

УДК 532.527

© 2002 г. Ю.Д. ШМЫГЛЕВСКИЙ, А.В. ЩЕПРОВ

О ВИХРЕВЫХ СИСТЕМАХ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ГРАНИЦЫ

Разложение решения уравнений Навье – Стокса для стационарных плоскопараллельных течений несжимаемой жидкости в ряд по степеням числа Рейнольдса и подчинение этого ряда условиям прилипания к прямолинейным границам около точки их пересечения приводит к асимптотике решения в окрестности такой точки. Использование главной части полученной асимптотики в качестве граничного условия на некотором удалении от угловой точки позволяет ставить краевые задачи для уравнений Навье – Стокса в замкнутых областях. Примеры численного решения подобных задач иллюстрируют возникновение бесконечных систем вихрей в окрестности точки излома границы области течения.

Значительное количество численных решений уравнений Навье–Стокса в прямоугольной каверне ([1] и др.) выявляет возникновение вторичных вихрей в углах области течения. Подобное явление обнаружено и в других случаях, например при движении жидкости между неподвижным квадратом и вращающимся внутри него кругом [2]. Детальность полученной в [3] асимптотики решения уравнения Навье–Стокса в окрестности угловой точки границы и не определенная зависимость ее от полярного угла не позволяют составить наглядное представление о структуре течения в этой подобласти.

Вместе с тем при изучении стоксовского течения в угловой области обнаружена бесконечная система вихрей. Функция тока ψ стоксовского течения подчиняется бигармоническому уравнению. Его решение при $\psi = 0$ и нулевой нормальной производной от ψ на границах угловой области получено в [4, 5]. В [5] доказана полнота найденной системы функций в частном случае параллельных стенок. Там же содержится утверждение о полноте и в угловой области. Подробное рассмотрение структуры стоксовских течений в угловых областях проведено в [6]. Авторы работ [7, 8] независимо от [5] вывели условия сходимости рядов по упомянутым функциям при решении одной краевой задачи для бигармонического уравнения в полуполосе. В приведенном в [8] приближенном решении задачи о течении в прямоугольной каверне показаны возникающие в углах области вторичные вихри. В [9] вихревые системы в угловых областях получены как частный случай решения более общей задачи.

Возникает желание изучить вихревые системы в угловых областях на основе уравнений Навье–Стокса с привлечением асимптотики их решения. Цель настоящей работы – вывод такой асимптотики, сопряжение с ней численного решения и представление примеров течений с бесконечными вихревыми системами в углах круговых секторов при различных граничных условиях на замыкающей дуге окружности.

1. Постановка задачи. Течение изучается внутри кругового сектора, ограниченного лучами $y = \mp x \operatorname{tg} \Theta$, где $-\pi/4 \leq \Theta \leq \pi/4$, и дугой окружности радиуса r_* . Уравнение, описывающее стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости, имеет вид

$$R(\psi_y \Delta \psi_x - \psi_x \Delta \psi_y) = \Delta \Delta \psi \quad (1.1)$$

где R – число Рейнольдса, x, y – декартовы координаты, Δ – оператор Лапласа.

Граничные условия удобно описать в полярных координатах

$$r(x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \vartheta = \text{arctg}(y/x)$$

Условия прилипания на лучах $\vartheta = \mp\Theta$ и кинематические условия при $r = r_*$ зададим в виде

$$\Psi = 0, \quad \Psi_y = 0 \quad (\vartheta = \mp\Theta, \quad 0 \leq r \leq r_*) \quad (1.2)$$

$$\Psi = \Psi_*(\vartheta), \quad \Psi_r = \Psi_{r*}(\vartheta) \quad (r = r_*, \quad -\Theta \leq \vartheta \leq \Theta) \quad (1.3)$$

где Ψ_* и Ψ_{r*} – заданные функции.

Совместность граничных условий (1.2) и (1.3) в точках $r = r_*$, $\vartheta = \pm\Theta$ определяется равенствами

$$\Psi_*(-\Theta) = \Psi_*(\Theta) = [\Psi_{*\vartheta}(\vartheta)]_{\vartheta=-\Theta} = [\Psi_{*\vartheta}(\vartheta)]_{\vartheta=\Theta} = \Psi_{r*}(-\Theta) = \Psi_{r*}(\Theta) = 0$$

При решении других задач функции Ψ_* и Ψ_{r*} можно задавать и на других линиях, соединяющих лучи $\vartheta = \pm\Theta$.

В дальнейшем используются комплексные переменные $z = x + iy = re^{i\vartheta}$, $\bar{z} = x - iy = re^{-i\vartheta}$, $\Psi = \psi + i\phi$, где ψ и ϕ – действительные функции. Уравнение (1.1) переходит в два уравнения

$$iR(\Psi_z \Psi_{z\bar{z}\bar{z}} - \Psi_{\bar{z}} \Psi_{zz\bar{z}}) = 2\Psi_{zz\bar{z}\bar{z}} \quad (1.4)$$

$$\Phi_z \Phi_{z\bar{z}\bar{z}} - \Phi_{\bar{z}} \Phi_{zz\bar{z}} = 0 \quad (1.5)$$

Выполнение уравнения (1.5) обеспечивает переход действительной части (1.4) в уравнение (1.1)

Граничные условия (1.2) легко преобразовать к виду

$$\Psi = 0, \quad \Psi_{\bar{z}} = 0 \quad (\vartheta = \mp\Theta) \quad (1.6)$$

Условия (1.3) уже имеют нужный вид.

Итак, задача состоит в решении уравнений (1.4), (1.5) с граничными условиями (1.6), (1.3). Решение упрощенной задачи (1.4), (1.6), (1.3) приводит к некоторому классу функций, из которых можно выделить удовлетворяющие уравнению (1.5). Однако использован будет другой путь, на котором действительные функции будут представлены как функции комплексных переменных z и \bar{z} .

