

УДК 532.529–2

© 2002 г. М.Н. ГАЛИМЗЯНОВ, И.К. ГИМАЛТДИНОВ, В.Ш. ШАГАПОВ

ДВУМЕРНЫЕ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПУЗЫРЬКИ

Изучаются особенности эволюции волн в жидкости, в которой находится пузырьковая зона конечных размеров. В связи с этим обстоятельством учитываются двумерные эффекты. Также представлены результаты по эволюции двумерных волн в однородной пузырьковой жидкости.

К настоящему времени одномерные волны в пузырьковой жидкости достаточно подробно изучены [1, 2]. В данной работе рассмотрены волны в жидкости, в которой находится пузырьковая зона конечных размеров. В связи с этим обстоятельством учитываются двумерные эффекты. Представлены также результаты по динамике двумерных волн в кусочно-неоднородной по объемному содержанию пузырьков области и результаты расчетов по эволюции колоколообразного по поперечной координате волнового импульса в однородной пузырьковой жидкости.

1. Постановка задачи. Пусть в канале, который заполнен жидкостью, находится пузырьковая зона, ограниченная в общем случае цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси z (продольные размеры зоны значительно больше, чем поперечные размеры) (фиг 1). Рассмотрим двумерные волновые возмущения. Такие возмущения могут реализовываться, например, под действием плоского удара по жидкости, в которой находится пузырьковая зона конечных размеров, или воздействием на систему граничным давлением, неоднородным по координате y ($p = p^0(t, y)$ при $x = x_0$).

При описании движения пузырьковой жидкости будем полагать: в каждом элементарном объеме все пузырьки сферические и одного радиуса, вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия, и в частности при пульсации пузырьков, отсутствует дробление и слипание пузырьков.

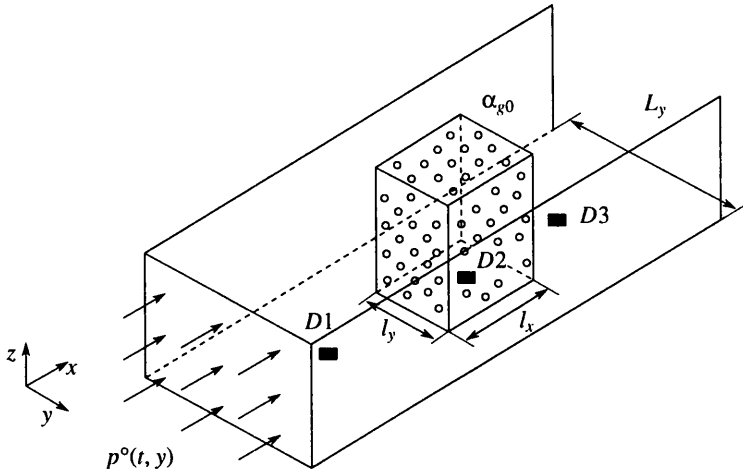
На основе вышеприведенных допущений примем систему макроскопических уравнений масс, числа пузырьков, импульсов и давления в пузырьках в односкоростном приближении [1]

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} + \rho_i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \quad (i = l, g), \quad \frac{dn}{dt} + n \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \\ \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial x} &= 0, \quad \rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial y} = 0, \quad \frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma - 1)}{a_0} q \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$w = \frac{da}{dt} \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\alpha_l + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi a^3 n, \quad \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \rho = \rho_g + \rho_l$$

где a – радиус пузырьков, γ – показатель адиабаты для газа, p_i – давления фаз, ρ_i^0 – истинные плотности фаз, α_i – объемные содержания фаз, q – интенсивность



Фиг. 1. Схематическое изображение расчетной области, l_x, l_y – характерные линейные размеры пузырьковой зоны, L_y – ширина канала. D_1, D_2, D_3 – датчики давления (1–3)

теплообмена, n – число пузырьков в единице объема, w – радиальная скорость пузырьков. Скорости u и v соответствуют движению по координатам x и y . Нижними индексами $i = l, g$ отмечены параметры жидкой и газовой фаз.

