

УДК 532.582.33

© 2002 г. М.В. НОРКИН

## ВЕРТИКАЛЬНЫЙ УДАР ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПЛАВАЮЩЕГО НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ОГРАНИЧЕННОМ БАССЕЙНЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Для случая, когда стенки бассейна удалены от тела на большие расстояния, построены асимптотики основных характеристик удара. В качестве конкретных примеров рассмотрены задачи удара в областях со сферическими границами.

Алгоритм построения степенного асимптотического разложения для больших глубин, позволяющий на основе решения задачи об ударе твердого тела, плавающего на поверхности жидкого полупространства, получить приближенное решение для слоя жидкости конечной глубины, предложен в [1]. Обобщение этого алгоритма на случай произвольного ограниченного бассейна дано в [2]. На примере центрального удара плавающего тела проводится исследование первых двух членов асимптотики. Однако для качественного и количественного анализа большинства задач найденных членов асимптотики оказывается недостаточно.

В настоящей работе, при некоторых упрощающих предположениях симметрии, проводится подробный асимптотический анализ задачи о вертикальном и безотрывном ударе плавающего тела.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим твердое тело, плавающее на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, наполняющей ограниченный бассейн. До удара тело и жидкость покоятся. В результате удара тело начинает двигаться в вертикальном направлении и в общем случае вращаться вокруг горизонтальной оси (вертикальный удар). В частности, если вращение отсутствует, удар называется центральным. Предполагается, что в результате удара не происходит отрыва жидкости от смоченной поверхности тела (безотрывный удар).

Подробно остановимся на случае, когда область, занятая жидкостью имеет ось симметрии  $z$ . Декартова система координат  $x, y, z$  введена таким образом, что оси  $x$  и  $y$  лежат в плоскости свободной поверхности, ось  $z$  направлена вертикально вниз в глубь жидкости. Согласно классической теории удара, потенциал скоростей  $\Phi$ , приобретенных частицами жидкости в результате удара, определяется решением смешанной задачи теории потенциала в области, занятой жидкостью [3–4]

$$\Delta\Phi = 0, \left( \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)_{S_1} = v_0 n_z + \omega(zn_x - xn_z), (\Phi)_{S_2} = 0, \left( \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)_{S_3} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $S_1, S_2, S_3$  – соответственно смоченная поверхность твердого тела, свободная поверхность жидкости и неподвижная твердая стенка бассейна;  $v_0$  и  $\omega$  – поступательная и угловая скорости, приобретенные телом в результате удара;  $n_x, n_z$  – проекции вектора внешней нормали к поверхности  $S_1$  на оси  $x$  и  $z$ .

Считаем, что при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом  $h$  фиксированная поверхность  $S_3^0$  переходит в границу  $S_3$ :  $S_3 = hS_3^0$  ( $x = hx^0, y = hy^0, z = hz^0$ ).

Плотность жидкости  $\rho$  полагается равной единице.

Приведем ряд обозначений, используемых в дальнейшем:  $G$  – бесконечная область, ограниченная смоченной поверхностью тела  $S_1$  и свободной поверхностью жидкости  $S_2$  (случай  $h = \infty$ );  $D$  – бассейн без тела, ограниченный поверхностью  $S_3$  и плоскостью  $z = 0$ ;  $D^\circ$  – внутренняя область с границами: поверхностью  $S_3^\circ$  и плоскостью  $z = 0$ ;  $\partial D$  и  $(\partial D^\circ)$  – объединение поверхности  $S_3(S_3^\circ)$  и ее зеркального отражения относительно плоскости  $z = 0$ ;  $r, \varphi, z$  – цилиндрические координаты.

