МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 2002

УДК 532.527.2.013.4 : 517.91

© 2002 г. В.В. КОЛЕСОВ, А.Г. ХОПЕРСКИЙ

ПРОСТЕЙШИЕ РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ БИФУРКАЦИЙ ВОЗНИКНОВЕНИЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ ТЕЙЛОРА И АЗИМУТАЛЬНЫХ ВОЛН

Исследуются стационарные, автоколебательные и двухчастотные квазипериодические режимы движения жидкости между нагретыми вращающимися цилиндрами в малой окрестности точки пересечения нейтральных кривых монотонной вращательно-симметричной и колебательной трехмерной потери устойчивости неизотермического течения Куэтта [1]. Применяется методика работ [2–4], позволяющая свести дело к исследованию автономной динамической системы четвертого порядка, коэффициенты которой находятся путем численного интегрирования серии линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи. Пусть вязкая теплопроводная жидкость заполняет полость между двумя твердыми бесконечными концентрическими цилиндрами с радиусами R_1, R_2 ($R_1 < R_2$). Угловые скорости и температуры внутреннего и внешнего цилиндров обозначим соответственно Ω_1, Θ_1 и Ω_2, Θ_2.

Предположим, что внешние массовые силы отсутствуют. За масштабы длины, скорости, времени, температуры и плотности примем соответственно R_1, $\Omega_1 R_1$, $1/\Omega_1$, Θ_1 и плотность жидкости при температуре Θ_1.

В цилиндрических координатах r, φ, z (ось z направлена вдоль оси цилиндров) безразмерные уравнения Навье – Стокса, теплопроводности, неразрывности и состояния имеют вид [5]

$$\frac{\partial v_r'}{\partial t} + (\mathbf{V}', \nabla) v_r' - \frac{v_\varphi'^2}{r} + \frac{1}{\rho'}\frac{\partial \Pi'}{\partial r} = \frac{1}{\lambda}\left(\Delta v_r' - \frac{v_r'}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi'}{\partial \varphi}\right)$$

$$\frac{\partial v_\varphi'}{\partial t} + (\mathbf{V}', \nabla) v_\varphi' + \frac{v_r' v_\varphi'}{r} + \frac{1}{r\rho'}\frac{\partial \Pi'}{\partial \varphi} = \frac{1}{\lambda}\left(\Delta v_\varphi' - \frac{v_\varphi'}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r'}{\partial \varphi}\right)$$

$$\frac{\partial v_z'}{\partial t} + (\mathbf{V}', \nabla) v_z' + \frac{1}{\rho'}\frac{\partial \Pi'}{\partial z} = \frac{1}{\lambda}\Delta v_z', \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho' \mathbf{V}') = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + (\mathbf{V}', \nabla) T' = \frac{1}{\lambda Pr}\Delta T', \quad \rho' = 1 - \gamma\Theta_1 (T' - 1)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

Здесь $\mathbf{V}' = \{v_r', v_\varphi', v_z'\}$ – вектор скорости, T' – температура, Π' – давление, ρ' – плотность жидкости, t – время, $\lambda = \Omega_1 R_1^2 / \nu$ – число Рейнольдса, $Pr = \nu/\chi$ – число Прандтля,

ν, χ и γ – соответственно коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и теплового расширения.

Коэффициенты ν, χ и γ будем считать постоянными, что требует известной осторожности в применении результатов данной работы к описанию явлений, которые происходят в реальных физических жидкостях. Так, пренебрежение зависимостью вязкости от температуры для некоторых жидкостей (например, для определенных растворов глицерина в воде) может привести к качественно неверным выводам о влиянии температурных градиентов на устойчивость основного стационарного течения [6].

Уравнения (1.1) рассматриваются при условии

$$\int_0^{2\pi}\int_1^{R_2/R_1} \rho' v_z' r dr d\varphi = 0 \tag{1.2}$$

обеспечивающим отсутствие расхода жидкости через поперечное сечение полости цилиндров, а также при краевых условиях

$$\begin{gathered} v_r' = v_z' = 0, \quad v_\varphi' = 1, \ T' = 1 \ (r = 1) \\ v_r' = v_z' = 0, \quad v_\varphi' = \frac{\Omega_2 R_2}{\Omega_1 R_1}, \quad T' = \frac{\Theta_2}{\Theta_1} \quad \left(r = \frac{R_2}{R_1}\right) \end{gathered} \tag{1.3}$$

Задача (1.1)–(1.3) обладает группой симметрии $G = SO(2) \times O(2)$ – она инвариантна относительно вращений L_φ^δ около оси цилиндров на произвольный угол δ, сдвигов L_z^h вдоль этой оси на произвольное расстояние h и инверсии J (зеркальной симметрии относительно отражений в плоскости поперечного сечения цилиндров), действующих на вектор-функцию $\mathbf{F} = \{v_r, v_\varphi, v_z, T\}$ по правилам

$$\begin{gathered} (L_\varphi^\delta \mathbf{F})(t, r, \varphi, z) = \mathbf{F}(t, r, \varphi + \delta, z) \\ (L_z^h \mathbf{F})(t, r, \varphi, z) = \mathbf{F}(t, r, \varphi, z + h) \\ (J\mathbf{F})(t, r, \varphi, z) = \{v_r(t, r, \varphi, -z), \quad v_\varphi(t, r, \varphi, -z), \quad -v_z(t, r, \varphi, -z), \quad T(t, r, \varphi, -z)\} \end{gathered} \tag{1.4}$$

для любых вещественных δ и h.