При описании радиального движения в соответствии с уточнением, предложенным в [3], будем полагать, что $w = w_R + w_A$, где w_R описывается уравнением Рэлея – Ламба, а w_A определяется из решения задачи о сферической разгрузке на сфере радиуса a в несущей жидкости в акустическом приближении:

$$a \frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2} w_R^2 + 4\nu_l \frac{w_R}{a} = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0} \quad (1.2)$$

$$w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}} \quad (1.3)$$

где ν_l – вязкость жидкости, C_l – скорость звука в жидкости ($C_l = 1500$ м/с).

Будем полагать, что жидкость является акустически сжимаемой, а газ калорически совершенным

$$p_l = p_0 + C_l^2 (\rho_l^0 - \rho_{l0}^0), \quad p_g = \rho_g^0 R T_g \quad (1.4)$$

где R – газовая постоянная. Здесь и в дальнейшем индексами 0 внизу снабжены параметры, относящиеся к начальному невозмущенному состоянию.

Тепловой поток q задается приближенным конечным соотношением

$$q = Nu \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a}, \quad \frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^3$$

$$Nu = \sqrt{Pe}, \quad Pe \geq 100, \quad Nu = 10, \quad Pe < 100$$

$$Pe = 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a |w|}{\kappa_g}, \quad \kappa_g = \frac{\lambda_g}{C_g \rho_g^0}$$

где $T_0 = \text{const}$ – температура жидкости, λ_g – теплопроводность, Nu – число Нуссельта.

Принятая система уравнений позволяет адекватно описывать динамику волн с достаточно "крутыми" участками, когда сжатие пузырьков определяется не только эффектами радиальной инерции несущей жидкости, но и акустической разгрузкой на пузырьках и, следовательно, сжимаемостью жидкости. Кроме того, из этой математической модели в частном случае при $\alpha_g = 0$ следует волновое уравнение для акустической сжимаемой жидкости. При исследовании взаимодействия волн в "чистой" жидкости с пузырьковой областью это обстоятельство в свою очередь позволяет использовать сквозные методы расчета.

2. Метод численного расчета. Для численного анализа задачи об эволюции волн в жидкости при наличии в ней пузырьковой области удобнее пользоваться системой уравнений, приведенной в разд. 1, записанной в лагранжевых переменных. Это, в частности, связано с тем, что в лагранжевых координатах пузырьковая область неподвижна. Из уравнений (1.1), после некоторых преобразований, можно получить следующую систему в лагранжевых переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho J} \left(\frac{\partial p_l}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial p_l}{\partial y_0} \frac{\partial x}{\partial x_0} \right), \quad \frac{\partial x}{\partial t} = u \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho J} \left(\frac{\partial p_l}{\partial y_0} \frac{\partial x}{\partial x_0} - \frac{\partial p_l}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} \right), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v \\ \frac{\partial p_l}{\partial t} &= \frac{C_l^2 \rho_l^0}{1 - \alpha_g} \left[\frac{3\alpha_g}{a} w + \left(\frac{\alpha_g}{J} + \frac{\rho_{l0}}{J^2 \rho_l^0} \right) \frac{\partial J}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= \frac{3\alpha_g}{a} w - \frac{\alpha_g}{J} \frac{\partial J}{\partial t}, \quad \frac{\partial p_g}{\partial t} = -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= w = w_R + w_A \\ \frac{\partial w_R}{\partial t} &= \left[\frac{p_g - p_l}{\rho_l^0} - \frac{3}{2} w_R^2 - 4v_l \frac{w_R}{a} \right] \frac{1}{a}, \quad w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}} \\ \left(J = \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial u}{\partial y_0} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial v}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где x_0 и y_0 – лагранжевые переменные, в качестве которых берутся начальные эйлеровы координаты, J – якобиан перехода от лагранжевых к эйлеровым переменным.

