

УДК 532.528

© 2002 г. А.Д. ВАСИН

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ТОНКОГО ТЕЛА К РАСЧЕТУ КАВИТАЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ КОНУСОВ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ВОДЫ¹

Отмечены особенности применения теории тонкого тела к расчету кавитационного обтекания конусов сверхзвуковым потоком воды. Показано, что в рамках теории тонкого тела нельзя удовлетворить граничному условию у кромки конуса, где возникает течение Прандтля – Майера. Проведено сравнение значений коэффициента сопротивления конусов, определенных на основании теории тонкого тела, с результатами численных расчетов конических течений.

Теория тонкого тела широко применяется для исследования кавитационных течений в несжимаемой жидкости (см., например, [1–4]). С начала 80-х годов возник интерес к кавитационным течениям в сжимаемой жидкости. Были выполнены работы по определению формы каверны в дозвуковом потоке, основанные на теории тонкого тела [5–9]. Полученные результаты для дозвукового потока хорошо согласуются с экспериментальными данными и с результатами, основанными на численных методах [10, 11]. При исследовании сверхзвуковых кавитационных течений теория тонкого тела встречает принципиальные трудности. В статье отмечены некоторые особенности применения теории тонкого тела к сверхзвуковым кавитационным течениям на примере расчета каверн за тонкими конусами.

1. Рассмотрим обтекание сверхзвуковым потоком тонкого осесимметричного тела с каверной по схеме Рябушинского (фиг. 1), когда применимо линеаризованное уравнение для потенциала возмущенных скоростей в цилиндрической системе координат [12]

$$-(M^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (1.1)$$

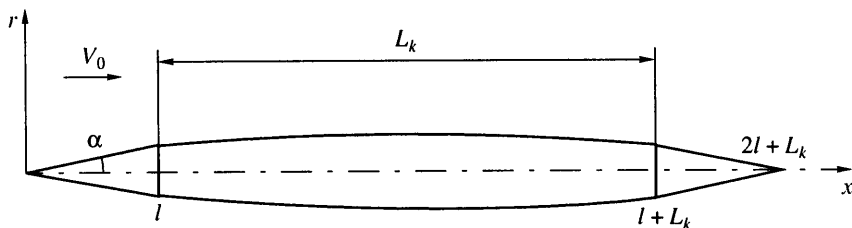
где $\varphi = \varphi^* / V_0 R_n$ – безразмерный потенциал возмущенных скоростей, φ^* – потенциал возмущенных скоростей, V_0 – скорость набегающего потока, R_n – радиус основания конуса-кавитатора, $M = V_0/a_0$ – число Маха, a_0 – скорость звука в невозмущенном потоке, x, r – безразмерные координаты, отнесенные к R_n , начало системы координат находится в носике конуса-кавитатора.

Уравнение (1.1) является гиперболическим дифференциальным уравнением. Для его решения можно применять метод источников и стоков, распределенных на оси

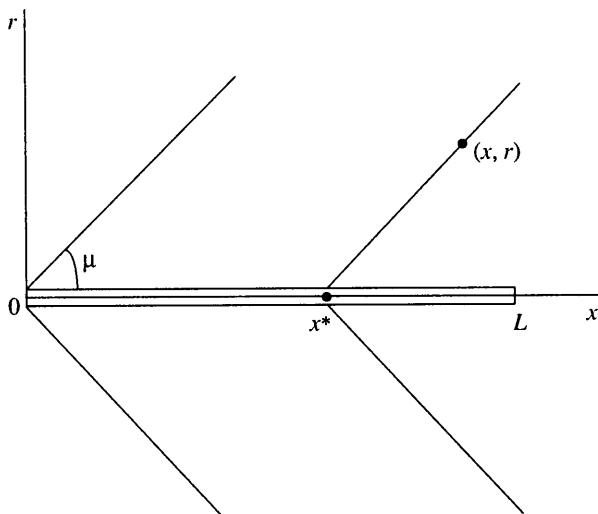
¹ В статье А.Д. Васина, Э.В. Парышева "Погружение цилиндра в жидкость через цилиндрическую свободную поверхность" (Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 2. С. 3–12) авторами допущены следующие неточности.