Задача (1.1)–(1.3) допускает точное решение, которое представляет собой стационарное круговое течение Куэтта с логарифмическим распределением температуры. Оно называется неизотермическим течением Куэтта и имеет вид

$$\begin{gathered} \mathbf{V}_0 = \{0, v_{0\varphi}(r), 0\}, \quad v_{0\varphi} = ar + \frac{b}{r}, \quad T_0 = c \ln r + 1 \\ \Pi_0 = \int_1^r \frac{v_{0\varphi}^2(s)}{s}\left(1 - \frac{Ra}{Pr}\ln s\right) ds + \text{const} \\ a = \frac{\Omega R^2 - 1}{R^2 - 1}, \quad b = 1 - a, \quad c = \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_1 \ln R}, \quad R = \frac{R_2}{R_1}, \quad \Omega = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь безразмерный параметр $Ra = \gamma c \Theta_1 Pr$ – число Рэлея.

С ростом числа Рейнольдса неизотермическое течение Куэтта (1.5) может потерять устойчивость двумя способами [1]. В результате монотонной вращательно-симметричной неустойчивости течения (1.5) возникают неизотермические стационарные вихри Тейлора [7]. Колебательная трехмерная неустойчивость порождает неизотермический автоколебательный режим типа бегущей азимутальной волны [8]. Требуется исследовать режимы, которые возникают в малой окрестности точки пересечения нейтральных кривых, отвечающих этим двум типам потери устойчивости течения (1.5). Заметим, что неизотермическое течение Куэтта в отличие от изотермического может потерять устойчивость также и с возникновением вращательно-симметричных автоколебаний [9] или плоского вторичного режима [10], но в данной работе соответствующие бифуркации не рассматриваются.

2. Амплитудная система. Решение задачи (1.1)–(1.3) будем искать в виде

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}, \quad T' = T_0 + cPrT, \quad \Pi' = \Pi_0 + \Pi/\lambda \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.1)–(1.3), приходим к следующей задаче для определения возмущений $\mathbf{V}$, T и Π:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_r}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + (\mathbf{V}, \nabla) v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{1}{\lambda}\left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + 2\omega_1 v_\varphi - Ra\omega_2 T \\
\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + (\mathbf{V}, \nabla) v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{1}{\lambda r} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{1}{\lambda}\left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) + g_1 v_r \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + (\mathbf{V}, \nabla) v_z + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{1}{\lambda} \Delta v_z \\
\frac{\partial T}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial T}{\partial \varphi} + (\mathbf{V}, \nabla) T = \frac{1}{\lambda Pr} \Delta T - \frac{g_2}{Pr} v_r \\
\int_0^{2\pi} \int_1^R v_z r dr d\varphi = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \\
v_r = v_\varphi = v_z = T = 0 \quad (r = 1, R) \\
\omega_1 = \frac{v_{0\varphi}}{r} = a + \frac{b}{r^2}, \quad g_1 = -\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) v_{0\varphi} = -2a \\
\omega_2 = \omega_1^2 r, \quad g_2 = 1/r
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Задача (2.2) записана в приближении Буссинеска ($\gamma\Theta_1 \ll 1$, [5]). Анализ его применимости для исследования линейной устойчивости неизотермического течения Куэтта выполнен в [11].

Будем предполагать далее, что возмущения $\mathbf{V}$, T и Π периодичны в аксиальном и азимутальном направлениях с заданными периодами соответственно $2\pi/\alpha$ и $2\pi/m$ (m – целое число). Тогда устойчивость течения (1.5) зависит от следующих семи безразмерных параметров: чисел Рейнольдса λ, Рэлея Ra и Прандтля Pr, отношений радиусов R и угловых скоростей Ω цилиндров, а также аксиального α и азимутального m волновых чисел.

Параметры Ra, Pr, R, α и m будем далее считать фиксированными. Тогда нейтральные кривые, отделяющие область устойчивости течения (1.5) от области его неустойчивости, представляют собой зависимости критических значений числа Рейнольдса λ от отношения угловых скоростей цилиндров Ω.

Пусть (Ω_*, λ_*) – точка на плоскости параметров (Ω, λ), отвечающая пересечению нейтральных кривых монотонной вращательно-симметричной и колебательной трехмерной потери устойчивости течения (1.5). Предположим, что λ близко к λ_*, а Ω – к Ω_*, так что $\delta_1 = \lambda - \lambda_*$ и $\delta_2 = \Omega - \Omega_*$ – малые параметры одного порядка.

Следуя [2-4], будем искать решение нелинейной задачи для возмущений (2.2) в виде

$$\mathbf{F} = \sqrt{|\delta_1|}(\mathbf{\Phi}+\mathbf{\Phi}^*), \quad \Pi = \sqrt{|\delta_1|}(P+P^*) \tag{2.3}$$

$$\mathbf{\Phi} = \eta_0(\xi)\mathbf{\Phi}_0(r,z) + e^{ic_* t}[\eta_1(\xi)\mathbf{\Phi}_1(r,\varphi,z) + \eta_2(\xi)\mathbf{\Phi}_2(r,\varphi,z)] + \ldots$$

$$P = \eta_0(\xi)p_0(r,z) + e^{ic_* t}[\eta_1(\xi)p_1(r,\varphi,z) + \eta_2(\xi)p_2(r,\varphi,z)] + \ldots$$

Здесь неизвестные комплексные амплитуды η_0, η_1, η_2 – функции "медленного" времени $\xi = |\delta_1|t$; c_* – неизвестная циклическая частота (фазовая скорость) нейтральных азимутальных волн; $\mathbf{\Phi}_0$, p_0 – собственное решение линеаризованной задачи устойчивости, соответствующей (2.2), для монотонных вращательно-симметричных возмущений; $\mathbf{\Phi}_1$, p_1 и $\mathbf{\Phi}_2$, p_2 – независимые собственные решения линеаризованной задачи устойчивости для колебательных трехмерных возмущений. При этом вектор $\mathbf{\Phi}_2$ получается инверсией (1.4) из вектора $\mathbf{\Phi}_1$, так что $\mathbf{\Phi}_2 = J\mathbf{\Phi}_1$. Величины порядков δ_1, δ_2 и выше в (2.3) опущены.