Система (2.1) решается численно по явной схеме. Причем не требуется вводить искусственную вязкость, поскольку приведенные уравнения из-за учета межфазного теплообмена и акустической разгрузки являются системой с естественной диссипацией.

Приведем принцип построения разностной схемы, которая принята для решения данной задачи. Для аппроксимации дифференциальных уравнений используем равномерную шахматную сетку

$$(x_{0i}, y_{0j}, t_k), \quad (x_{0i+1/2}, y_{0j+1/2}, t_k)$$

$$x_{0i+1} = x_{0i} + h_{x_0}, \quad x_{0i+1/2} = x_{0i} + 0.5h_{x_0}, \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - 1$$

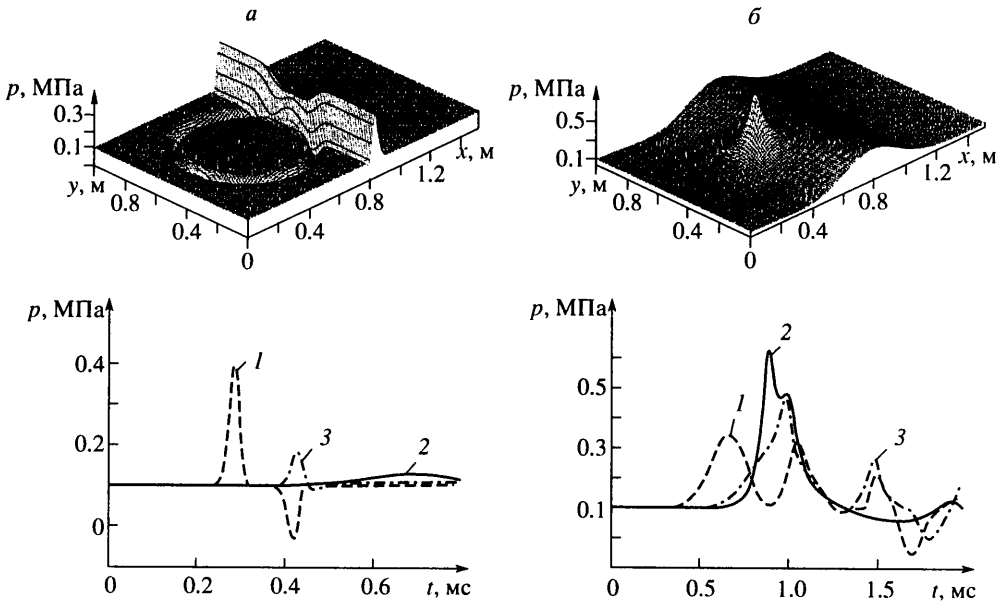
$$y_{0j+1} = y_{0j} + h_{y_0}, \quad y_{0j+1/2} = y_{0j} + 0.5h_{y_0}, \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1$$

$$x_{00} = 0, \quad x_{0N_1} = L_x$$

$$y_{00} = 0, \quad y_{0N_2} = L_y$$

$$t_{k+1} = t_k + \tau, \quad t_k = k\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

где h_{x_0} , h_{y_0} и τ – соответственно шаги по координатам X , Y и по времени. К узлам сетки



Фиг. 2. Распространение импульса в жидкости при наличии пузырьковой завесы конечных размеров ($\alpha_{g0}^1 = 10^{-2}$). Расчетные осциллограммы 1–3 для датчиков 1–3 при $t_* = 10^{-4}$ (а) и 10^{-3} с (б). Эпюры давления в моменты $t = 6 \cdot 10^{-4}$ (а) и 10^{-3} с (б)

(x_{0i}, y_{0j}, t_k) будем относить сеточные функции скоростей u_{ij}^k, v_{ij}^k и эйлеровых переменных x_{ij}^k и y_{ij}^k , к "полуцелым" точкам ($x_{0i+1/2}, y_{0j+1/2}, t_k$) – сеточные функции всех остальных параметров. Такая аппроксимация обеспечивает устойчивость решения волновых задач в однофазных системах (жидкостях и газах) конечно-разностным методом [4].