1. На стр. 9 (11 строка снизу) вместо предложения: "Равенство (4.5) ранее получено в [5]" следует читать "Равенство (4.5) ранее опубликовано в [5]".

2. На стр. 9 в первой формуле (4.6) для z под знаком \sin^2 вместо β должно стоять B .



Фиг. 1. Схема Рябушинского кавитационного обтекания тонкого конуса



Фиг. 2. Влияние источников и стоков на течение в сверхзвуковом потоке

симметрии. Однако в отличие от дозвукового обтекания при сверхзвуковом возмущения от источников и стоков распространяются только внутри конуса Маха, угол которого определяется соотношением

$$\mu = \arcsin \frac{1}{M}$$

Таким образом, чтобы получить значение потенциала в точке (x, r) , необходимо учесть влияние только тех источников и стоков, которые расположены вверх по течению на оси тонкого тела от 0 до точки $x^* = x - \sqrt{M^2 - 1}r$ (фиг. 2). Для сверхзвукового обтекания потенциал возмущенных скоростей, удовлетворяющий (1.1), можно записать в виде интеграла [12]

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{x^*} \frac{q(x_1) dx_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 - (M^2 - 1)r^2}} \quad (1.2)$$

где $q(x_1)$ – интенсивность источников и стоков на оси симметрии.

Вблизи поверхности тонкого кавитатора и каверны потенциал (1.2), удовлетворяющий кинематическому граничному условию, имеет следующее асимптотическое представление [13]:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} S'(x) \ln \frac{(M^2 - 1)r^2}{4x^2} - \frac{1}{2\pi_0} \int_0^x \frac{S'(x_1) - S'(x)}{x - x_1} dx_1 \quad (1.3)$$

где $S'(x)$ – производная по x от безразмерной площади поперечного сечения.

Анализ показал [14], что для описания адиабаты воды в сверхзвуковом потоке можно применять уравнение Тэта. Для сверхзвукового обтекания динамическое граничное условие имеет такой же вид, как и при дозвуковом обтекании [8], и записывается следующим образом:

$$2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 = \sigma$$

$$\sigma = \frac{2(P_0 - P_k)}{\rho V_0^2} \quad (1.4)$$

где σ – число кавитации, P_0 – давление в невозмущенном потоке, P_k – давление в каверне, ρ – плотность жидкости.

Рассмотрим геометрические размеры течения на фиг. 1. Все линейные размеры отнесены к радиусу кавитатора (радиус основания конуса равен единице), l – высота конуса, α – угол полураствора, L_k – длина каверны, $l + L_k$ и $2l + L_k$ – координаты основания и вершины замыкающего конуса, $L = 2l + L_k$ – полная длина. Считаем, что конус и каверна имеют одинаковый порядок тонкости ϵ , равный отношению радиуса основания конуса к его высоте ($\epsilon = l/l = \text{tg}\alpha$). По координате x радиусы R_1 конуса-кавитатора и замыкателя изменяется как $R_1 = \epsilon x$ и $R_1 = \epsilon(L - x)$. Профиль каверны определим в виде изменения ее радиуса по горизонтальной координате $R(x)$. Подставляя (1.3) в (1.4), получим интегродифференциальное уравнение для профиля каверны в сверхзвуковом потоке за тонкими конусами

$$\frac{u'^2}{4u} + \frac{u''}{2} \ln \frac{(M^2 - 1)u}{4x^2} - \int_0^l \frac{u''(x_1) - u''(x)}{x - x_1} dx_1 - \int_l^x \frac{u''(x_1) - u''(x)}{x - x_1} dx_1 = \sigma$$