2. Асимптотика решения в окрестности угловой точки. Решение уравнения (1.4) отыскивается в виде ряда по целым степеням R :

$$\Psi = \sum_{g=0}^{\infty} \Psi_g(z, \bar{z}) R^g \quad (2.1)$$

Подстановка этого ряда в (1.4) и приравнивание нулю сумм коэффициентов при нулевой и первой степенях R дают

$$(\Psi_0)_{zz\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad (2.2)$$

$$2(\Psi_1)_{zz\bar{z}\bar{z}} = i[(\Psi_0)_z(\Psi_0)_{z\bar{z}\bar{z}} - (\Psi_0)_{\bar{z}}(\Psi_0)_{zz\bar{z}}] \quad (2.3)$$

Действительная и мнимая части решений уравнения (2.2) описывают течения в приближении Стокса. Общим интегралом уравнения (2.2), расширенным дополнительным введением двух произвольных функций, является

$$\Psi_0 = \gamma(z) + \delta(\bar{z}) + \bar{z}\alpha(z) + z\beta(\bar{z}) \quad (2.4)$$

где γ , δ , α , β – произвольные функции своих аргументов. Согласно [9], при четном по ϑ решении $\delta(t) = \gamma(t)$, $\beta(t) = \alpha(t)$, а при нечетном $\delta(t) = -\gamma(t)$, $\beta(t) = -\alpha(t)$.

На основе интеграла (2.4) в [9] найдено нечетное по ϑ решение, удовлетворяющее граничным условиям $\Psi_z = \Psi_{\bar{z}} = 0$ при $\vartheta = \mp\Theta$. Эти равенства обуславливают более общее решение, чем рассматриваемое здесь. В комплексной форме решение, удовлетворяющее условиям (1.6), представлено в [4, 5], где были обнаружены бесконечные системы вихревых образований в этих стоксовских течениях.

Действительная часть нечетного по ϑ решения Ψ_0 уравнения (2.2), ζ_0 , выражается формулами

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_{0j}, \quad \zeta_{0j} = r^{p_j+1} (\kappa_{0j} C_{0j} + \lambda_{0j} D_{0j}) \\ C_{0j} &= A_j(\vartheta) \cos(q_j \ln r) + B_j(\vartheta) \sin(q_j \ln r) \\ D_{0j} &= B_j(\vartheta) \cos(q_j \ln r) - A_j(\vartheta) \sin(q_j \ln r) \\ A_j &= M_j \cos(p_j + 1)\vartheta \operatorname{sh} q_j \vartheta + N_j \sin(p_j + 1)\vartheta \operatorname{ch} q_j \vartheta - \cos(p_j - 1)\vartheta \operatorname{sh} q_j \vartheta \\ B_j &= M_j \sin(p_j + 1)\vartheta \operatorname{ch} q_j \vartheta - N_j \cos(p_j + 1)\vartheta \operatorname{sh} q_j \vartheta - \sin(p_j - 1)\vartheta \operatorname{ch} q_j \vartheta \\ M_j &= \{(p_j + 1) \operatorname{ch}(2q_j \Theta) \sin[2(p_j - 1)\Theta] + q_j \operatorname{sh}(2q_j \Theta) \cos[2(p_j - 1)\Theta]\} H_j^{-1} \\ N_j &= \{(p_j + 1) \operatorname{sh}(2q_j \Theta) \cos[2(p_j - 1)\Theta] - q_j \operatorname{ch}(2q_j \Theta) \sin[2(p_j - 1)\Theta]\} H_j^{-1} \\ H_j &= [(p_j + 1)^2 + q_j^2] \sin 2\Theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

где κ_{0j} и λ_{0j} – неопределенные действительные постоянные, p_j и q_j – пары положительных действительных корней системы уравнений

$$p_j \sin 2\Theta = [\sin(2p_j \Theta)] \operatorname{ch}(2q_j \Theta), \quad q_j \sin 2\Theta = [\cos(2p_j \Theta)] \operatorname{sh}(2q_j \Theta)$$

Четыре пары корней с наименьшими значениями $p_j^2 + q_j^2$ при $\Theta = \pi/4$ имеют величины

j	0	1	2	3
p_j	1	4.80661	8.86855	12.89700
q_j	0	1.464229	1.842421	2.07643

Корни p_0 и q_0 приводят к $\Psi_0 = \text{const}$. Выбор $\Theta = \pi/4$ связан лишь с тем, что в примерах расчетов будет взят только прямоугольный сектор.

Действительная часть четного по ϑ решения Ψ_0 уравнения (2.2), η_0 , вытекающая из [6], выражается формулами

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \sum_{j=1}^{\infty} \eta_{0j}, \quad \eta_{0j} = r^{k_j+1} (\mu_{0j} E_{0j} + \nu_{0j} F_{0j}) \\ E_{0j} &= K_j(\vartheta) \cos(l_j \ln r) + L_j(\vartheta) \sin(l_j \ln r) \\ F_{0j} &= -L_j(\vartheta) \cos(l_j \ln r) + K_j(\vartheta) \sin(l_j \ln r) \\ K_j &= P_j \cos(k_j + 1)\vartheta \operatorname{ch} l_j \vartheta + Q_j \sin(k_j + 1)\vartheta \operatorname{sh} l_j \vartheta + \cos(k_j - 1)\vartheta \operatorname{ch} l_j \vartheta \\ L_j &= P_j \sin(k_j + 1)\vartheta \operatorname{sh} l_j \vartheta - Q_j \cos(k_j + 1)\vartheta \operatorname{ch} l_j \vartheta + \sin(k_j - 1)\vartheta \operatorname{sh} l_j \vartheta \\ P_j &= \{(k_j + 1) \operatorname{ch}(2l_j \Theta) \sin[2(k_j - 1)\Theta] + l_j \operatorname{sh}(2l_j \Theta) \cos[2(k_j - 1)\Theta]\} S_j^{-1} \\ Q_j &= \{(k_j + 1) \operatorname{sh}(2l_j \Theta) \cos[2(k_j - 1)\Theta] - l_j \operatorname{ch}(2l_j \Theta) \sin[2(k_j - 1)\Theta]\} S_j^{-1} \\ S_j &= [(k_j + 1)^2 + l_j^2] \sin 2\Theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