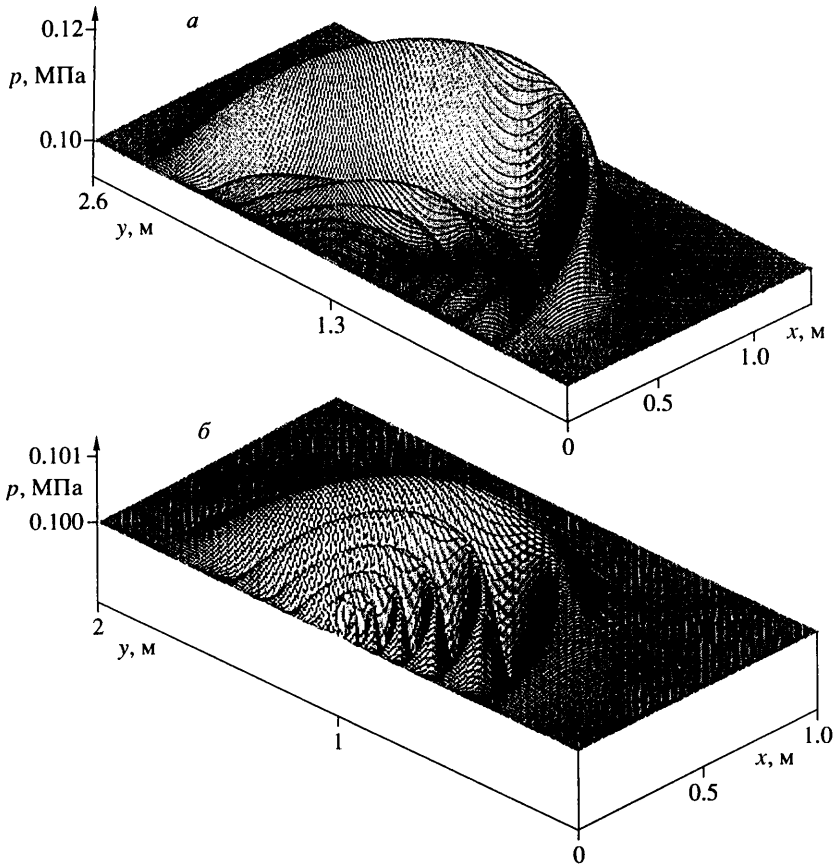
Расчетная область полагается прямоугольной и на ее границах ($x_0 = 0, x_0 = L_x, 0 < y_0 < L_y; y_0 = 0, y_0 = L_y, 0 < x_0 < L_x$) в расчетах приняты условия, как на жесткой стенке. Расчетная область взята достаточно широкой, чтобы вторичные сигналы, образованные отражением от "стенки" области, в период взаимодействия волнового импульса с завесой не сказывались.

3. Результаты численных расчетов. Ниже иллюстрируются результаты численного эксперимента по эволюции волнового импульса, заданного в виде

$$p^0(t, y) = p_0 + \Delta p_0 \exp[\psi(t_*)], \quad \psi(m) = -\left(\frac{t - m/2}{m/6}\right)^2 \quad (3.1)$$

в воде, содержащей завесу прямоугольного поперечного сечения с воздушными пузырьками (фиг. 1). Расчеты для всех представленных рисунков проводились для следующих параметров смеси и импульса: $l_x = l_y = 0.05$ м, $a_0 = 10^{-3}$ м, $p_0 = 0.1$ МПа, $T_0 = 300$ К, $\Delta p_0 = 0.3$ МПа. Импульс с протяженностями $t_* = 10^{-4}$ и 10^{-3} с действует через лагранжеву границу жидкости $x_0 = 0$.