**2. Построение асимптотики для больших  $h$ .** Основная идея, лежащая в основе предлагаемого асимптотического подхода состоит в том, чтобы свести решение исходной задачи для области сложной геометрической конфигурации к решению последовательности задач в областях, имеющих более простые формы границ. Таким образом, поочередно рассматриваются две краевые задачи в областях  $G$  и  $D$ : случай  $h = \infty$  и задача для ограниченного бассейна при отсутствии тела. При этом каждый раз ликвидируются невязки, возникающие на неподвижной границе  $S_3$  и смоченной поверхности тела  $S_1$ . После разложения полученных приближений в ряды по степеням  $h^{-1}$  и удержания необходимого количества членов, приходим к асимптотике для больших значений  $h$ .

Подробное изложение алгоритма построения асимптотики проводится в случае центрального удара. Полагаем  $v_0 = 1, \omega = 0$ . Потенциал скоростей  $\Phi$  разыскиваем в виде ряда

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \dots \quad (2.1)$$

В качестве первого приближения  $\Phi_1$  возьмем решение задачи об ударе тела, плавающего на поверхности жидкого полупространства. Для потенциала  $\Phi_1$  на больших расстояниях от тела справедливо разложение в гармонический ряд [4–5]

$$\Phi_1 = -\frac{C_1 z}{2\pi R^3} - \frac{C_2 xz + C_3 yz}{4\pi R^5} - \frac{C_4 z^3 + C_5 x^2 z + C_6 y^2 z + C_7 xyz}{R^7} - \dots \quad (2.2)$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

где постоянные  $C_1 - C_7$  выражаются через интегралы по смоченной поверхности тела, содержащие потенциал скоростей  $\Phi_1$ , например

$$C_1 = \iint_{S_1} z \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} ds - \iint_{S_1} \Phi_1 n_z ds$$

$$\frac{1}{6} C_2 = \iint_{S_1} xz \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} ds - \iint_{S_1} zn_x \Phi_1 ds - \iint_{S_1} xn_z \Phi_1 ds$$

$$\frac{1}{6} C_3 = \iint_{S_1} yz \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} ds - \iint_{S_1} zn_y \Phi_1 ds - \iint_{S_1} yn_z \Phi_1 ds$$

В осесимметричном случае ряд (2.2) принимает вид

$$\Phi_1 = -\frac{(m_\infty + V)z}{2\pi R^3} - \frac{3C(3r^2 - 2z^2)z}{4\pi R^7} - \dots \quad (2.3)$$

Здесь  $m_\infty$  – присоединенная масса в случае  $h = \infty$ ;  $V$  – объем погруженной части тела; постоянная  $C$  находится по формуле

$$C = \iiint_V (x^2 - z^2) dV - 2 \iint_{S_1} xzn_x \Phi_1 ds - \iint_{S_1} (x^2 - z^2)n_z \Phi_1 ds \quad (2.4)$$

Для ликвидации невязок, создаваемых потенциалом  $\Phi_1$  на неподвижной границе  $S_3$ , рассматривается задача в ограниченном бассейне при отсутствии тела

$$\Delta\Phi_2 = 0, (\Phi_2)_{z=0} = 0, \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\right)_{S_3} = \frac{(m_\infty + V)}{2\pi}(Q_1)_{S_3} + \frac{3C}{4\pi}(Q_2)_{S_3} \quad (2.5)$$

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial n} \frac{z}{R^3}, \quad Q_2 = \frac{\partial}{\partial n} \frac{(3r^2 - 2z^2)z}{R^7}$$

Здесь можно ограничиться первыми двумя членами ряда (2.3). Остальные члены дают вклад в потенциал  $\Phi$  на смоченной поверхности тела порядка  $O(h^{-7})$  при  $h \rightarrow \infty$ . После нечетного продолжения функции  $\Phi_2$  через плоскость  $z = 0$  решение задачи (2.5) представляется в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя

$$\Phi_2(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} \frac{1}{R_0} \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} \Phi_2 \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_0} ds \quad (2.6)$$

$$R_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

Затем, в поверхностных интегралах, стоящих в (2.6), сделаем замену переменных:  $x = hx'$ ,  $y = hy'$ ,  $z = hz'$ ,  $ds = h^2 ds'$ . Далее штрихи опускаем. В результате приходим к такому представлению потенциала  $\Phi_2$