$$u = R^2, \quad u_1 = R_1^2 \quad (1.5)$$

В [8] определено внешнее решение уравнения (1.5). При нахождении внешнего решения предполагалось, что размерами кавитатора можно пренебречь по сравнению с размерами каверны (порядок тонкости каверны существенно превышает порядок тонкости кавитатора). Для внешнего решения в качестве граничного условия принималось равенство нулю радиуса кавитатора. В рассматриваемом случае считаем порядок тонкости кавитатора и каверны одинаковыми и находим решение для всей области течения. Граничные условия записываем в таком же виде, как и для дозвукового режима обтекания [7, 9]

$$x = l : R = 1, R' = \epsilon$$

$$x = l + L_k : R = 1$$

Решение для всей области течения ищем в виде разложения в асимптотические ряды с малым параметром ϵ . Для квадрата радиуса каверны и числа кавитации эти ряды имеют вид

$$R^2 = \epsilon^2 \left[R_0^2 + R_{-1}^2 \left(\ln \frac{1}{\epsilon^2} \right)^{-1} + R_{-2}^2 \left(\ln \frac{1}{\epsilon^2} \right)^{-2} + \dots \right]$$

$$\sigma = \epsilon^2 \left[\sigma_1 \left(\ln \frac{1}{\epsilon^2} \right) + \sigma_0 + \sigma_{-1} \left(\ln \frac{1}{\epsilon^2} \right)^{-1} + \dots \right] \quad (1.6)$$

После подстановки (1.6) в (1.5) и сохранения двух членов ряда интегродифференциальное уравнение (1.5) преобразуется в два дифференциальных. Первое уравнение получается после приравнивания членов при $\epsilon^4 \ln 1/\epsilon^2$, второе следует из равенства

членов при ϵ^4 . Первое дифференциальное уравнение с граничными условиями записывается следующим образом:

$$\frac{d^2 R_0^2}{dx^2} = -2\sigma_1 \quad (1.7)$$

$$R_0^2(l) = l^2, \quad R_0^2(l + L_k) = l^2, \quad \left. \frac{dR_0^2}{dx} \right|_{x=l} = 2l$$

Решение уравнения (1.7) имеет вид

$$R_0^2 = \sigma_1(a-x)(x-b) \quad (1.8)$$

$$\sigma_1 = \frac{2l}{L_k}, \quad a = \frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} - \frac{ll}{2}}, \quad b = \frac{L}{2} - \sqrt{\frac{L^2}{4} - \frac{ll}{2}}$$

Из (1.8) следует, что первым приближением формы каверны является эллипсоид вращения (аналогичный результат получен и для дозвукового потока [7]).

Второе дифференциальное уравнение с граничными условиями можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2 R_{-1}^2}{dx^2} = \frac{\sigma_1(a-b)^2}{2(a-x)(x-b)} - 2\sigma_1 \ln \left[\frac{\sigma_1(M^2-1)(a-x)(x-b)}{4} \right] -$$

$$-4 \ln x + 4(1 + \sigma_1) \ln(x-l) - 2(\sigma_1 + \sigma_0) \quad (1.9)$$

$$R_{-1}^2(l) = 0, \quad R_{-1}^2(l + L_k) = 0, \quad \left. \frac{dR_{-1}^2}{dx} \right|_{x=l} = 0$$

Решение уравнения (1.9) имеет вид

$$R_{-1}^2 = \frac{c_1 x^2}{2} + \sigma_1 \left(x - \frac{a+b}{2} \right) [(a-x) \ln(a-x) - (x-b) \ln(x-b)] -$$