Для обоих случаев приведены эпюры давления в моменты $t = 6 \cdot 10^{-4}$ (фиг. 2, а) и $1 \cdot 10^{-3}$ с (фиг. 2, б). При распространении более длительного сигнала (фиг. 2, б) из-за двумерных эффектов в определенные моменты времени внутри завесы могут реализовываться башнеобразные распределения давления. При этом датчики давления, расположенные в вышеуказанных местах, будут регистрировать всплески давления с амплитудой, значительно превышающей амплитуду исходного импульса.



Фиг. 3. Эволюция в пузырьковой жидкости локализованного по поперечной координате волнового импульса. Эпюры давления приведены при $t = 3 \cdot 10^{-3}$ (а) и $2 \cdot 10^{-3}$ с (б)

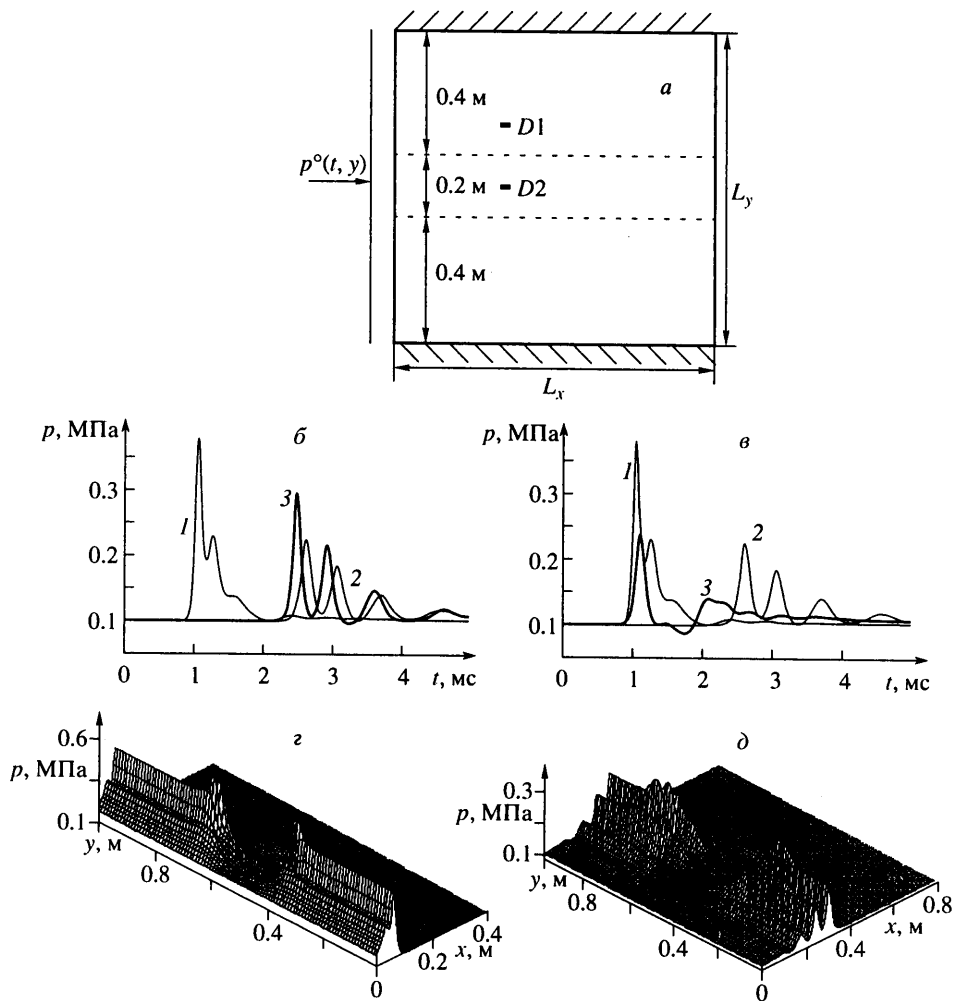
Для представленного примера датчик 2, расположенный в середине завесы, регистрирует сигнал с амплитудой около 0.6 МПа, в 2 раза превышающий амплитуду первоначального сигнала. Этот башнеобразный всплеск давления, уменьшаясь по амплитуде, сносится по направлению распространения основной волны. Такая картина, в частности, видна из расчетной осциллограммы для датчика 3 (регистрируемая амплитуда превышает первоначальную примерно на 0.1 МПа).