Амплитуды η_0, η_1, η_2 удовлетворяют следующей системе с кубическими ведущими нелинейными членами [2–4]:

$$\frac{d\eta_0}{d\xi} = (\sigma + A|\eta_0|^2 + B|\eta_1|^2 + B^*|\eta_2|^2)\eta_0 + D\eta_0^*\eta_1^*\eta_2$$

$$\frac{d\eta_1}{d\xi} = (\mu + P|\eta_0|^2 + Q|\eta_1|^2 + R|\eta_2|^2)\eta_1 + S\eta_0^{*2}\eta_2 \tag{2.4}$$

$$\frac{d\eta_2}{d\xi} = (\mu + P|\eta_0|^2 + R|\eta_1|^2 + Q|\eta_2|^2)\eta_2 + S\eta_0^2\eta_1$$

Амплитудная система (2.4) получена в [2] путем использования техники теории бифуркаций, связанной с применением теоремы о нейтральном многообразии, для широкого класса задач с цилиндрической симметрией. Она является обобщением известного амплитудного уравнения Ландау [5]. Аналогичная амплитудная система, соответствующая пересечению бифуркаций возникновения азимутальных волн с различными азимутальными волновыми числами, рассматривается в [12–14].

Коэффициенты системы (2.4) выражаются явно через решения серии линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными комплексными коэффициентами по формулам, которые приводятся в [3, 4]. При этом коэффициенты A, D являются вещественными, а B, P, Q, R, S – комплексными.

Вещественный инкремент σ и комплексный инкремент $\mu = \mu_r + i\mu_i$ при заданных δ_1 и δ_2 тоже могут быть вычислены. При этом μ_i оказывается одного порядка малости с δ_1 и δ_2. Учитывая это, можно считать σ и μ_r свободными параметрами.

Знаки параметров σ и μ_r определяют положение точки (Ω, λ), в которой строятся разложения (2.3), относительно нейтральных кривых монотонной и колебательной потери устойчивости неизотермического течения Куэтта. Если $\sigma > 0$, то значения отношения угловых скоростей цилиндров Ω и числа Рейнольдса λ таковы, что точка (Ω, λ) расположена выше нейтральной кривой, соответствующей монотонной потере устойчивости, а если $\sigma < 0$, то ниже. Если $\mu_r > 0$, то точка (Ω, λ) расположена выше нейтральной кривой, соответствующей колебательной потере устойчивости, а если $\mu_r < 0$, то ниже.

Следуя [2–4], представим комплексные амплитуды η_0, η_1, η_2 в полярной форме $\eta_0 = \rho_0 e^{i\psi_0}$, $\eta_1 = \rho_1 e^{i\psi_1}$, $\eta_2 = \rho_2 e^{i\psi_2}$. Для модулей амплитуд ρ_0, ρ_1, ρ_2 и фазового инварианта $\beta = 2\psi_0 + \psi_1 - \psi_2$ получаем следующую замкнутую систему, которая называется [2] моторной подсистемой амплитудной системы

$$\frac{d\rho_0}{d\xi} = [\sigma + A\rho_0^2 + B_r(\rho_1^2 + \rho_2^2)]\rho_0 + D\rho_0\rho_1\rho_2 \cos\beta$$

$$\frac{d\rho_1}{d\xi} = (\mu_r + P_r\rho_0^2 + Q_r\rho_1^2 + R_r\rho_2^2)\rho_1 + (S_r \cos\beta + S_i \sin\beta)\rho_0^2\rho_2$$

$$\frac{d\rho_2}{d\xi} = (\mu_r + P_r\rho_0^2 + R_r\rho_1^2 + Q_r\rho_2^2)\rho_2 + (S_r \cos\beta - S_i \sin\beta)\rho_0^2\rho_1 \tag{2.5}$$

$$\frac{d\beta}{d\xi} = C(\rho_1^2 - \rho_2^2) - 2D\rho_1\rho_2 \sin\beta - [S_i(\rho_1^2 - \rho_2^2)\cos\beta + S_r(\rho_1^2 + \rho_2^2)\sin\beta]\rho_0^2 / \rho_1\rho_2$$

$$C = 2B_i + Q_i - R_i$$

Здесь и далее индекс r означает вещественную, а i – мнимую части комплексной величины.

Уравнения для фаз ψ_0, ψ_1, ψ_2 отделяются, поэтому фазовые переменные могут быть найдены из соответствующей системы (она приводится в [4]) простым интегрированием, причем одну из них можно выразить через две другие и β.

Моторная подсистема (2.5) инвариантна относительно преобразования $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$, $\beta \to -\beta$ [4], что является следствием инвариантности задачи (1.1)–(1.3) относительно инверсии J, определенной в (1.4). Отсюда, в частности, вытекает, что решения системы (2.5) либо являются J-симметричными (переводятся в себя данным преобразованием), либо образуют J-связанные пары (переводятся друг в друга).

Таким образом, отыскание режимов, которые возникают в малой окрестности точки (Ω_*, λ_*) пересечения нейтральных кривых монотонной вращательно-симметричной и колебательной трехмерной потери устойчивости неизотермического течения Куэтта (1.5), сводится к нахождению решений моторной подсистемы (2.5) амплитудной системы (2.4).

3. Равновесия моторной подсистемы. Моторная подсистема (2.5) имеет следующие равновесия, лежащие на инвариантных плоскостях [3, 4].