$$\begin{aligned} \Phi_2(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D^0} \frac{1}{R_h} \left[ \frac{(m_\infty + V)}{2\pi h^2} \frac{\partial f}{\partial n} + \frac{3C}{4\pi h^4} \frac{\partial g}{\partial n} \right] ds - \\ &- \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D^0} \left[ \frac{(m_\infty + V)f}{2\pi h^2} + \frac{3Cg}{4\pi h^4} \right] \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_h} ds \\ R_h &= \sqrt{(x_0 h^{-1} - x)^2 + (y_0 h^{-1} - y)^2 + (z_0 h^{-1} - z)^2} \end{aligned}$$

где функции  $f$  и  $g$  определяются решениями краевых задач в области  $D^0$

$$\Delta f = 0, (f)_{z=0} = 0, \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{S_3^0} = (Q_1)_{S_3^0} \quad (2.7)$$

$$\Delta g = 0, (g)_{z=0} = 0, \left(\frac{\partial g}{\partial n}\right)_{S_3^0} = (Q_2)_{S_3^0}$$

Раскладывая  $\Phi_2$  как функцию параметра  $\epsilon = 1/h$  по формуле Тейлора с центром в точке  $\epsilon = 0$  ( $h = \infty$ ), получим асимптотику, справедливую в любой фиксированной (не зависящей от  $h$ ) окрестности смоченной поверхности тела ( $h \rightarrow \infty$ )

$$\Phi_2(x_0, y_0, z_0) = -\frac{(m_\infty + V)\xi_2 z_0}{2\pi h^3} - \frac{3C\xi_1 z_0}{4\pi h^5} + \frac{(m_\infty + V)\xi_2}{4\pi^2 h^5} + O(h^{-7}) \quad (2.8)$$

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_3^0} \left( f \frac{\partial f_1}{\partial n} - f_1 \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds, \quad \xi_1 = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_3^0} \left( g \frac{\partial f_1}{\partial n} - f_1 \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds$$

$$\xi_2 = \xi_2(x_0, y_0, z_0) = \iint_{S_3^0} \left( f_2 \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial f_2}{\partial n} \right) ds, \quad f_1 = zR^{-3}$$

$$f_2 = \frac{1}{2} [3x_0^2(4x^2 - y^2 - z^2) + 3y_0^2(4y^2 - x^2 - z^2) + z_0^2(2z^2 - 3x^2 - 3y^2)] z_0 z R^{-7}$$

Рассмотрим область, которая получается исключением из  $D^\circ$  полусферы  $S_\varepsilon$  малого радиуса  $\varepsilon$  с центром в начале координат. Применяя в этой области к функциям  $f$  и  $f_1$  формулу Грина, сведем интегрирование по  $S_3^\circ$  в выражении для  $\xi$  к интегрированию по  $S_\varepsilon$ . Переходя в последнем интеграле к сферическим координатам и раскладывая подынтегральную функцию в степенной ряд по малому параметру  $\varepsilon$ , при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , окончательно получим

$$\xi = -(f_z)_{M_0}, \quad M_0 = (0, 0, 0) \quad (2.9)$$

Аналогично для постоянной  $\xi_1$  и функции  $\xi_2$  приходим к выражениям

$$\xi_1 = -(g_z)_{M_0}, \quad \xi_2 = \frac{1}{3} \pi \mu z_0 (2z_0^2 - 3r_0^2)$$

$$\mu = \frac{1}{5} (f_{zzz} - 3f_{rrz})_{M_0} = -(f_{rrz})_{M_0} = \frac{1}{2} (f_{zzz})_{M_0} \quad (2.10)$$