В случае коротковолнового сигнала (фиг. 2, а) датчик 2 практически "не чувствует" внешний импульсный сигнал, а датчик 3 фиксирует ослабленный сигнал с амплитудой около 0.1 МПа.

На фиг. 3 представлена эволюция колоколообразного по поперечной координате волнового импульса, заданного в виде

$$p^0(t, y) = p_0 + \Delta p_0 \exp[\psi(t_*)] \exp \left[- \left(\frac{y - y_0 / 2}{y_* / 2} \right)^2 \right] \quad (3.2)$$

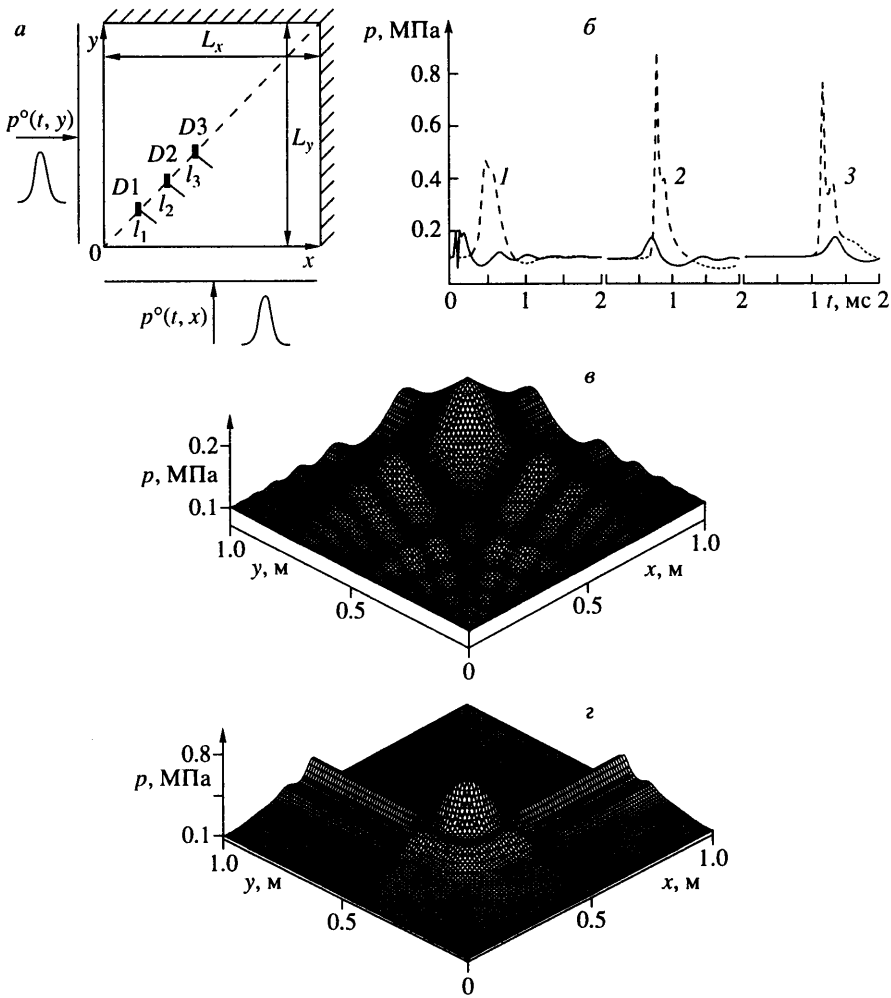
в однородной водовоздушной пузырьковой смеси с $\alpha_g = 10^{-3}$. Фиг. 3, а и б соответствуют $t_* = 10^{-3}$ с, $y_* = 4 \cdot 10^{-1}$ м и $t_* = 10^{-4}$ с, $y_* = 4 \cdot 10^{-2}$ м. Для более длительного импульса (фиг. 3, а), когда характерная его протяженность значительно превышает