где μ_{0j} и ν_{0j} – неопределенные действительные постоянные, k_j и l_j – пары положительных корней системы уравнений

$$k_j \sin 2\Theta + (\sin 2k_j\Theta) \operatorname{ch} 2l_j\Theta = 0, \quad l_j \sin 2\Theta + (\cos 2k_j\Theta) \operatorname{sh} 2l_j\Theta = 0 \quad (2.7)$$

Три пары корней с наименьшими величинами $k_j^2 + l_j^2$ при $\Theta = \pi/4$ имеют значения

j	1	2	3
k_j	2.73959	6.84514	10.88555
l_j	1.119025	1.681635	1.970199

Таким образом, действительная часть Ψ_0 решения уравнения (2.2) с граничными условиями (1.6) может быть записана как сумма

$$\Psi_0 = \sum_{j=1}^{\infty} (\zeta_{0j} + \eta_{0j}) \quad (2.8)$$

где ζ_{0j} и η_{0j} определены формулами (2.5) и (2.6). Каждое слагаемое суммы (2.8) удовлетворяет уравнению (1.1) при $R = 0$ и граничным условиям (1.2) на радиальных частях границы рассматриваемого кругового сектора. Из формул (2.5) и (2.6) видно, что при $j = 1$ в обоих случаях возникают бесконечные системы вихрей в окрестности вершины угла. Размеры вихревых образований уменьшаются по мере уменьшения r .

Выше определена асимптотика начального члена ряда (2.1).

Обратимся к уравнению (2.3) и изучим структуру решения $\Psi_1 = \operatorname{Re} \Psi_1$. Для этого будет использована комплексная форма решения Ψ_0 уравнения (2.2), удовлетворяющая условиям (1.6):

$$\Psi_0 = \sum_{j=1}^{\infty} [(\kappa_j + i\lambda_j)U_{0j} + (\mu_j + i\nu_j)V_{0j}] \quad (2.9)$$

Действительная часть этой суммы дана в (2.8). Функция U_{01} получена в [9] и имеет вид

$$U_{01} = (M_1 + iN_1)(\bar{z}^{n_1+1} - z^{n_1+1}) + \bar{z}z^{n_1} - z\bar{z}^{n_1}, \quad n_1 = p_1 + iq_1$$

Входящие сюда величины M_1 и N_1 определены формулами (2.5). Функция V_{01} может быть получена аналогичным путем

$$V_{01} = (-P_1 + iQ_1)(\bar{z}^{m_1+1} + z^{m_1+1}) + \bar{z}z^{m_1} + z\bar{z}^{m_1}, \quad m_1 = k_1 + il_1 \quad (2.10)$$

Величины P_1 и Q_1 определены формулами (2.6).

Главная часть изучаемой асимптотики будет использована при настолько малых значениях r , что это позволит применить ее для полного уравнения Навье–Стокса. Из приведенных значений k_1 и p_1 видно, что $k_1 < p_1$ по крайней мере при $\Theta = \pi/4$ и что поэтому, в соответствии с (2.5) и (2.6), главным членом в сумме (2.8) при достаточно малых r является η_{01} . Только в случае нечетной по ϑ функции ψ главным является член ζ_{01} .

Для получения $\operatorname{Re}V_{01}$ как функции комплексных переменных найдем сопряженную функцию

$$\bar{V}_{01} = -(P_1 + iQ_1)(z^{\bar{m}_1+1} + \bar{z}^{\bar{m}_1+1}) + z\bar{z}^{\bar{m}_1} + \bar{z}z^{\bar{m}_1} \quad (2.11)$$

и вычислим полусумму (2.10) и (2.11). Это выделение действительной части $\operatorname{Re}V_{01} = \Psi_{01}$ избавляет от необходимости использовать уравнение (1.5) при определении действительной части $\operatorname{Re}\Psi_1 = \psi_1$. Интегрирование уравнения (2.3), в котором Ψ_0 и Ψ_1

заменены на η_{01} и ψ_1 соответственно, при $v_1 = 0$ дает (индекс 1 у величин $T, \bar{T}, m, \bar{m}, k, l$ опущен вплоть до момента, когда его восстановление станет необходимым)

$$\psi_1^* = \gamma_1(z) + \gamma_1(\bar{z}) + \bar{z}\alpha_1(z) + z\alpha_1(\bar{z}) + f \quad (2.12)$$

$$T = -(\cos 2m\Theta)(m+1)^{-1}$$

$$f = \frac{i}{8}\mu_1^2 \left\{ \frac{T(m+1)\bar{m}(\bar{m}-1) - m(m-1)}{4k} z^{2k}\bar{z}^2 + \left[\frac{\bar{T}(\bar{m}+1) + 1}{(m+1)(m+2)} - \frac{T + \bar{T}}{m+2} \right] z^{\bar{m}}\bar{z}^{m+2} + \frac{m^2}{6(2\bar{m}-1)} z^{2\bar{m}-1}\bar{z}^3 + \frac{m\bar{m}(\bar{m}-1)}{12(k-1)(2k-1)} z^{2k-1}\bar{z}^3 - \frac{1}{m+2} z^{m+2}\bar{z}^{\bar{m}} + \frac{T}{m+2} z^{m+2}\bar{z}^m + \frac{\bar{T}}{\bar{m}+2} z^{\bar{m}+2}\bar{z}^m + \frac{m-1}{2(2m-1)} z^2\bar{z}^{2m} - \frac{T}{\bar{m}+2} z^{\bar{m}}\bar{z}^{\bar{m}+2} + \frac{2il}{(m+1)(\bar{m}+1)} z^{\bar{m}+1}\bar{z}^{m+1} + \frac{2il(m-1)}{m(m+1)^2} z^{m+1}\bar{z}^{m+1} - \frac{\bar{m}^2}{4(2\bar{m}-1)} z^3\bar{z}^{2\bar{m}-1} - \frac{\bar{m}(\bar{m}-1)}{2(2\bar{m}-1)} z^{2\bar{m}}\bar{z}^2 - \frac{T}{m+2} z^m\bar{z}^{m+2} - \frac{m-1}{(m+1)(\bar{m}+1)} z^{m+1}\bar{z}^{\bar{m}+1} - \frac{m-1}{4(2m-1)} z^{2m}\bar{z}^2 \right\}$$

где γ_1 и α_1 – произвольные функции своих аргументов. Звездочка при ψ_1 отмечает два обстоятельства. Во-первых, из величины ψ_1 исключена содержащая произвольные функции четная составляющая по ϑ , а основание для этого будет дано позже. Во-вторых, величина v_1 положена равной нулю, поскольку здесь будет выясняться зависимость ψ_1 от r , а при $v_1 \neq 0$ в выражении для f члены с какими-либо новыми зависимостями от r не появляются.