$$-2x^2 \ln x + 2(1 + \sigma_1)(x-l)^2 \ln(x-l) + c_2 x + c_3$$

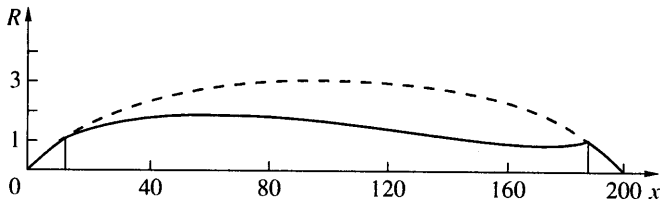
$$c_1 = (\sigma_1 + 2)^2 \ln \frac{l + L_k}{L_k} + \sigma_1 \sqrt{1 + \sigma_1} \ln \frac{a-l}{l-b} - 2\sigma_1 \ln \frac{l^2}{(a-l)(l-b)} - \sigma^2 \ln \frac{l}{L_k}$$

$$c_2 = -c_1 l + \frac{\sigma_1 L_k}{2} \sqrt{1 + \sigma_1} \ln \frac{l-b}{a-l} + 2l \ln \frac{l^2}{(a-l)(l-b)} \quad (1.10)$$

$$c_3 = \frac{c_1 l^2}{2} + \left(l^2 + \frac{ll_k}{2} \right) \ln[(a-l)(l-b)] - l^2 \ln \frac{l^2}{(a-l)(l-b)} - \sqrt{1 + \sigma_1} \left(l^2 + \frac{ll_k}{2} \right) \ln \frac{l-b}{a-l}$$

$$\sigma_0 = -\frac{c_1}{2} - \sigma_1 \left[1 + \ln \frac{\sigma_1(M^2-1)}{4} \right]$$

Из уравнений (1.6), (1.8) и (1.10) можно определить форму каверны и число кавитации. На фиг. 3 штриховой кривой отмечено первое приближение профиля каверны за конусом с углом $\alpha = 5^\circ$, $L = 200$; сплошной кривой отмечено второе приближение. Из фиг. 3 следует, что второе приближение формы каверны существенно отличается от первого и вторые члены асимптотического ряда не малы по сравнению с первыми. Кроме того, в хвостовой части контур каверны становится вогнутым, что противоречит физическим закономерностям кавитационных течений. Следует отметить, что при применении теории тонкого тела к дозвуковому кавитационному обтеканию такого же конуса [7] второе приближение формы каверны мало отличается от первого и параметры кавитационного течения удовлетворяют закону сохранения импульса.



Фиг. 3. Профиль каверны для конуса $\alpha = 5^\circ$; штриховая кривая – первое приближение, сплошная кривая – второе приближение

Появление физически нереального второго приближения формы каверны (фиг. 3) связано с тем, что теория тонкого тела не соответствует течению у кромки конуса. У кромки в сверхзвуковом потоке возникает течение Прандтля – Майера. Поток должен повернуться на угол, определяемый давлением в каверне или числом кавитации. Наклон свободной линии тока несколько меньше угла полураствора конуса.

Оценки показали, что в рамках теории тонкого тела невозможно выполнить граничное условие с разрывом касательной в месте схода каверны. В несоответствии граничному условию у кромки конуса заключается первая особенность применения теории тонкого тела к сверхзвуковым кавитационным течениям.

Нахождение решения представляет собой сложную задачу, поскольку форма каверны и число кавитации заранее неизвестны. Кроме того, неизвестно аналитическое решение для потенциала возмущенных скоростей течения Прандтля – Майера в случае осесимметричного потока. Следовательно, невозможно применить процедуру метода сращиваемых асимптотических разложений и срастить течение Прандтля – Майера у кромки конуса с кавитационным течением от распределенных источников и стоков. В данном случае наиболее целесообразно применить численный метод (см., например, [14]).

2. Определим коэффициент давления на поверхности тонкого конуса при сверхзвуковом обтекании. Выражение для коэффициента давления имеет вид [12]

$$C_p = \frac{2(P_c - P_0)}{\rho V_0^2} = -2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \quad (2.1)$$

где C_p – коэффициент давления, P_c – давление на поверхности конуса.