Фиг. 4. Распространение волнового импульса в кусочно-неоднородной по объемному содержанию пузырьков области. Расчетные осциллограммы (линия 1) на б и в соответствуют показаниям датчиков 1 и 2, кривые 2, 3 – осциллограммы для однородной смеси при $\alpha_{g0} = 10^{-2}, 10^{-3}$. Распределения давления в моменты $t = 7 \cdot 10^{-4}$ (г) и $2 \cdot 10^{-3}$ с (д)

период собственных колебаний пузырьков t_M ($t_* \gg t_M$, $t_M = 2\pi a_0 \sqrt{\rho_{10}^0 / 3\gamma p_0}$), в смеси практически формируется одна лидирующая волна (амплитуда ряби волн, связанных с проявлением радиальной инерции пузырьков, незначительна по сравнению с амплитудой лидирующей волны). В случае короткого импульса ($t_* \sim t_M$) (фиг. 3, б) образуется расходящийся подковообразный пакет волн [5] с характерным пространственным периодом пульсации $\lambda \approx Ct_M$ (где $C = \sqrt{\gamma p_0 / \alpha_{g0} \rho_{10}}$ – равновесная скорость звука в пузырьковой жидкости [1]).

На фиг. 4 представлены результаты численного эксперимента по эволюции волнового импульса, заданного в виде (3.1) в кусочно-неоднородной по объемному содержанию пузырьков, в поперечном (по оси y) направлении области, находящейся между двумя плоскопараллельными стенками. Область пузырьковой жидкости состоит в поперечном направлении (по оси y) из трех слоев с различающимися в исходном невоз-



Фиг. 5. Эволюция двух волновых импульсов, воздействующих через смежные границы. Расчетные осциллограммы (б) соответствуют показаниям датчиков 1, 2 и 3; $l_1 = 0.05$, $l_2 = 0.20$, $l_3 = 0.25$ м (а), $\Delta p_{10} = \Delta p_{20} = 0.3$ МПа и $t_{*1} = t_{*2} = 10^{-4}$ с (сплошная линия), $t_{*1} = t_{*2} = 10^{-3}$ с (штриховая линия), в, з – эпюры давления

мущенном состоянии объемными содержаниями $\alpha_{g0}^{(1)} = 10^{-2}$, $\alpha_{g0}^{(2)} = 10^{-3}$ и $\alpha_{g0}^{(3)} = 10^{-2}$. Характерные геометрические размеры слоев приведены на фиг. 4, а. Остальные параметры водовоздушной смеси такие же, как для фиг. 2. Импульс с амплитудой $\Delta p = 0.3$ МПа и характерной временной протяженностью $t_* = 10^{-3}$ с действует через лагранжеву границу $x_0 = 0$. Для иллюстрации эффектов, связанных с неоднородностью распределения объемного содержания пузырьков, представлены также расчетные осциллограммы для однородных смесей (кривые 2 и 3 соответствуют $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ и 10^{-3}).

В отличие от волновых картин в однородных пузырьковых системах, при неоднородном распределении объемного содержания газа распространение импульсного возмущения сопровождается образованием в поперечном направлении профилей давления с пиками вблизи границ между слоями. Эти пики превышают амплитуду

исходного сигнала примерно на 0.2 МПа (фиг. 4, з). Этот эффект проявляется из-за различия скорости волны в слоях с отличающимися объемными содержаниями газа. Действительно, импульс в среднем слое $\alpha_{g0}^{(2)} = 10^{-3}$ имеет скорость ≈ 400 м/с, что приблизительно в 3 раза превышает скорость распространения в пристенных слоях с $\alpha_{g0}^{(1)} = \alpha_{g0}^{(3)} = 10^{-2}$. Следовательно, волна, распространяясь по среднему слою, из-за его бокового расширения предварительно поджигает пристенные слои. Поэтому при распространении основного волнового импульса, в предварительно "поджатом" пристенном слое, вблизи границ между слоями происходит накладка амплитуд.