В результате интегрирования уравнения (2.3) по комплексным переменным в выражении для ψ_1^* вместе с действительной величиной f появились, вообще говоря, комплексные функции. Помня об этом, вначале подчиним функцию ψ_1^* граничным условиям на лучах $\vartheta = \pm \Theta$ и после этого выделим из полученного выражения действительную часть ψ_1 .

Граничные условия (1.6) можно преобразовать к виду

$$\psi_{1z}^*(re^{i\Theta}, re^{-i\Theta}) = 0, \quad \psi_{1\bar{z}}^*(re^{i\Theta}, re^{-i\Theta}) = 0, \quad \psi_1^*(r_*e^{i\Theta}, r_*e^{-i\Theta}) = 0 \quad (2.13)$$

В силу четности ψ_1 по ϑ эти условия выполняются и при замене Θ на $-\Theta$.

Подстановка выражения (2.12) для ψ_1^* в первые два равенства из (2.13) приводит к системе уравнений

$$\gamma_1'(re^{i\Theta}) + re^{-i\Theta}\alpha_1'(re^{i\Theta}) + \alpha_1(re^{-i\Theta}) + f_z(re^{i\Theta}, re^{-i\Theta}) = 0 \quad (2.14)$$

$$\gamma_1'(re^{-i\Theta}) + re^{i\Theta}\alpha_1'(re^{-i\Theta}) + \alpha_1(re^{i\Theta}) + f_{\bar{z}}(re^{i\Theta}, re^{-i\Theta}) = 0$$

Обозначение через t произведения $r \exp(i\Theta)$ в первом из этих уравнений и произведения $r \exp(-i\Theta)$ во втором приводит к системе уравнений для определения γ_1 и α_1 :

$$\gamma_1'(t) + e^{-i2\Theta}t\alpha_1'(t) + \alpha_1(te^{-i2\Theta}) + f_z(t, te^{-i2\Theta}) = 0 \quad (2.15)$$

$$\gamma_1'(t) + e^{i2\Theta}t\alpha_1'(t) + \alpha_1(te^{i2\Theta}) + f_{\bar{z}}(te^{i2\Theta}, t) = 0$$

Здесь f_z означает производную от f по первому аргументу, а $f_{\bar{z}}$ – производную по второму аргументу. Исключение $\gamma'_1(t)$ из (2.15) приводит к дифференциальному функциональному уравнению с разнесенными аргументами

$$4i(\sin 2\Theta)t\alpha'_1(t) + \alpha_1(te^{i2\Theta}) - \alpha_1(te^{-i2\Theta}) = f_z(t, te^{-i2\Theta}) - f_{\bar{z}}(te^{i2\Theta}, t) \quad (2.16)$$

Решение соответствующего однородного уравнения можно представить в виде $\alpha_1(t) = c_1 t^m$, где c_1 – произвольная комплексная постоянная. Подстановка этого выражения в однородное уравнение приводит после сокращения к равенству

$$m \sin 2\Theta + \sin 2m\Theta = 0$$

которое при $m = k + il$ удовлетворено в силу (2.7), если величинам m, k, l возвращен индекс j .

Для получения частного решения уравнения (2.16) при каждом m следует изучить структуру функций f_z и $f_{\bar{z}}$. Из (2.12) следует, что при $\vartheta = \Theta$ эти функции представляют собой суммы, каждое слагаемое которых является произведением пяти сомножителей. Первым сомножителем является численный коэффициент, зависящий от m и \bar{m} , вторым – величина r^{2k+1} , третьим – одна из трех величин r^{-i2l} , 1 , re^{i2l} , четвертым – одна из трех величин $\exp(-2l\Theta)$, 1 , $\exp(2l\Theta)$ и пятым – величина $\exp(i\Theta)$ в одной из десяти степеней $-2k + 1, -3, -2k + 3, -1, -2k + 5, 2k - 5, 1, 2k - 3, 3, 2k - 1$. Все сомножители по условиям задачи ($0 \leq r \leq r_*$, $\Theta \leq \pi/4$) ограничены по модулю. Отсюда следует, что правая часть уравнения (2.16) может быть представлена в виде

$$f_z - f_{\bar{z}} = t^{2k+1}(at^{-i2l} + b + ct^{i2l})$$

где a, b, c – известные постоянные коэффициенты. Подстановка

$$\alpha_1(t) = t^{2k+1}(At^{-i2l} + B + Ct^{i2l})$$

с неизвестными A, B, C и сравнение коэффициентов при функциях $t^{2k+1-i2l}$, t^{2k+1} , $t^{2k+1+i2l}$ дают три равенства, каждое из которых определяет одну из величин A, B, C .

Таким образом, решение уравнения (2.16) можно представить в виде

$$\alpha_1(t) = c_1 t^m + t^{2k+1}(At^{-i2l} + B + Ct^{i2l}) \quad (2.17)$$

Полусумма уравнений (2.15) дает выражение для $\gamma'_1(t)$:

$$\gamma'_1(t) = -(\cos 2\Theta)t\alpha'_1(t) - \frac{1}{2}[\alpha_1(te^{i2\Theta}) + \alpha_1(te^{-i2\Theta}) + f_z(t, te^{-i2\Theta}) + f_{\bar{z}}(te^{i2\Theta}, t)]$$

Используя (2.17) и вспоминая вид функций f_z и $f_{\bar{z}}$, можно прийти к выводу, что

$$\gamma_1(t) = c_{10} + C_0 t^{m+1} + t^{2k+2}(A_* t^{-i2l} + B_* + C_* t^{i2l}) \quad (2.18)$$

где A_*, B_*, C_* – известные, а c_{10} и C_0 – произвольные постоянные.