Чтобы погасить появившиеся нормальные компоненты потенциала  $\Phi_2$  на смоченной поверхности тела, снова исследуется случай  $h = \infty$ . Пренебрегая в формуле (2.8) остаточным членом, приходим для определения  $\Phi_3$  к краевой задаче в области  $G$

$$\Delta \Phi_3 = 0, \quad (\Phi_3)_{S_2} = 0, \quad (\Phi_3)_\infty = 0$$

$$\left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} \right)_{S_1} = a_0 h^{-3} n_z + a_1 h^{-5} n_z - a_2 h^{-5} [(2z^2 - r^2) n_z - 2rzn_r]$$

$$a_0 = \frac{(m_\infty + V)\xi}{2\pi}, \quad a_1 = \frac{3C\xi_1}{4\pi}, \quad a_2 = \frac{(m_\infty + V)\mu}{4\pi}$$

В соответствии с последним граничным условием функция  $\Phi_3$  представляется в виде суммы трех слагаемых, причем первые два отличаются от  $\Phi_1$  только постоянным множителем

$$\Phi_3 = a_0 h^{-3} \Phi_1 + a_1 h^{-5} \Phi_1 - a_2 h^{-5} \vartheta + O(h^{-7}), \quad h \rightarrow \infty$$

где функция  $\vartheta$  является решением краевой задачи в области  $G$

$$\Delta \vartheta = 0, \quad \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right)_{S_1} = (2z^2 - r^2) n_z - 2rzn_r, \quad (\vartheta)_{S_2} = 0, \quad (\vartheta)_\infty = 0$$

Продолжая процесс последовательных приближений дальше, найдем для функции  $\Phi_4$  в окрестности смоченной поверхности тела и функции  $\Phi_5$  выражения

$$\Phi_4 = -bh^{-6}z + \dots, \quad \Phi_5 = bh^{-6}\Phi_1 + \dots, \quad b = \frac{(m_\infty + V)^2 \xi^2}{4\pi^2}$$

Собирая найденные приближения, получим асимптотику потенциала  $\Phi$  на смоченной поверхности тела

$$\Phi = \Phi_1 + a_0 h^{-3} (\Phi_1 - z) + a_1 h^{-5} (\Phi_1 - z) + \frac{1}{3} a_2 h^{-5} [z(2z^2 - 3r^2) - 3\vartheta] +$$

$$+ bh^{-6} (\Phi_1 - z) + O(h^{-7}), \quad h \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

Умножая (2.11) на функцию  $-n_z$  и интегрируя полученное равенство по смоченной поверхности тела, найдем асимптотику присоединенной массы  $m$  при ударе

$$m = m_\infty + \frac{(m_\infty + V)^2 \xi}{2\pi h^3} + \frac{(m_\infty + V)C\eta}{4\pi h^5} + \frac{(m_\infty + V)^3 \xi^2}{4\pi^2 h^6} + O(h^{-7}), \quad h \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

$$\eta = 3\xi_1 + 2\mu$$

Здесь  $C, \xi, \xi_1, \mu$  определяются по формулам (2.4), (2.9), (2.10). Важно отметить, что постоянные  $m_\infty$  и  $C$ , входящие в формулу (2.12), зависят только от геометрии плавающего тела, а  $\xi$  и  $\eta$  – только от формы границы бассейна.

По аналогии рассматривается неосесимметричная задача. Полагаем в (1.1)  $v_0 = 0, \omega = 1$ . Решение задачи ищем в виде ряда (2.1), в котором первое приближение  $\Phi_1$  соответствует случаю  $h = \infty$ . Асимптотика функции  $\Phi_1$  на больших расстояниях от тела имеет вид (2.2), где постоянные  $C_1, C_3 - C_7$  равны нулю. Далее, повторяя рассуждения осесимметричной задачи, получим асимптотику потенциала вращательного движения на смоченной поверхности тела

$$\Phi = \Phi_1 + \frac{C_2 \zeta}{4\pi h^5} (\vartheta_1 - xz) + O(h^{-7}), \quad h \rightarrow \infty$$