После дифференцирования (1.3) компоненты возмущенной скорости на поверхности конуса запишутся следующим образом:

$$v_x = \frac{\varepsilon^2}{2} \ln \frac{(M^2 - 1)\varepsilon^2}{4} \quad (2.2)$$

$$v_r = \varepsilon$$

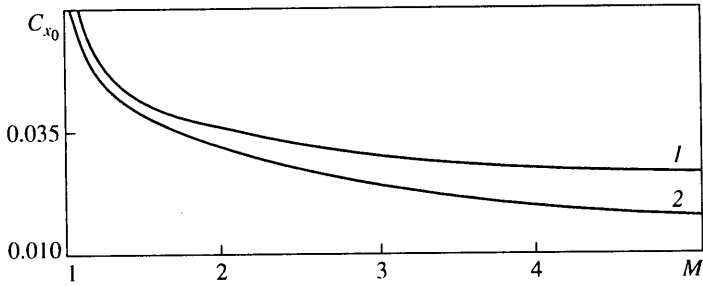
Подставим (2.2) в (2.1) и получим выражение для коэффициента давления

$$C_p = -\varepsilon^2 \left[\ln \frac{(M^2 - 1)\varepsilon^2}{4} + 1 \right] \quad (2.3)$$

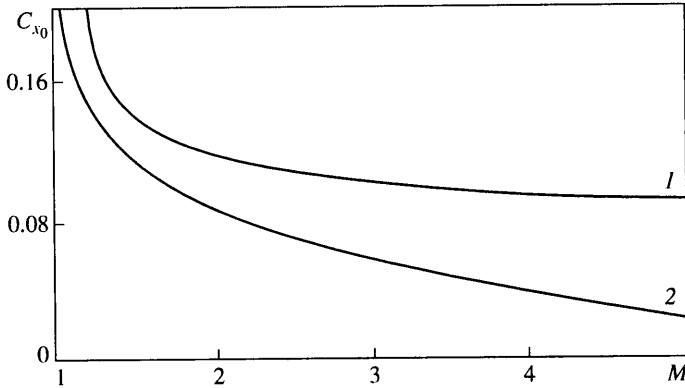
Формула (2.3) совпадает с выражением, определяющим коэффициент давления на тонком конусе при сверхзвуковом обтекании потоком воздуха [12]. Коэффициент давления связан с коэффициентом кавитационного сопротивления зависимостью

$$C_x = 2\varepsilon \int_0^l C_p R_1(x) dx + \sigma \quad (2.4)$$

где C_x – коэффициент сопротивления, отнесенный к площади основания конуса, $R_1(x) = \varepsilon x$ – радиус поперечного сечения конуса.



Фиг. 4. Зависимость C_{x_0} от M для конуса $\alpha = 5^\circ$: 1 – численный расчет [15], 2 – расчет по формуле (2.3)



Фиг. 5. Зависимость C_{x_0} от M для конуса $\alpha = 10^\circ$: 1 – численный расчет [15], 2 – расчет по формуле (2.3)

Коэффициент давления постоянен на поверхности конуса и выражение (2.4) примет вид

$$C_x = C_p + \sigma \quad (2.5)$$

Коэффициент C_p можно рассматривать как коэффициент кавитационного сопротивления при нулевом числе кавитации C_{x_0} . Формула (2.5) запишется следующим образом:

$$C_x = C_{x_0} + \sigma \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) представляет собой зависимость коэффициента кавитационного сопротивления от числа кавитации при постоянном числе Маха.

Сравним коэффициенты сопротивления конусов, полученные по теории тонкого тела при $\sigma = 0$ ($C_{x_0} = C_p$), с коэффициентами C_{x_0} , определенными при численном расчете конических течений в сверхзвуковом потоке воды [15]. На фиг. 4 и 5 показаны зависимости $C_{x_0}(M)$ для конусов с углами полураствора $\alpha = 5$ и 10° соответственно. Значения C_{x_0} , полученные численным расчетом [15], отмечены кривой 1, значения, рассчитанные по формуле (2.3), показаны кривой 2.