При $v_1 \neq 0$ функции α_1 и γ_1 имеют ту же функциональную зависимость.

Если бы в (2.12) была сохранена четная функция, то повторение с ней проведенных здесь вычислений привело бы к членам с более высокими степенями r , поскольку $k_1 < p_1$.

Из (2.12), (2.17), (2.18) следует, что после выделения из ψ_1^* действительной части ψ_1 и суммирования по j функция ψ_1 принимает вид

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^{\infty} (\zeta_{1j} + \eta_{1j}) = 2c_{10} + (\mu_{11}E_1 + \nu_{11}F_1)r^{k_1+1} + \dots \quad (2.19)$$

Отброшенные члены содержат множители r в степенях, превышающих $k_1 + 1$. Величинам, у которых при выводе равенства (2.12) был отброшен индекс 1, теперь

этот индекс возвращен. Выделение действительной части Ψ_1 из Ψ_1^* , естественно, не добавляет члены с более низкими степенями r .

Итак, при учете в (2.1) только членов с индексами $g = 0$ и $g = 1$ функцию $\psi = \text{Re } \Psi$ в соответствии с (2.1), (2.5), (2.6) можно записать в виде

$$\psi = 2R c_{10} + [(\mu_{01} + R \mu_{11})E_1 + (v_{01} + R v_{11})F_1]r^{k_1+1} + \dots \quad (2.20)$$

где не приведены слагаемые с более высокими степенями R и r в степенях, превышающих $k_1 + 1$, причем здесь и далее подразумевается, что $\Theta = \pi/4$ (это значение было использовано при нахождении корней p_j, q_j, k_j, l_j).

Интегрирование уравнений для Ψ_g при $g = 2, 3, \dots$, которые получаются из (1.4) и (2.1), показывает, что решение Ψ_g , как и решение уравнения (2.2), имеет структуру формулы (2.12). Подчинение этого решения граничным условиям (1.6), как и при $g = 1$, связано с решением неоднородного уравнения типа (2.16), однородная часть которого совпадает с точностью до индексов с левой частью (2.16). Частное решение неоднородного уравнения представляет собой сумму членов со степенями r более высокими, чем $k_1 + 1$. В результате ψ_g при $g = 2, 3, \dots$ принимает вид

$$\psi_g = 2c_{g0} + (\mu_{g1}E_1 + v_{g1}F_1)r^{k_1+1} + \dots$$

Главная часть разложения ψ , если эта функция не является нечетной, теперь может быть записана в виде

$$\psi = 2c_0 + (\mu E_1 + v F_1)r^{k_1+1} + \dots \quad (2.21)$$

$$c_0 = \sum_{g=1}^{\infty} c_{g0} R^g, \quad \mu = \sum_{g=0}^{\infty} \mu_{g1} R^g, \quad v = \sum_{g=0}^{\infty} v_{g1} R^g$$

Постоянные c_0, μ, v не зависят от R , поскольку это суммы произведений степеней R на произвольные постоянные. Если ψ – нечетная функция, то главной частью разложения ψ оказывается

$$\psi = 2c_0 + (\kappa C_1 + \lambda D_1)r^{p_1+1} + \dots$$

где κ и λ – произвольные постоянные, а C_1 и D_1 даны в (2.5).

Величина c_0 определяется третьим условием из (2.13) и равна нулю.

3. Решение. В полярных координатах (r, ϑ) система уравнений, отвечающая исходному уравнению (1.1), может быть представлена в виде

$$\Psi_{rr} + \frac{1}{r}\Psi_r + \frac{1}{r^2}\Psi_{\vartheta\vartheta} = \omega, \quad \frac{R}{r}(\Psi_{\vartheta}\omega_r - \Psi_r\omega_{\vartheta}) = \omega_{rr} + \frac{1}{r}\omega_r + \frac{1}{r^2}\omega_{\vartheta\vartheta}$$

Для растяжения рассматриваемой области D при малых r используется замена переменной $\xi = \ln r$. Уравнения преобразуются к виду

$$\Psi_{\xi\xi} + \Psi_{\vartheta\vartheta} = e^{2\xi}\omega, \quad R(\Psi_{\vartheta}\omega_{\xi} - \Psi_{\xi}\omega_{\vartheta}) = \omega_{\xi\xi} + \omega_{\vartheta\vartheta} \quad (3.1)$$

С использованием асимптотики при малых r исходная задача получает новую формулировку.

Сопряжение главных членов асимптотики (2.21) с численным решением уравнений (3.1) проводится при $\xi = \xi_0 < \xi_*$, $-\Theta \leq \vartheta \leq \Theta$. На этой линии осуществляется совпадение асимптотических и расчетных величин ψ и ω . Первое уравнение из (3.1) и асимптотическое представление (2.21) функции ψ позволяют получить выражение

$$\omega = 8r^{k_1-1} \{ [(\mu k_1 - v l_1) \cos(l_1 \ln r) - (\mu l_1 + v k_1) \sin(l_1 \ln r)] \cos(k_1 - 1) \vartheta \text{ch } l_1 \vartheta + [(\mu l_1 - v k_1) \cos(l_1 \ln r) + (\mu k_1 + v l_1) \sin(l_1 \ln r)] \sin(k_1 - 1) \vartheta \text{sh } l_1 \vartheta \} \quad (3.2)$$

Для определения входящих сюда постоянных μ и ν вводятся дополнительные требования

$$I'_1 = I''_1, \quad I'_2 = I''_2 \quad (3.3)$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \psi_\xi d\vartheta, \quad I_2 = \int_0^{\pi/4} \vartheta \psi_\xi d\vartheta$$

Интегрирование проводится при $\xi = \xi_0$, штрих означает вычисление ψ_ξ на основе формулы (2.21), а два штриха – вычисление ψ_ξ на основе численного решения уравнений Навье – Стокса (3.1).