Неизотермическое течение Куэтта

$$\rho_0 = \rho_1 = \rho_2 = 0, \quad \forall\beta \tag{3.1}$$

Этому тривиальному равновесию моторной подсистемы соответствует основной стационарный режим (1.5), в котором компоненты поля скорости, температура и давление зависят лишь от радиальной переменной r. Частицы жидкости в этом течении двигаются по концентрическим окружностям, центры которых лежат на общей оси цилиндров.

Вихри Тейлора

$$\rho_0^2 = -\sigma / A, \quad \rho_1 = \rho_2 = 0, \quad \forall\beta \tag{3.2}$$

Это – вторичное стационарное вращательно-симметричное течение, в котором компоненты поля скорости, температура и давление зависят лишь от радиальной и аксиальной переменных r и z. Это течение $2\pi/\alpha$ периодично в аксиальном направлении. Оно представляет собой набор тороидальных вихрей, регулярно расположенных вдоль оси цилиндров. Частицы жидкости в этом течении двигаются по спиралям, наматывающимся на торы. Направления вращения частиц в соседних вихрях – противоположные.

Чистые азимутальные волны

$$\rho_0 = 0, \quad \rho_1^2 = \rho_2^2 = -\mu_r / (Q_r + R_r), \quad \forall\beta \tag{3.3}$$

Это – вторичный автоколебательный (периодический по времени) режим, не обладающий свойством вращательной симметрии. Компоненты поля скорости, температура и давление этого течения зависят от радиальной и аксиальной переменных r и z, а также от линейной комбинации $m\varphi - ct$ времени t и азимутальной переменной φ. В этом режиме волны с постоянной фазовой скоростью c распространяются в азимутальном направлении. Это течение периодично по z и φ с периодами соответственно $2\pi/\alpha$ и $2\pi/m$.

Пара спиральных волн

$$\rho_0 = \rho_2 = 0, \quad \rho_1^2 = -\mu_r / Q_r, \quad \forall\beta \tag{3.4}$$

$$\rho_0 = \rho_1 = 0, \quad \rho_2^2 = -\mu_r / Q_r, \quad \forall\beta \tag{3.5}$$

Это – пара вторичных автоколебательных режимов, не обладающих свойством вращательной симметрии. Компоненты поля скорости, температура и давление этих двух течений зависят от r, а также от линейных комбинаций $m\varphi - ct + \alpha z$ (для одного режима) и $m\varphi - ct - \alpha z$ (для другого режима). В этих режимах волны с постоянной фазовой скоростью c распространяются по спиралям – в азимутальном и аксиальном направлениях, причем направления движения волн в аксиальном направлении у этих течений противоположные. Эта пара режимов является инверсионно-связанной: преобразование инверсии J (см. (1.4)) переводит их друг в друга. Эти течения периодичны по z и φ с периодами соответственно $2\pi/\alpha$ и $2\pi/m$.

Пара смешанных азимутальных волн

$$\rho_0^2 = \frac{\Delta_1^+}{\Delta^+}, \quad \rho_1^2 = \rho_2^2 = \frac{\Delta_2^+}{\Delta^+}, \quad \beta = 0 \tag{3.6}$$

$$\rho_0^2 = \frac{\Delta_1^-}{\Delta^-}, \quad \rho_1^2 = \rho_2^2 = \frac{\Delta_2^-}{\Delta^-}, \quad \beta = \pi \tag{3.7}$$

$$\Delta_1^+ = \sigma(Q_r + R_r) - \mu_r(2B_r + D), \quad \Delta_2^+ = \mu_r A - \sigma(P_r + S_r)$$

$$\Delta_1^- = \sigma(Q_r + R_r) - \mu_r(2B_r - D), \quad \Delta_2^- = \mu_r A - \sigma(P_r - S_r)$$

$$\Delta^+ = (2B_r + D)(P_r + S_r) - A(Q_r + R_r)$$

$$\Delta^- = (2B_r - D)(P_r - S_r) - A(Q_r + R_r)$$

Это – пара третичных автоколебательных режимов, не обладающих свойством вращательной симметрии. Они представляют собой нелинейную смесь вихрей Тейлора и чистых азимутальных волн. Компоненты поля скорости, температура и давление этих течений зависят от r и z, а также от линейной комбинации $m\varphi - ct$. В этих режимах волны с постоянной фазовой скоростью распространяются в азимутальном направлении на фоне вихрей Тейлора. Эти течения периодичны по z и φ с периодами соответственно $2\pi/\alpha$ и $2\pi/m$.

Помимо равновесий (3.1)–(3.7) у системы (2.5) могут существовать равновесия, которые не лежат на инвариантных плоскостях, т.е. равновесия общего положения [3, 4]. Они образуют J-связанные пары. Каждому из них соответствует квазипериодическое двухчастотное решение амплитудной системы (2.4), поскольку интегрирование уравнений для фаз ψ_0, ψ_1, ψ_2 дает, вообще говоря, три частоты, но эти частоты не являются независимыми, так как для равновесия моторной подсистемы фазовый инвариант $\beta = 2\psi_0 + \psi_1 - \psi_2 = \text{const}$. В итоге получается, что равновесию общего положения соответствует квазипериодическое двухчастотное решение как амплитудных уравнений (2.4), так и исходных уравнений движения жидкости (1.1)–(1.3).