На фиг. 5 представлены результаты численного эксперимента по эволюции двух волновых импульсов в однородной водовоздушной пузырьковой смеси с $\alpha_g = 10^{-3}$, воздействующих через смежные лагранжевые границы $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$ и заданных в виде (фиг. 5, а)

$$p_1^0(t, y) = p_0 + \Delta p_{01} \exp[\psi(t_{*1})], \quad p_2^0(t, x) = p_0 + \Delta p_{02} \exp[\psi(t_{*2})]$$

При воздействии таких импульсов максимальное значение давления достигается и распространяется по диагонали расчетной области. Максимальное значение давления при распространении коротковолновых импульсов не превышает 0.2 МПа. Это связано с тем, что в данном случае протяженность импульса близка по значению с периодом собственных колебаний пузырьков $t_{*1} = t_{*2} \approx t_M$. При распространении волновых импульсов водовоздушная смесь является системой с распределенными пузырьками-маятниками. Когда протяженность импульсов и период собственных пульсаций пузырьков близки по значению, пузырьки-маятники "раскачиваются" максимально. Это в свою очередь приводит к увеличению диссипации и способствует затуханию импульсного сигнала.

При взаимодействии длинноволновых импульсов ($t_{*1} = t_{*2} = 10^{-3}$ с) давление, регистрируемое датчиками, может достигать 0.9 МПа. В этом случае при прохождении в пузырьковую среду радиальная инерция пузырьковой жидкости и эффекты нелинейности приводят к увеличению крутизны переднего фронта волны и к возрастанию амплитуды первоначального сигнала.

Для более наглядного представления вышеизложенного на фиг. 5, в и г показаны распределения давления в различные моменты времени.

Заклучение. Численно исследовано распространение двумерных волн в жидкости при наличии в ней пузырьковой зоны конечных размеров, в однородной пузырьковой жидкости и в пузырьковой жидкости с кусочно-неоднородным распределением объемного содержания пузырьков. Установлены следующие факты.

Если временная протяженность импульса достаточно большая ($t_* \gg l_y / C$, l_y – длина завесы в поперечном направлении, C – скорость волны в пузырьковой жидкости), то из-за двумерных эффектов внутри пузырьковой зоны могут образоваться башнеобразные распределения давления с амплитудой, значительно превышающей амплитуду исходного импульса (~ 2 раза).

В случае коротких импульсов ($t_* \ll l_y / C$) частицы двухфазной системы, находящиеся внутри зоны, практически не чувствуют прохождения волнового сигнала.

При эволюции в однородной пузырьковой смеси колоколообразного по поперечной координате импульсного сигнала, когда его временная протяженность превышает период собственных колебаний пузырьков ($t_* > t_M$), в пузырьковой смеси формируется лидирующая волна, в случае $t_* \approx t_M$ образуется расходящийся пакет волн.

Распространение импульсного сигнала в кусочно-неоднородной по объемному содержанию пузырьков области сопровождается образованием в поперечном направлении профилей давления с пиками вблизи границ между слоями, что обусловлено различием скорости волны в слоях с отличающимися объемными содержаниями газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.; Ч. 2. 360 с.
2. *Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е.* Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984. 302 с.
3. *Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К.* Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волн в пузырьковой среде // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304. № 5. С. 1077–1081.
4. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980. 352 с.
5. *Петвиашвили В.И., Цвелогуб О.Ю.* Подковообразные солитоны на стекающей вязкой пленке жидкости // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. № 6. С. 1321–1323.

Стерлитамак

Поступила в редакцию
10.X.2000