Для оценки правильности выбора значения ξ_0 вводится величина ε :

$$\varepsilon = \max |\psi'' - \psi'| / \max |\psi'| \quad (3.4)$$

где штрих и два штриха отмечают асимптотическое и расчетное значения соответственно, а максимумы отыскиваются в подобласти $\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0 + 0.5$, $0 \leq \vartheta \leq \Theta$. Предполагается, что величина ε , характеризующая отклонение расчетного ψ от асимптотического в указанной подобласти, задана, а выполнение равенства (3.4) означает выбор достаточно большого ξ_0 , обеспечивающего принятый признак точности расчета.

Теперь задача для не четных по ϑ функций (случай нечетных функций далее не рассматривается) заключается в решении уравнений (3.1) в прямоугольнике $\xi_0 \leq \xi \leq \xi_*$, $-\pi/4 \leq \vartheta \leq \pi/4$ и в нахождении величин μ и ν при заданных R , ξ_0 и ξ_* , при выполнении условий (3.3) и при граничных условиях

$$\psi = 0, \quad \psi_\vartheta = 0 \quad (\vartheta = \pm\pi/4) \quad (3.5)$$

$$\psi = \psi_*(\vartheta), \quad \psi_\xi = e^\xi \psi_{r_*}(\vartheta) \quad (\xi = \xi_* = \ln r_*)$$

Функции ψ и ω при $\xi = \xi_0$ определены в (2.21) при $c_0 = 0$ и в (3.2).

Задание условий при $\xi = \xi_0$ подразумевает использование при $\xi < \xi_0$ стоксовского течения. Это означает, что все три функции ψ , ψ_ξ , ω при $\xi = \xi_0$ известны. Для решения уравнений Навье – Стокса достаточно использовать два условия на замкнутой границе. В качестве таковых при $\xi = \xi_0$ здесь выбраны ψ и ω . Функция ψ_ξ как это видно из (3.3), используется для определения констант μ и ν , входящих в выражения для ψ и ω (2.21) и (3.2) при $\xi = \xi_0$. Следует заметить, что при численном решении уравнений (3.1) на границах области при вычислении ω через ψ и ψ_n , где n – нормаль к границе, будет использована формула Тома, применение которой делает задание ψ и ψ_n на границе и задание ψ и ω эквивалентными.

Выбор функций ψ_* и ψ_{r_*} будет проведен ниже.

Из (2.21) и (3.2) следует, что экстремальные значения $|\psi|$ и $|\omega|$ быстро убывают при уменьшении ξ . При численном решении задачи (3.1), (3.5) это может породить трудности. В окрестности ξ_0 вычислительная погрешность может быть сопоставима со значениями самих функций. Во избежание подобных затруднений вместо ψ и ω вводятся нормированные функции $\psi^* = \psi \exp(-3\xi)$ и $\omega^* = \omega \exp(-\xi)$. Их изменение при изменении ξ не должно быть существенным.

Уравнения (3.1) после введения функций ψ^* и ω^* принимают вид

$$\psi_{\xi\xi} + \psi_{\vartheta\vartheta} + 6\psi_\xi + 9\psi = \omega \quad (3.6)$$

$$\omega_{\xi\xi} + \omega_{\vartheta\vartheta} + 2\omega_\xi + \omega = R \exp(3\xi)[(\omega_\xi + \omega)\psi_\vartheta - (\psi_\xi + 3\psi)\omega_\vartheta]$$

где звездочки при ψ и ω опущены. Преобразование условий (3.2)–(3.5) не представляет труда и здесь не приводится.

Для численного решения задачи (3.6), (3.2) область D покрывается однородной сеткой. Все вторые производные в (3.6) аппроксимируются стандартными конечно-

разностными формулами второго порядка точности. Первые производные от ψ в (3.6.2) заменяются центральными разностями второго порядка точности, а первые производные от ω для увеличения устойчивости схемы аппроксимируются односторонними разностями первого порядка "по ветру". Для нахождения значений ω при $\vartheta = \pm\theta$ и $\xi = \xi_*$ используется формула Тома первого порядка точности [2].

Эта формула подразумевает, что в окрестности границы функция ω разлагается по нормали к границе в ряд Тейлора вплоть до члена со второй производной. В этом случае вторая производная берется из (3.6.1), и это позволяет выразить ω на границе через ψ и первую производную от ψ на границе. Первая производная от ψ по нормали к границе при $\xi = \xi_*$ задана, а первая производная от ψ по нормали к стенкам равна нулю в соответствии с условиями прилипания.

При решении системы алгебраических уравнений, полученной после дискретизации уравнений Навье – Стокса, используется итерационная процедура. Она состоит из определения граничных значений ω на новом итерационном слое и из получения новых итерационных значений ψ и ω с использованием метода верхней релаксации (ср. с [2]). Все величины на новом итерационном слое осредняются с предыдущими. Это обеспечивает устойчивость метода.