Здесь функция  $\vartheta_1$  удовлетворяет краевой задаче в области  $G$

$$\Delta \vartheta_1 = 0, \quad \left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} \right)_{S_1} = zn_x + xn_z, \quad (\vartheta_1)_{S_2} = 0, \quad (\vartheta_1)_\infty = 0$$

Постоянная  $\zeta = -(\chi_{xz})_{M_0}$ , где функция  $\chi$  определяется решением краевой задачи в области  $D^0$

$$\Delta \chi = 0, \quad (\chi)_{z=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial \chi}{\partial n} \right)_{S_3^0} = \left( \frac{\partial}{\partial n} \frac{xz}{R^5} \right)_{S_3^0}$$

В частности, при ударе плоского контура, имеющего форму круглого диска или кольца,  $C_2 = -6J_\infty, \vartheta_1 = -\Phi_1$ , где  $J_\infty$  – присоединенный момент инерции при  $h = \infty$ . Асимптотика присоединенного момента инерции  $J$  для данного частного случая имеет вид

$$J = J_\infty + \frac{3J_\infty \zeta}{2\pi h^5} + O(h^{-7}), \quad h \rightarrow \infty$$

**3. Сферические границы.** В качестве конкретных примеров применения полученных формул рассмотрим задачи удара в областях со сферическими границами. Пусть тело плавает на поверхности жидкости, наполняющей полусферу радиуса  $d$ . Для функций  $f, g, \chi$  и постоянных  $\xi, \eta, \zeta$  получаются простые выражения

$$f = -\frac{2z}{a^3}, \quad g = \frac{4z}{3a^7} (2z^2 - 3r^2), \quad \chi = -\frac{3xz}{2a^5}, \quad \xi = \frac{2}{a^3}, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \frac{3}{2a^5}$$

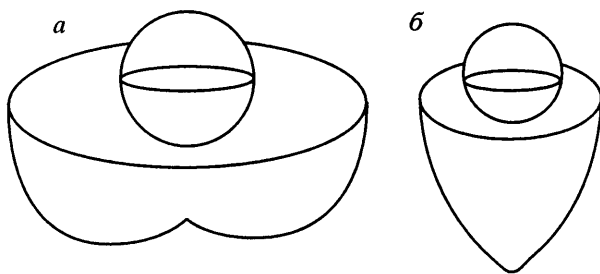
где  $a$  – радиус фиксированной полусферы (поверхности  $S_3^0$ ). С учетом этого асимптотика присоединенной массы примет вид ( $d = ah$ )

$$m = m_\infty + \frac{(m_\infty + V)^2}{\pi d^3} + \frac{(m_\infty + V)^3}{\pi^2 d^6} + O(d^{-7}), \quad d \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

Полученная формула позволяет на основании известного значения присоединенной массы при ударе твердого тела, плавающего на поверхности жидкого полупространства, получить с ошибкой  $O(d^{-7})$  при  $d \rightarrow \infty$ , приближенное значение присоединенной массы того же тела, находящегося на поверхности жидкости в полусфере.

В случае шара радиуса  $a$ , полупогруженного в жидкость,  $C = 0$  и формула (2.12) принимает вид

$$m = \frac{\pi}{3} a^3 \left( 1 + \frac{3\xi a^3}{2h^3} + \frac{3\xi^2 a^6}{4h^6} + O(h^{-7}) \right), \quad h \rightarrow \infty \quad (3.2)$$



Шар, погруженный в жидкость, наполняющую бассейн, ограниченный веретенообразной поверхностью вращения:  $a - 0 < b/d < 1$ ,  
 $b - -1 < b/d < 0$

Интересно отметить, что в формулу (3.2) входит только одна неизвестная постоянная  $\xi$ , зависящая от формы границы бассейна.

Как показывают конкретные примеры, остаточные члены формул (3.1) и (3.2) имеют более высокий порядок малости, чем  $d^{-7}$  и  $h^{-7}$ . Однако проверить это утверждение в общем случае затруднительно.