Из фиг. 4 можно сделать вывод, что для конуса $\alpha = 5^\circ$ в диапазоне чисел Маха $1.1 \leq M \leq 3$ результаты численного расчета [15] близки к результатам, полученным по теории тонкого тела (формула (2.3)). Применимость теории тонкого тела к конусу $\alpha = 5^\circ$ подтверждает и тот факт, что головной скачок уплотнения на этом конусе близок к линии Маха [15].

Из фиг. 5 следует, что для конуса $\alpha = 10^\circ$ наблюдается значительное расхождение между значениями C_{x0} , вычисленными двумя методами. Конус $\alpha = 10^\circ$ при сверхзвуковом обтекании водой нельзя рассматривать как тонкое тело. Для этого конуса численный расчет показал, что в диапазоне чисел Маха $1 < M < 1.2$ головной скачок уплотнения отсоединен от поверхности конуса, а величина скорости на его поверхности превышает скорость звука только при $M > 1.46$ [15]. Такое течение не описывается в рамках теории малых возмущений. Вторая особенность применения теории тонкого тела к расчету сверхзвукового обтекания конуса-кавитатора заключается в том, что эта теория дает точные результаты, если угол полураствора конуса находится в диапазоне $0 < \alpha \leq 5^\circ$. Следует отметить, что для дозвукового кавитационного течения теория тонкого тела находит более широкие пределы применения. Например, в [7] определено кавитационное течение за тонкими конусами, угол полураствора которых имеет значения $5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$. Полученные в [7] результаты согласуются с численными расчетами и законом сохранения импульса.

Заключение. Рассмотрено применение теории тонкого тела к расчету сверхзвукового кавитационного обтекания конуса. Выведены основные уравнения для определения параметров кавитационного течения. Показано, что в рамках теории тонкого тела нельзя удовлетворить граничному условию на кромке конуса, где возникает течение Прандтля – Майера. В сверхзвуковом потоке воды конус-кавитатор можно рассматривать как тонкое тело, если его угол полураствора не превышает 5° .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорян С.С. Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 951–953.
2. Якимов Ю.Л. Об осесимметричном срывном обтекании тела вращения при малых числах кавитации // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 3. С. 499–501.
3. Логвинович Г.В., Серебряков В.В. О методах расчета формы тонких осесимметричных каверн // Гидромеханика. Киев, 1975. Вып. 32. С. 47–54.
4. Нестерук И.Г. Об определении формы тонкой осесимметричной каверны на основе интегродифференциального уравнения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 5. С. 83–90.
5. Якимов Ю.Л. Асимптотические законы вырождения формы тонких каверн // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 3–10.
6. Васин А.Д. Тонкие осесимметричные каверны в дозвуковом потоке сжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 174–177.
7. Васин А.Д. Применение теории тонкого тела для исследования развитых осесимметричных кавитационных течений в дозвуковом потоке сжимаемой жидкости // Прикладная гидромеханика. Киев, 2000. Т. 2(74). № 3. С. 17–25.
8. Васин А.Д. Тонкие осесимметричные каверны в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 179–181.
9. Серебряков В.В. Асимптотические решения осесимметричных задач до- и сверхзвуковых отрывных течений воды при нулевых числах кавитации // Докл. АН Украины. 1992. № 9. С. 66–71.
10. Савченко Ю.Н., Семененко В.Н., Серебряков В.В. Экспериментальное исследование развитых кавитационных течений при дозвуковых скоростях обтекания // Докл. АН Украины. 1993. № 2. С. 64–69.
11. Васин А.Д. Расчет осесимметричных каверн за диском в дозвуковом потоке сжимаемой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 2. С. 94–103.
12. Липман Г.В., Рошко А. Элементы газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 518 с.
13. Эшли Х., Лэндал М. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 318 с.
14. Васин А.Д. Расчет осесимметричных каверн за диском в сверхзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 4. С. 54–62.
15. Васин А.Д. Скачки уплотнения и конические течения в сверхзвуковом потоке воды // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 5. С. 196–199.