Для отыскания равновесия общего положения запишем стационарную систему, соответствующую системе (2.5), в виде

$$\sigma + A\rho_0^2 + B_r(\rho_1^2 + \rho_2^2) = -D\rho_1\rho_2\cos\beta$$

$$2S_r\cos\beta = 2(Q_r - R_r)\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_0^2} - \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{\rho_1\rho_2}x, \quad 2S_i\sin\beta = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_1\rho_2}x \tag{3.8}$$

$$\left[(S_r^2 + S_i^2)\frac{\rho_0^2(\rho_1^2 + \rho_2^2)}{\rho_1^2\rho_2^2} + 2S_rD\right]x = 2S_i[S_i(Q_r - R_r) - S_rC]$$

$$x = \frac{1}{\rho_0^2}[\mu_r + P_r\rho_0^2 + Q_r(\rho_1^2 + \rho_2^2)]$$

Исключая в (3.8) переменную β и используя дополнительное уравнение, порожденное основным тригонометрическим тождеством, редуцируем трансцендентную систему (3.8) к алгебраическому уравнению четвертой степени

$$A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0 \tag{3.9}$$

Коэффициенты A_j уравнения (3.9) выражаются через коэффициенты амплитудной системы (2.4)

$$A_j = \sigma B_j + \mu_r C_j \quad (j = 0, 1, \ldots, 4)$$

$$B_4 = D^2$$

$$B_3 = D[2Q_rS_r + 2S_iC - DP_r]$$

$$B_2 = S_i[S_i(C^2 + R_r^2 - Q_r^2) + 2C(Q_rS_r - DP_r)]$$

$$B_1 = S_i^2[2DQ_rS_r - P_r(C^2 + (R_r - Q_r)^2)]$$

$$B_0 = 2S_i^3Q_r[S_rC + S_i(R_r - Q_r)]$$

$$C_4 = D^2, \; C_3 = D[AD + S_iC - 2B_rS_r - S_r(R_r - Q_r)]$$

$$C_2 = S_i[D(DS_i + 2AC) - 2B_r(S_rC + S_i(R_r - Q_r))]$$

$$C_1 = S_i^2[A(C^2 + (R_r - Q_r)^2) + D(S_iC - 2B_rS_r - S_r(R_r - Q_r))]$$

$$C_0 = -2S_i^3B_r[S_rC + S_i(R_r - Q_r)]$$

Введем обозначения

$$y = \frac{\sigma + A\rho_0^2 + B_r(\rho_1^2 + \rho_2^2)}{\rho_1^2 + \rho_2^2}, \quad z = \frac{\rho_0^2(\rho_1^2 + \rho_2^2)}{\rho_1^2\rho_2^2} \tag{3.10}$$

Из первого, второго и четвертого уравнений системы (3.8) получаем тогда соотношения

$$(Dx - 2S_ry)z = 2D(Q_r - R_r) \tag{3.11}$$

$$[(S_r^2 + S_i^2)z + 2S_rD]x = 2S_i[S_i(Q_r - R_r) - S_rC]$$

Когда решение x уравнения (3.9) найдено, формулы (3.11) позволяют найти значения z и y. После этого модули амплитуд ρ_0, ρ_1, ρ_2 находятся из уравнений (3.10) и последнего уравнения системы (3.8), а фазовый инвариант β – из третьего уравнения этой системы. При этом равновесия моторной подсистемы порождаются лишь такими

Таблица 1

Параметры	$\alpha = 2$	3	4	4	5
Ω_*	–0.4211	–0.4214	–0.4800	–0.6688	–0.8867
λ_*	127.857	102.134	106.300	146.732	187.330
c_*	0.2580	0.2812	0.3056	0.3420	0.3413
A	–2634.5	–3785.2	–1841.6	–4919.6	–1088.2
B_r	–457.1	–451.5	–311.9	12.4	3549.3
B_i	81.1	687.0	225.8	1546.5	9340.1
D	543.5	–925.0	445.8	–582.6	1660.8
P_r	–1031.1	–1004.3	–1210.3	–4827.9	–21998.9
P_i	–74.5	–1560.3	–377.0	1202.4	26586.0
Q_r	–194.3	–267.4	–288.5	–2911.8	62982706.5
Q_i	–1786.7	–234.4	-216.9	1407.3	57508235.0
R_r	–46.5	-2654.5	–450.7	–1850.5	–146708.9
R_i	–128.6	2194.2	179.9	9524.0	–874592.9
S_r	103.2	–4232.0	–274.2	–4143.6	–113291.8
S_i	–346.6	3745.2	314.0	21181.5	–141629.9

Таблица 2

Пара-метры	$\alpha = 2$	2	3	3	4	4	5
Ω_*	0.0674	–0.3451	0.0008	–0.3152	–0.0273	–0.3070	–0.0369
λ_*	107.234	119.089	79.536	91.482	79.575	88.613	89.015
c_*	0.3477	0.2491	0.3171	0.2581	0.3091	0.2673	0.3129
A	6110.4	646873.4	5229.0	–2047.9	15040.1	–985.3	–73027.8
B_r	2118.4	–86261.7	2067.0	–830.1	6871.4	–871.9	–38078.2
B_i	–228.6	8529.2	–267.8	773.8	–1106.7	372.6	5883.2
D	1874.9	265067.1	1456.6	–2220.2	6993.9	–2500.6	–46602.8
P_r	–2654.0	–818.1	–827.0	–419.2	–646.1	–417.0	–729.2
P_i	–380.5	–295.2	–198.1	–230.8	–161.2	–194.0	–197.4
Q_r	–758.1	78.5	–255.6	–96.3	–182.0	–66.3	–180.4
Q_i	–278.3	–455.0	–91.5	–129.7	–64.5	–88.5	–63.4
R_r	–1142.4	–112.2	–426.0	–231.7	–308.4	–164.2	–318.2
R_i	–499.8	–348.2	–117.8	216.9	–99.5	22.8	–110.4
S_r	–183.3	–177.8	–123.5	–285.2	–133.9	–251.2	–180.5
S_i	65.3	–633.9	31.2	229.9	11.3	–3.8	–10.9

корнями уравнения (3.9), которые являются вещественными и обеспечивают выполнение неравенств

$$z > 0, \quad |\sin\beta| < 1, \quad |\cos\beta| < 1 \tag{3.12}$$

Каждому вещественному корню уравнения (3.9), для которого неравенства (3.12) выполняются, соответствует J-связанная пара равновесий общего положения моторной подсистемы (2.5). Всего, таким образом, у моторной подсистемы может существовать не более четырех пар равновесий общего положения.