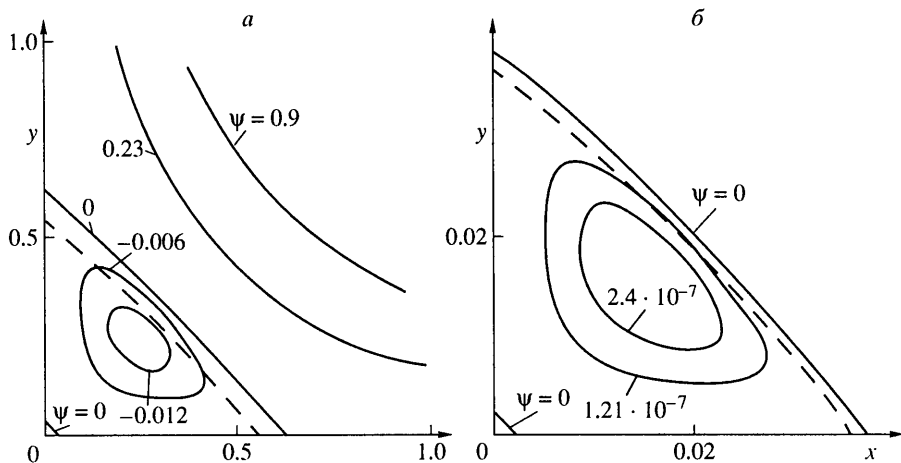
Из (3.2) следует, что условия задачи содержат две неизвестные константы μ и ν . Задача их определения оказывается непростой, даже если это определение проводится одновременно. Для построения примеров решения со сращиванием численных расчетов и главного члена асимптотики, которая приводит к бесконечной системе вихрей в угловой области, поставленная здесь задача переводится в обратную. Величины μ и ν задаются ($\mu = 1, \nu = 0$), функции Ψ_* и Ψ_{r*} при $\xi = \xi_*$ записываются в виде $\Psi_* = gG(\vartheta)$, $\Psi_{r*} = gJ(\vartheta)$, где G и J – заданные функции, а g – неизвестная постоянная, подлежащая определению, и, наконец, второе равенство из (3.3) отбрасывается (поскольку при преобразовании задачи две постоянные μ и ν задаются, а введена только одна новая неизвестная величина g). Конкретный выбор G и J будет сделан в заключительном разделе, где дано описание примеров расчетов.

Определение величины g проводится в следующем порядке. Вначале задается исходное значение g (например, 1) и решается краевая задача. Полученные данные позволяют найти соответствующее заданной величине g значение μ , которое обозначается через μ' . Это значение определяется первым равенством из (3.3), поскольку

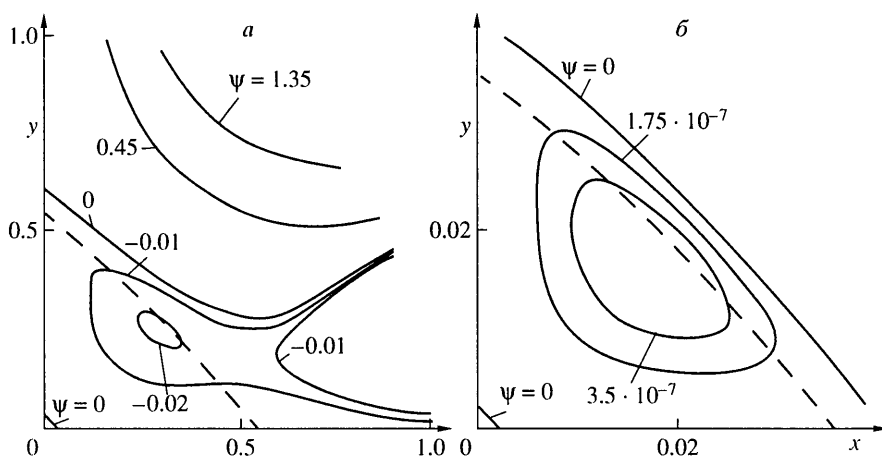
$$I_1' = \mu \int_0^{\pi/4} [E_1(\xi, \vartheta) \exp(k_1 + 1)\xi]_{\xi=\xi_0} d\vartheta \equiv \mu I_1'''$$

а I_1'' теперь известно из решения краевой задачи. Некоторого внимания требует то, что при вычислении I_1'' величина Ψ_{ξ} определяется численно через разность близких величин. Это делает задачу плохо обусловленной, и поэтому вместо непосредственного определения μ' из (3.3) проводится минимизация функционала $\|I_1'' - \mu I_1'''\| + \tau^2 \|\mu\|^2$ по μ в соответствующим образом нормированном пространстве (т.е. $C[0, \pi/4]$ или $L^2[0, \pi/4]$). Этот подход широко применяется при решении плохо обусловленных задач (см., например, [10]). Константа τ находится опытным путем (обычно она имеет порядок вычислительной погрешности). После определения μ' задается новое значение g и вычисления повторяются вплоть до получения $\mu = 1$ с приемлемой точностью.

4. Примеры. Целью примеров является показ течений в угловой каверне с бесконечной системой вихрей в угловой подобласти. Кроме того, функции G и J при $r = r_*$ будут выбраны так, чтобы в одном примере увидеть отличие течений при нулевом



Фиг. 1. Линии тока симметричного относительно линии $y = x$ течения в прямоугольном секторе: a – общий вид, b – увеличенный фрагмент. Штриховые линии – линии $\psi = 0$, определяемые асимптотикой (2.21) при $\mu = 1, \nu = 0, c_0 = 0$



Фиг. 2. Линии тока несимметричного относительно линии $y = x$ течения в прямоугольном секторе. Обозначения те же, что и на фиг. 1

и ненулевым числах Рейнольдса, а в другом примере проследить скорость затухания четной составляющей функции тока.

В обоих примерах $R = 10, \xi_0 = -11, \xi_* = 0$, но два замечания будут сделаны о последствиях изменения ξ_0 и R . Картины линий тока изображены на фиг. 1 и 2 после поворота этих рисунков (от их положения в результате вычислений) на $\pi/4$ вокруг начала координат против часовой стрелки; при этом стенки каверны совмещаются с осями координат.

В первом примере в качестве граничных при $\xi_* = 0$ взяты четные по ϑ функции $G = E_1(1, \vartheta) = K_1(\vartheta), J = [E_1(r, \vartheta)r^{k_1+1}]_r|_{r=1}$, где E_1 и K_1 содержатся в формулах (2.6). В результате расчетов на сетке 501×71 найдено $g = 0.89, \varepsilon = 0.003$. На фиг. 1, a показано все поле течения без малой окрестности начала координат. Сплошными

изображены линии тока течения с указанием величин ψ . Штриховая линия изображает линию $\psi = 0$, отвечающую главному члену асимптотики (2.6). На фиг. 1, б в увеличенном масштабе показан фрагмент течения, причем самая удаленная от начала координат линия $\psi = 0$ на фиг. 1, б воспроизводит ближайшую к началу координат линию $\psi = 0$ на фиг. 1, а.