**4. Пример бассейна веретенообразной формы.** Рассмотрим осесимметричную задачу о центральном ударе шара, погруженного в жидкость. Предполагается, что жидкость ограничена веретенообразной поверхностью, полученной вращением дуги окружности вокруг оси  $z$  (фигура) [6]. Остановимся на решении задачи (2.7) и определении постоянной  $\xi$ . Введем в рассмотрение биполярные координаты  $\alpha, \beta, \varphi$ , связанные с цилиндрическими  $r, z$  соотношениями [6]

$$r = \frac{c \sin \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad z = \frac{c \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad 0 < \alpha < \pi, -\infty < \beta < \infty, -\pi < \varphi \leq \pi$$

Здесь  $c$  – масштабный множитель,  $\varphi$  – угловая координата. Координатные поверхности  $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$  представляют собой веретенообразные поверхности вращения. Параметры  $c$  и  $\alpha_0$  связаны с характерными параметрами задачи  $b$  и  $d$  соотношениями:  $c = d \sin \alpha_0$ ,  $b = d \cos \alpha_0$ ,  $d$  – радиус дуги вращения,  $b$  – координата центра дуги. Функцию  $f$  будем искать методом разделения переменных в биполярных координатах [6]

$$f(\alpha, \beta) = -c^{-2} \sqrt{2 \operatorname{ch} \beta - 2 \cos \alpha} \int_0^{\infty} A(\tau) \sin \beta \tau \frac{P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \alpha)}{P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \alpha_0)} d\tau \quad (4.1)$$

где  $P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \alpha)$  – функция Лежандра с комплексным значком,  $P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \alpha_0)$  – присоединенная функция Лежандра [6]. Функция, определяемая формулой (4.1), удовлетворяет уравнению Лапласа в области  $D^\circ$  ( $\alpha_0 < \alpha < \pi$ ,  $0 < \beta < \infty$ ,  $-\pi < \varphi < \pi$ ) и обращается в ноль при  $z = 0$  ( $\beta = 0$ ). Остается подобрать неизвестную функцию  $A(\tau)$  так, чтобы выполнялось граничное условие на  $S_3^\circ$  (при  $\alpha = \alpha_0$ ). С помощью синус-преобразования Фурье и ряда элементарных операций, получим для  $A(\tau)$  интегральное уравнение второго рода

$$A(\tau) - \int_0^{\infty} h(s) [K(\tau - s) - K(\tau + s)] A(s) ds = H(\tau), \quad 0 < \tau < \infty \quad (4.2)$$

$$h(s) = \frac{P_{-1/2+is}^1(-\cos \alpha_0)}{2P_{-1/2+is}^1(-\cos \alpha_0)} + 2 \operatorname{ctg} \alpha_0, \quad K(s) = \frac{\operatorname{sh} \alpha_0 s}{\operatorname{sh} \pi s}$$

$$H(\tau) = \frac{8}{15} \frac{\tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} \left[ (5 + 6 \operatorname{ctg}^2 \alpha_0) P_{-1/2+i\tau}^1(\cos \alpha_0) - 3 \operatorname{ctg} \alpha_0 \left( \tau^2 + \frac{1}{4} \right) P_{-1/2+i\tau}^1(\cos \alpha_0) \right]$$

С учетом (2.9) найдем выражение для постоянной  $\xi$

$$\xi = \xi_0 c^{-3}, \quad \xi_0 = 4 \int_0^{\infty} \frac{\tau A(\tau) d\tau}{P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \alpha_0)}$$

Путем замены переменных:  $s = -\gamma \ln x$ ,  $\tau = -\gamma \ln y$ ,  $\gamma > 0$ , интегральное уравнение (4.2) сводится к уравнению на отрезке  $[0, 1]$ , решаемому численно. Для вычисления функций Лежандра используются их выражения гипергеометрическим рядом. Численные значения постоянной  $\xi_0$  для некоторых величин параметра  $b/d$  приведены ниже