Для отыскания корней уравнения (3.9) использовались формулы Феррари.

Исследование устойчивости найденных равновесий общего положения моторной подсистемы осуществлялось с помощью первого метода Ляпунова. Для этого система (2.5) линеаризовалась на равновесии общего положения и выписывалось соответствующее характеристическое уравнение в виде равенства нулю определителя четвертого порядка, элементы которого зависят от ρ_0, ρ_1, ρ_2 и β. Определитель раскрывался аналитически. В результате вопрос об устойчивости J-связанной пары равновесий общего положения (равновесия, составляющие такую пару, могут быть устойчивыми или неустойчивыми лишь одновременно) сводился к выяснению знаков вещественных частей корней полинома четвертой степени. Эти вычисления проводились по формулам Феррари.

4. Численные результаты. Расчет нейтральных кривых проводился методом пристрелки. Для вычисления коэффициентов амплитудной системы (2.4) использовался алгоритм, изложенный в [3, 4]. Программы, реализующие эти расчеты, были составлены на языке Турбо Паскаль. Вычисления проводились на компьютере IBM PC Pentium-100 для случая, когда радиус внешнего цилиндра в 2 раза превосходит радиус внутреннего цилиндра $R = 2$, полость между цилиндрами заполнена водой $\mathrm{Pr} = 7$ и азимутальное волновое число $m = 1$, при различных значениях числа Рэлея Ra и аксиального волнового числа α.

Результаты расчета точек пересечения нейтральных кривых и коэффициентов амплитудной системы представлены в табл. 1 (случай $\mathrm{Ra} = 1$) и табл. 2 ($\mathrm{Ra} = -1$). Аналогичные вычисления для изотермического случая ($\mathrm{Ra} = 0$) были выполнены в [3, 4], а для проницаемых цилиндров – в [15].

Вычисления показали, что в зависимости от значений параметров задачи нейтральные кривые монотонной вращательно-симметричной и колебательной трехмерной потери устойчивости неизотермического течения Куэтта (1.5) могут вообще не иметь точек пересечения, а могут пересекаться в одной или нескольких точках. Основное качественное отличие от изотермического случая состоит в том, что при подогреве внутреннего цилиндра ($\mathrm{Ra} < 0$) нейтральные кривые могут пересекаться не только, когда цилиндры вращаются в разные стороны, но и когда они вращаются в одну сторону.

При достаточно больших отрицательных градиентах температуры $\mathrm{Ra} < 0$ и достаточно больших аксиальных волновых числах α нейтральные кривые не пересекаются. Это свидетельствует о том, что при интенсивном подогреве внутреннего цилиндра коротковолновые в аксиальном направлении возмущения, порождающие вихри Тейлора и азимутальные волны, не взаимодействуют. Следовательно, при соответствующих значениях параметров задачи трудно ожидать возникновения сложных режимов движения жидкости. Напротив, при подогреве внешнего цилиндра ($\mathrm{Ra} > 0$) точки пересечения нейтральных кривых существуют (по крайней мере, при не слишком больших α), а значит, вблизи них нелинейное взаимодействие тейлоровской и азимутальных мод может приводить к возникновению сложных режимов.

На фигуре изображена схема переходов, связанных с бифуркациями равновесий моторной подсистемы (2.5) при изменении свободного параметра μ_r, для случая $\mathrm{Ra} = 1$, $\alpha = 4$, $\Omega_* = -0.6688$, $\sigma = 10$ и $\mu_r > 0$ (значения отношения угловых скоростей цилиндров Ω и числа Рейнольдса λ таковы, что точка (Ω, λ) расположена выше нейтральных кривых, соответствующих как монотонной, так и колебательной потере устойчивости неизотермического течения Куэтта). Одинарными линиями нарисованы J-симметричные равновесия, двойными – J-связанные пары равновесий. Устойчивые равновесия изображены сплошными линиями, неустойчивые – штриховыми. Лежащие на инвариантных плоскостях равновесия (3.1)–(3.7) отмечены соответственно цифрами 1–7, а J-связанные пары равновесий общего положения – цифрами 8–9 (в рассматриваемом случае существует не более двух пар таких равновесий). Кружками отмечены точки, в которых от равновесий ответвляются предельные циклы – изолированные периодические решения моторной подсистемы (каждому такому решению соответствует, вообще говоря, трехчастотный квазипериодический режим движения жидкости). Бифуркационные значения параметра μ_r представлены ниже:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
μ_r^n	0	1.39	18.24	62.72	82.12	82.60	85.38	118.75	186.29