Изображения фрагментов течения со следующими вихрями можно было бы продолжить по результатам расчетов при $\xi_0 = -11$, но конфигурация линий тока на них на глаз повторяет фиг. 1, б. Для количественной оценки изменений при переходе к следующим вихрям системы можно заметить, что в соответствии с (2.6) функция E_1 имеет по $l_1 \ln r$ полупериод π , а в точках, разделенных этим полупериодом, при одинаковых значениях ϑ модуль ψ меняется в $\exp[\pi(k_1 + 1)/l_1]$ раз, поэтому для получения следующего после изображенного на фиг. 1, б вихря величины $x = y = 0.02$ на фиг. 1, б следует заменить на $1.21 \cdot 10^{-3}$, а значения $\psi = 1.21 \cdot 10^{-7}$ и $2.4 \cdot 10^{-7}$ заменить на $-3.3 \cdot 10^{-12}$ и $-6.6 \cdot 10^{-12}$ соответственно. Наконец, для получения рисунка вихря, пересеченного линией $\xi_0 = -11$, указанные числа $1.21 \cdot 10^{-3}$, $-3.3 \cdot 10^{-12}$, $-6.6 \cdot 10^{-12}$ следует заменить на $7.3 \cdot 10^{-5}$, $9.2 \cdot 10^{-17}$, $1.83 \cdot 10^{-16}$ соответственно. О сдвиге линий тока при таких переходах можно судить, например, по тому, что линия $\psi = 0$, проходящая на фиг. 1, б около штриховой линии, на рисунке последнего полученного численным интегрированием вихря в увеличенном масштабе приблизилась бы к ней вдвое, т.е. расстояние между ними сократилось бы до $4 \cdot 10^{-6}$.

Эти результаты и проведение того же расчета при других ξ_0 создают представление о близости численного решения к асимптотике в окрестности ξ_0 . При $\xi_0 = -8$ на сетке 551×71 величина $\epsilon = 0.009$ и при $\xi_0 = -5$ на сетке 351×71 величина $\epsilon = 0.010$.

При $-\infty < \xi < \xi_0$ и $c_0 = 0$ главные члены асимптотики (2.21) описывают бесконечную систему вихрей, следующих за полученными численно.

Во втором примере граничные функции при $\xi_* = 0$ образованы суммой четной и нечетной функций

$$G = K_1(\vartheta) + C_1(\vartheta) = K_1(\vartheta) + A_1(\vartheta)$$

$$J = [r^{k_1+1} E_1(r, \vartheta) + r^{p_1+1} C_1(r, \vartheta)]_r |_{r=1}$$

причем входящие сюда функции содержатся в (2.6) и (2.5). Расчет с этими граничными условиями на сетке 501×71 дает $g = 0.74$, $\epsilon = 0.016$. Поле течения целиком показано на фиг. 2, а. Штриховые линии, как и в первом примере, отвечают значению $\psi = 0$ асимптотики. На фиг. 2, б в увеличенном масштабе изображен угловой фрагмент течения и снова самая удаленная от начала координат сплошная линия $\psi = 0$ на фиг. 2, б воспроизводит ближайшую к началу координат линию $\psi = 0$ на фиг. 2, а. Изображения следующих двух рассчитанных вихревых образований, как и в первом примере, очень близки к фиг. 2, б. Для получения количественного представления об этих вихрях следует значения $x = y = 0.02$, $\psi = 1.75 \cdot 10^{-7}$, $\psi = 3.5 \cdot 10^{-7}$ заменить соответственно для следующих вихрей на $1.21 \cdot 10^{-3}$, $-4.8 \cdot 10^{-12}$, $-9.6 \cdot 10^{-12}$ и на $7.3 \cdot 10^{-5}$, $1.32 \cdot 10^{-16}$, $2.6 \cdot 10^{-16}$. Этот пример показывает, в частности, быстрое подавление нечетной составляющей решения, проявляющей себя в несимметрии течения на фиг. 2, а.

Расчет первого примера при $R = 100$ вместо 10 при прочих неизменных условиях дал качественно те же результаты и показал, что заданные при $\xi = 0$ граничные условия проявляются при $\xi = -11$ более значительно.

Заключение. При течении вязкой несжимаемой жидкости показано образование бесконечных вихревых систем в окрестности точки излома границы области течения с углом $\pi/2$. Результат получен сращиванием численного решения уравнений Навье – Стокса с асимптотикой их решения в окрестности этой точки излома.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Копченов В.И., Крайко А.Н., Левин М.П.* К использованию существенно неравномерных сеток при численном решении уравнений Навье – Стокса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1982. Т. 22. № 6. С. 1457–1467.
2. *Щенров А.В.* Расчет одного течения вязкой жидкости на адаптивных сетках // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т. 32. № 6. С. 939–951.
3. *Кондратьев В.А.* Асимптотика решения уравнения Навье – Стокса в окрестности угловой точки границы // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 119–123.
4. *Dean W.R., Montagnon P.E.* On the steady motion of viscous liquid in a corner // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1949. V. 45. Pt 3. P. 389–394.
5. *Гринберг Г.А.* О методе, предложенном П.Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 2. С. 211–228.
6. *Moffatt H.K.* Viscous and resistive eddies near a sharp corner // J. Fluid Mech. 1964. V. 18. Pt 1. P. 1–18.
7. *Joseph D.D.* The convergence of biorthogonal series for biharmonic and Stokes flow edge problems. Pt I // SIAM J. Appl. Math. 1977. V. 33. № 2. P. 337–347.
8. *Joseph D.D., Sturges L.* The convergence of biorthogonal series for biharmonic and Stokes flow edge problems. Pt II // SIAM J. Appl. Math. 1978. V. 34. № 1. P. 7–26.
9. *Котеров В.Н., Шмыглевский Ю.Д.* О стоковских плоскопараллельных вихревых системах в каналах // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 5. С. 57–65.
10. *Ramm A.G., Shcheprov A.V.* Theory of ground-penetrating radar // J. Inverse and Ill-posed Probl. 1997. V. 5. № 4. P. 377–384.

Москва

Поступила в редакцию
20.III.2001