$b/d$	-0.5	-0.3	-0.1	0	0.1	0.3	0.5	0.7
$\xi_0$	9.066	4.628	2.615	2	1.536	0.898	0.497	0.235
$\delta_*^{-1}$	3.77	3.83	3.9	3.94	3.61	3.02	2.48	1.93

Расчеты относительного коэффициента присоединенной массы шара  $\lambda = 3m/(\pi a^3)$  по асимптотической формуле (3.2) показали, что с ее помощью можно достоверно определить те глубины, на которых влияние неподвижных твердых границ бассейна начинает сказываться уже существенно. Основанием для такого вывода служит сравнение численных результатов, полученных с помощью двух и трех членов асимптотической формулы (3.2). Так, например, при  $b/d = 0.5$ ,  $\delta^{-1} = 2.48$ , где  $\delta^{-1} = ch/a$ ,  $b/d \geq 0$  и  $\delta^{-1} = (b + d)h/a$ ,  $b/d < 0$ , соответствующие приближения коэффициента  $\lambda$  равны 1.0489 и 1.0497. Выше приведены значения параметра  $\delta_*^{-1}$ , начиная с которых (то есть при  $\delta^{-1} > \delta_*^{-1}$ ), влиянием стенок бассейна веретенообразной формы на присоединенную массу шара можно пренебречь с погрешностью менее 5%.

Сделанный вывод подтверждается в частном случае сферического дна ( $b = 0$ ), где задача имеет точное решение. Его анализ показывает, что диапазон применимости формулы (3.2) достаточно большой: при  $\delta^{-1} > 1.51$  расчеты  $\lambda$  можно производить с погрешностью менее 5%. По-видимому, в остальных случаях этот диапазон будет немного шире, так как стенки бассейна веретенообразной формы, удаленные от шара на одинаковое расстояние, при  $b/d \neq 0$  меньше стесняют жидкость, чем в частном случае сферического дна. Однако точно указать область применимости формулы (3.2) при  $b/d \neq 0$  затруднительно, ввиду отсутствия численных и экспериментальных результатов, с которыми можно провести сравнение.

**5. Вертикальный удар круглого диска.** В качестве приложения полученных асимптотик рассмотрим задачу о вертикальном ударе диска. Основные предположения, сделанные в п.1, здесь сохраняются. Начало декартовой системы координат совмещено с центром диска.

Уравнения изменения импульса и момента импульса однородного диска при вертикальном ударе приводят к соотношениям

$$(m_T + m)v_0 = P_z, \quad P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad (I + J)\omega = -x_0 P_z, \quad y_0 = 0$$

Здесь  $m_T$  и  $I$  – масса и момент инерции диска;  $m$  и  $J$  – присоединенные масса и момент инерции;  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  – компоненты внешнего ударного импульса, приложенного к диску в точке  $(x_0, y_0, 0)$ .

В дальнейшем массой и моментом инерции диска будем пренебрегать. Тогда координата точки приложения импульса находится по формуле:  $x_0 = -J\omega/(mv_0)$ .

Один из наиболее сложных и интересных вопросов, возникающий в задаче о вертикальном ударе – нахождение условия безотрывности удара. Как известно, решение задачи (1.1) применимо только в том случае, когда импульсивное давление  $p_t = -\rho\Phi$  неотрицательно всюду на смоченной поверхности тела.

Интересно отметить, что условие безотрывности удара не зависит от величины импульса внешней ударной силы, а зависит только от точки его приложения. Это

объясняется тем, что положительная компонента  $P_z$  стоит множителем в выражении для импульсивного давления и, следовательно, на знак  $p_i$  не влияет.

Заметим еще, что все неизвестные функции и постоянные в формулах (2.11)–(2.13), зависящие от геометрии плавающего тела, в данном случае, легко определяются.