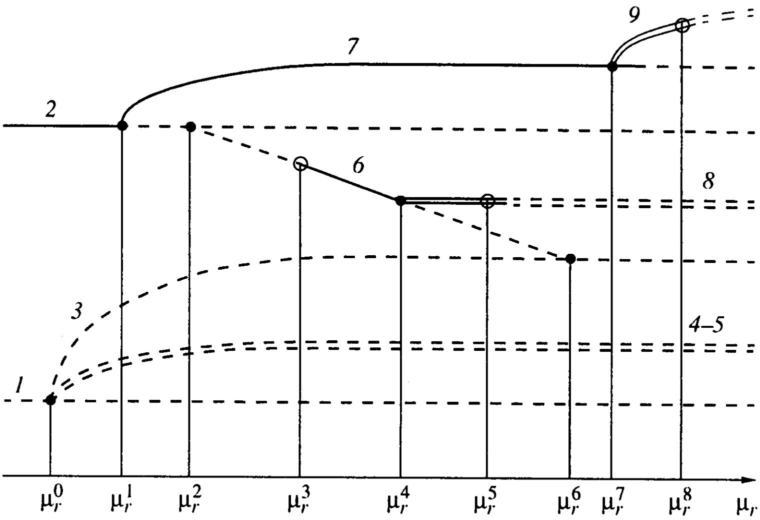

Схема бифуркаций равновесий моторной подсистемы при Ra = 1, $\alpha = 4$, $\Omega = -0.6688$, $\sigma = 10$, $\mu_r > 0$. Цифры *1–7* соответствуют равновесиям (3.1)–(3.7), а цифры *8–9* – равновесиям общего положения. Устойчивые равновесия изображены сплошными линиями, неустойчивые – штриховыми. Одинарные линии соответствуют J-симметричным равновесиям, двойные – J-связанным парам равновесий

Неизотермическое течение Куэтта (3.1) существует при любых значениях свободного параметра μ_r и неустойчиво (так как $\sigma > 0$).

Вихри Тейлора (3.2) также существуют при любых μ_r. Они ответвляются от неизотермического течения Куэтта при $\sigma = 0$, поэтому данную бифуркацию изобразить на фигуре, относящейся к случаю $\sigma = 10$, невозможно. При $\mu_r < 1.39$ вихри Тейлора устойчивы, а при $\mu_r > 1.39$ неустойчивы. При $\mu_r = 1.39$ вихри Тейлора мягко теряют устойчивость, в результате чего от них ответвляются устойчивые смешанные азимутальные волны (3.7). При $\mu_r = 18.24$ от неустойчивых вихрей Тейлора ответвляются неустойчивые смешанные азимутальные волны (3.6).

Чистые азимутальные волны (3.3) ответвляются от неизотермического течения Куэтта (3.1) при $\mu_r = 0$, существуют при $\mu_r \geqslant 0$ и неустойчивы. При $\mu_r = 85.38$ на них гибнут неустойчивые смешанные азимутальные волны (3.6).

J-связанная пара спиральных волн (3.4)–(3.5) ответвляется от неизотермического течения Куэтта (3.1) при $\mu_r = 0$, существует при $\mu_r \geqslant 0$, неустойчива и не бифурцирует.

Смешанные азимутальные волны (3.6) существуют при $18.24 \leqslant \mu_r \leqslant 85.38$. Они рождаются неустойчивыми при $\mu_r = 18.24$, ответвляясь от неустойчивых вихрей Тейлора, и гибнут неустойчивыми при $\mu_r = 85.38$, сливаясь с неустойчивыми чистыми азимутальными волнами. При $18.24 \leqslant \mu_r < 62.72$ и при $82.12 < \mu_r \leqslant 85.38$ они неустойчивы, а при $62.72 < \mu_r < 82.12$ устойчивы. При $\mu_r = 62.72$ они приобретают устойчивость в результате бифуркации рождения неустойчивого J-симметричного предельного цикла моторной подсистемы, который существует при $\mu_r \geqslant 62.72$. При $\mu_r = 82.12$ смешанные азимутальные волны (3.6) опять становятся неустойчивыми в результате мягкого ответвления устойчивой J-связанной пары равновесий общего положения. Результаты расчета одного из равновесий этой пары представлены в табл. 3.

Таблица 3

μ_r	ρ_0	ρ_1	ρ_2	β	Устойчивость
82.13	0.0099	0.1307	0.1305	0.0121	+
82.50	0.0099	0.1316	0.1302	0.0952	+
82.60	0.0100	0.1318	0.1302	0.1070	–
83.00	0.0100	0.1324	0.1302	0.1449	–
85.00	0.0101	0.1349	0.1308	0.2599	–
100	0.0110	0.1489	0.1392	0.6060	–
200	0.0156	0.2146	0.1925	1.1500	–
500	0.0248	0.3409	0.3028	1.4114	–
1000	0.0352	0.4825	0.4279	1.4953	–
5000	0.0788	1.0794	0.9567	1.5621	–
10000	0.1115	1.5266	1.3530	1.5704	–
100000	0.3526	4.8275	4.2787	1.5779	–

Таблица 4

μ_r	ρ_0	ρ_1	ρ_2	β	Устойчивость
119	0.0708	0.1612	0.1498	3.1096	+
120	0.0706	0.1680	0.1425	3.0705	+
150	0.0673	0.2119	0.0977	2.8672	+
200	0.0660	0.2505	0.0768	2.7989	–
300	0.0660	0.3112	0.0605	2.7633	–
500	0.0678	0.4060	0.0483	2.7482	–
1000	0.0732	0.5789	0.0392	2.7422	–
5000	0.1081	1.3032	0.0378	2.7402	–
10000	0.1401	1.8446	0.0448	2.7402	–
100000	0.4032	5.8377	0.1173	2.7401	–

Смешанные азимутальные волны (3.7) существуют при $1.39 \leqslant \mu_r < \infty$. Они рождаются устойчивыми при $\mu_r = 1.39$ в результате мягкой потери устойчивости вихрей Тейлора. При $\mu_r = 118.75$ они теряют устойчивость в результате мягкого ответвления устойчивой J-связанной пары равновесий общего положения (см. табл. 4).

J-связанная пара равновесий общего положения (табл. 3), возникающая в результате мягкой потери устойчивости смешанных азимутальных волн (3.6), существует в диапазоне $82.12 \leqslant \mu_r < \infty$, но остается устойчивой лишь вблизи точки своего возникновения. Уже при $\mu_r = 82.6$ она теряет устойчивость в результате бифуркации рождения неустойчивой J-связанной пары предельных циклов, которая существует при $\mu_r \leqslant 82.6$.

