield in a supersonic nozzle with small throat radius of curvature // AIAA Journal. 1969. V. 7. № 7. P. 1364–1366.
42. *Бородин А.И., Иванов В.А., Пейгин С.В.* Численное исследование сверхзвукового обтекания затупленных тел в рамках модели вязкого ударного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36. № 8. С. 158–168.
43. *Любимов А.Н., Русанов В.В.* Течение газа около затупленных тел. Т. 2. М.: Наука, 1970. 379 с.
44. *Hickman R.S., Giedt W.H.* Heat transfer to a hemisphere-cylinder at low Reynolds numbers // AIAA Journal. 1963. V. 1. № 3. P. 665–672.

Москва
E-mail: rogov@imamod.ru

Поступила в редакцию
19.XII.2000