Следуя [7], получим необходимое и достаточное условие безотрывности удара:  $|x_0| \leq R$ , где

$$R = \frac{a}{5} \left[ 1 + \frac{4\mu a^5}{45\pi} h^{-5} + O(h^{-7}) \right], \quad h \rightarrow \infty$$

Здесь  $R$  – радиус круга на плоскости свободной поверхности, ограничивающий область безотрывного вертикального удара; постоянная  $\mu$  определяется по формуле (2.10). Особый интерес представляет определение знака величины  $\mu$ , по которому можно судить о том, способствуют ( $\mu < 0$ ) или наоборот, препятствуют ( $\mu > 0$ ) отрыву неподвижные твердые стенки бассейна.

Уже на простых примерах выясняется, что неподвижные твердые границы бассейна по-разному влияют на зону безотрывного удара. Так, в случае слоя жидкости конечной глубины постоянная  $\mu = -45\zeta(5)/(64b^5)$ , где  $b$  – глубина фиксированного слоя (области  $D^\circ$ );  $\zeta(s)$  – дзета функция Римана. Здесь получается совпадение с известным результатом [7]. Для полубесконечного цилиндра

$$\mu = \frac{1}{\pi b^5} \int_0^\infty \frac{\lambda^4 K_1(\lambda)}{I_1(\lambda)} d\lambda$$

где  $b$  – радиус фиксированного цилиндра;  $I_1(\lambda)$ ,  $K_1(\lambda)$  – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Если  $h = \infty$ , то круг, ограничивающий область безотрывного вертикального удара, имеет радиус  $a/5$  [7]. В случае очень большого, но конечного  $h$ , можно сделать вывод: для слоя жидкости конечной глубины этот круг уменьшается, а для полубесконечного цилиндра, наоборот увеличивается.

Отметим еще, что в частном случае сферического дна постоянная  $\mu = 0$ . Таким образом, именно сферическая граница оказывает самое незначительное влияние на условие безотрывности удара круглого диска.

**Заключение.** Предположение о наличии у области течения жидкости оси симметрии  $z$  несущественно. Оно сделано только для того чтобы избежать громоздкой технической работы при построении асимптотики.

Вторые члены асимптотик потенциала скоростей и присоединенной массы (2.11), (2.12) верны и в общем случае, без предположений симметрии. При этом их третьи члены имеют порядок  $O(h^{-4})$  при  $h \rightarrow \infty$ . При наличии у области, занятой жидкостью двух взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии  $xz$  и  $yz$ , третьи члены асимптотик (2.11), (2.12), а также вторые члены асимптотик потенциалов вращательных вокруг осей  $x$  и  $y$  движений имеют порядок  $O(h^{-5})$  при  $h \rightarrow \infty$  [2].

Наиболее простой вид асимптотические формулы принимают для областей, имеющих сферические границы. Эти области безусловно выделяются среди других областей и представляют некоторый вырожденный случай по отношению к величине погрешности остаточного члена.

Предложенный метод построения асимптотики может быть полезен при решении и других смешанных задач математической физики. Есть основания полагать, что его можно будет обобщить на нелинейную задачу о гидродинамическом ударе с отрывом жидкости от поверхности тела.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№№ 01-01-00105; 00-15-96188).



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Норкин М.В.* Вертикальный удар по твердому телу, плавающему на поверхности слоя идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 1. С. 74–81.
2. *Норкин М.В.* Об учете влияния стенок бассейна произвольной формы при безотрывном ударе плавающего тела // ПМТФ. 2001. № 1. С. 77–81.
3. *Седов Л.И.* Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости // Тр. ЦАГИ. 1934. Вып. 187. С. 1–27.
4. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
5. *Ламб Г.* Гидродинамика. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
6. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М., Л.: Физматгиз, 1963. 359с.
7. *Ворович И.И., Юдович В.И.* Удар круглого диска о жидкость конечной глубины // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 4. С. 525–532.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
13.VII.2000