Еще одна J-связанная пара равновесий общего положения (табл. 4), возникающая в результате мягкой потери устойчивости смешанных азимутальных волн (3.7), существует в диапазоне $118.75 \leqslant \mu_r < \infty$. При $\mu_r = 186.29$ она теряет устойчивость в результате бифуркации рождения устойчивой J-связанной пары предельных циклов, которая существует при $\mu_r \geqslant 186.29$.

Других бифуркаций равновесий моторной подсистемы в рассматриваемом случае нет.

В диапазоне $62.72 \leqslant \mu_r \leqslant 82.6$ одновременно существует несколько устойчивых равновесий моторной подсистемы, поэтому для значений свободного параметра μ_r, принадлежащих данному диапазону, в экспериментах могут наблюдаться гистерезисные явления. При достаточно больших значениях μ_r ни одно равновесие моторной подсистемы не является устойчивым, поэтому для больших μ_r в экспериментах следует ожидать возникновения достаточно сложных режимов движения жидкости.

Разнообразие описанных выше переходов, связанных с бифуркациями равновесий моторной подсистемы, объясняется в первую очередь тем, что для рассмотренных значений параметров задачи имеет место нелинейное взаимодействие вторичных режимов – вихрей Тейлора (3.2), чистых азимутальных волн (3.3) и пары спиральных волн (3.4), (3.5).

Если же значения свободных параметров σ и μ_r таковы, что вторичные режимы не взаимодействуют, то картина переходов в моторной подсистеме становится совершенно тривиальной. Так, например, в случае, когда $\mathrm{Ra} = -1$, $\alpha = 2$, $\Omega_* = 0.0674$ и $\sigma > 0$, из всех равновесий моторной подсистемы существуют лишь неустойчивое неизотермическое течение Куэтта (3.1) и ответвляющиеся от него при $\mu_r = 0$ вторичные режимы – чистые азимутальные волны (3.3) и пара спиральных волн (3.4)–(3.5), причем эти вторичные режимы существуют только при $\mu_r \geqslant 0$, неустойчивы и не бифурцируют. Столь простое поведение равновесий моторной подсистемы отнюдь не означает, что для указанных значений параметров задачи в экспериментах будет наблюдаться тривиальное поведение жидкости. Наоборот, отсутствие в рассматриваемом случае устойчивых равновесий моторной подсистемы позволяет предположить, что в экспериментах могут возникать весьма непростые режимы движения жидкости, возможно, турбулентные.

Заключение. Задача об исследовании движений вязкой теплопроводной жидкости вблизи пересечения бифуркаций возникновения неизотермических вихрей Тейлора и азимутальных волн между двумя нагретыми вращающимися цилиндрами сводится к изучению автономной динамической системы четвертого порядка, коэффициенты которой находятся численно, путем решения серии линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вычисления на компьютере показали, что в данной задаче нелинейное взаимодействие вторичных режимов может приводить к возникновению достаточно нетривиальной картины переходов, связанных с бифуркациями равновесий изучаемой динамической системы. Каждому такому равновесию соответствуют стационарное, периодическое или двухчастотное квазипериодическое течение жидкости. Поэтому можно ожидать, что при соответствующих значениях параметров задачи достаточно сложные и разнообразные переходы от одного режима движения жидкости к другому могут наблюдаться и в экспериментах.

Авторы благодарят В.И. Юдовича за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колесов В.В.* Устойчивость неизотермического течения Куэтта // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 1. С. 167–170.
2. *Юдович В.И.* Переходы и возникновение хаоса в течениях жидкости // Аннот. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент: Фан, 1986. 661 с.
3. *Колесов В.В., Юдович В.И.* Переходы в малой окрестности точек пересечения бифуркаций возникновения вихрей Тейлора и азимутальных волн. Ростов н/Д, 1995. 33 с. – Деп. в ВИНИТИ 14.11.95. № 3020-B95.
4. *Колесов В.В., Юдович В.И.* Расчет колебательных режимов в течении Куэтта вблизи точки пересечения бифуркаций возникновения вихрей Тейлора и азимутальных волн // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 4. С. 81–93.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
6. *Walowit J.A.* The stability of Couette flow between rotating cylinders in the presence of a radial temperature gradient // AIChE Journal. 1966. V. 12. № 1. P. 104–109.
7. *Колесов В.В.* Возникновение вихрей Тейлора между нагретыми вращающимися цилиндрами // ПМТФ. 1981. № 6. С. 87–93.

8. *Колесов В.В.* Расчет автоколебаний, возникающих в результате потери устойчивости неизотермического течения Куэтта // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 25–32.
9. *Колесов В.В.* Колебательная вращательно-симметричная потеря устойчивости неизотермического течения Куэтта // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 76–80.
10. *Колесов В.В.* Возникновение плоского вторичного режима между нагретыми вращающимися цилиндрами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 6. С. 22–27.
11. *Жуков М.Ю., Колесов В.В., Цывенкова О.А.* Численный анализ устойчивости неизотермического течения Куэтта // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 70–76.
12. *Chossat P., Demay Y., Iooss G.* Interaction de modes azimutaux dans le probleme de Couette–Taylor // Arch. Ration. Mech. Anal. 1987. V. 99. № 3. P. 213–248.
13. *Chossat P., Iooss G.* Primary and secondary bifurcations in the Couette–Taylor problem // Japan. J. App. Math. 1985. V. 2. № 1. P. 37–68.
14. *Chossat P., Iooss G.* The Couette–Taylor problem. Berlin ets.: Springer, 1994. 233 p.
15. *Kolesov V., Shapakidze L.* On oscillatory modes in viscous incompressible liquid flows between two counter-rotating permeable cylinders // Trends in App. Math. to Mech. Chapman and Hall / CRC. 2000. V. 106. P. 221–227.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
1.VI.2001