

УДК 532.5.013.4:532.546

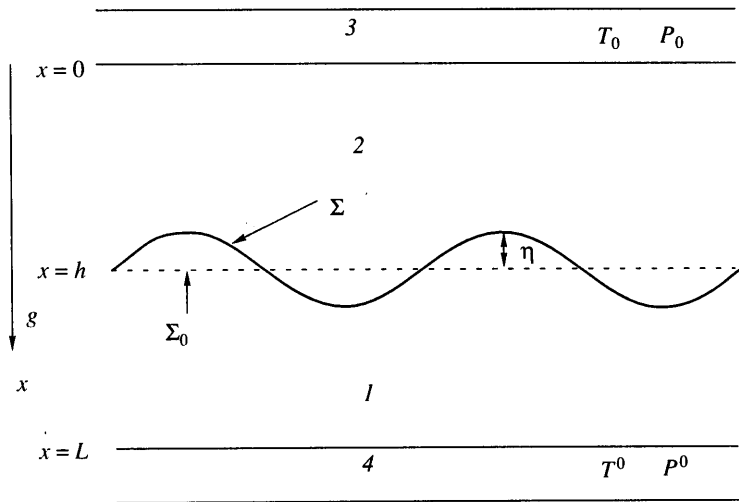
© 2002 г. А.Т. ИЛЬЧЕВ, Г.Г. ЦЫПКИН

## ГРАВИТАЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ВОДА-ПАР В ГИДРОТЕРМАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается устойчивость геотермальной системы в случае, когда слой воды находится над слоем перегретого пара в пласте с относительно низкой проницаемостью, расположенном между двумя высокопроницаемыми параллельными пластами. Получено решение стационарной ограниченной задачи с поверхностью фазового перехода, разделяющей области существования воды и пара, в предположении малости конвективного переноса энергии по сравнению с кондуктивным. Исследование нормальной устойчивости поверхности фазового перехода показывает, что устойчивые конфигурации в рассматриваемой геотермальной системе почти всегда существуют в диапазоне проницаемостей, ограниченном сверху величиной  $k \sim 10^{-15} \text{ м}^2$ . Критерий преобладания кондуктивного переноса энергии над конвективным, являющийся в то же время критерием существования базового решения, оказывается, таким образом, и критерием устойчивости поверхности раздела фаз в рассматриваемой геотермальной системе. Достаточно высокое значение проницаемости, удовлетворяющее этому критерию, позволяет объяснить существование устойчивых природных геотермальных резервуаров, где слой воды расположен над слоем пара.

Натурные исследования геотермальных систем показали, что во многих резервуарах реализуется ситуация, когда слой воды значительной толщины располагается над слоем перегретого пара [1, 2]. Существование такой конфигурации, с термодинамической точки зрения, объясняется наличием существенного температурного градиента, характерного для геотермальных систем. С другой стороны, исследования гидродинамической устойчивости показывают, что состояние, когда слой тяжелой жидкости располагается над слоем легкой жидкости, является неустойчивым [3]. Были выдвинуты различные гипотезы качественного характера о физических механизмах устойчивости геотермальных систем, содержащих слой воды над слоем пара [2].

В работе [4] был приведен пример такой геотермальной системы, когда слой воды располагается над слоем пара, и исследовалась линейная устойчивость границы раздела фазовых переходов вода – пар. Предполагалось, что нижняя граница есть поверхность контакта непроницаемых пород и проницаемой области, насыщенной паром, в невозмущенном состоянии фазы неподвижны, а фазовый переход отсутствует. Численные исследования полученного дисперсионного соотношения показали, что рассматриваемая конфигурация может быть как устойчивой, так и неустойчивой. Было найдено критическое значение коэффициента проницаемости  $k \sim 4 \cdot 10^{-17} \text{ м}^2$ , разделяющего области устойчивого и неустойчивого состояний геотермальной системы. Для проницаемостей выше критического значения состояние системы является неустойчивым. Было отмечено, что найденное критическое значение на порядок меньше, чем характерное значение проницаемости геотермальных систем и, таким образом, устойчивость большинства систем не получила объяснения.



Фиг. 1. Геометрия геотермального резервуара: 1 – низкопроницаемая область, насыщенная паром; 2 – водонасыщенная низкопроницаемая область; 3 – водонасыщенный высокопроницаемый слой; 4 – высокопроницаемый слой, насыщенный паром;  $\Sigma_0$  – невозмущенная поверхность раздела  $x = h$ ;  $\Sigma$  – возмущенная поверхность раздела  $x = h + \eta$ .

В настоящей работе предложен более сложный пример геотермальной системы, учитывающий движение фаз и фазовый переход в невозмущенном состоянии. Получено решение стационарной ограниченной задачи с поверхностью фазового перехода вода – пар в предположении малости конвективного переноса энергии по сравнению с кондуктивным. Проведенное исследование линейной устойчивости этого решения показывает, что в диапазоне параметров, в котором это решение существует, оно практически всегда устойчиво. Неустойчиво только вырожденное решение, представляющее собой решение покоя в невозмущенном состоянии, вероятность физической реализации которого ничтожно мала. Найдены устойчивые стационарные решения, реализующиеся при проницаемостях  $k \sim 10^{-15} \text{ м}^2$ , которые характерны для геотермальных систем. Представленный критерий существования стационарного решения, таким образом, совпадает с критерием устойчивости геотермальной системы. Механизм устойчивости рассматриваемого класса геотермальных систем имеет ясный физический смысл, который заключается в преобладании кондуктивного переноса энергии над конвективным.

1. Рассмотрим высокотемпературный геотермальный резервуар, состоящий из двух высокопроницаемых параллельных пластов, разделенных низкопроницаемым пластом. Предположим, что термодинамические условия таковы, что верхний высокопроницаемый пласт заполнен водой, а нижний – паром. Тогда в низкопроницаемом слое существует поверхность фазовых переходов, разделяющая области воды и пара (фиг. 1). В зависимости от значений давления в высокопроницаемых пластах могут иметь место либо режим испарения, когда вода движется вниз, либо режим конденсации, соответствующий движению пара вверх или режим покоя, когда фазовые переходы отсутствуют, а распределение давления в высокопроницаемом пласте совпадает с гидростатическим.

Процессы тепломассопереноса при условии равновесных фазовых переходов описываются законами сохранения масс и энергии, законом Дарси для воды и пара, учитывающим силу тяжести, уравнениями состояния и термодинамическими соотно-

шениями [5]. Для простоты, следуя [3, 4], полагаем, что вода и пар несжимаемы. Тогда система основных уравнений для обеих областей имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v_j &= 0, \quad v_j = -\frac{k}{\mu_j} (\operatorname{grad} P - \rho_j g), \quad j = v, w \\ (\rho C)_{1,2} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_j C_j v_j \operatorname{grad} T &= \operatorname{div}(\lambda_{1,2} \operatorname{grad} T) \\ \lambda_{1,2} &= m \lambda_j + (1-m) \lambda_s, \quad (\rho C)_{1,2} = m \rho_j C_j + (1-m) \rho_s C_s \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $v$  – скорость фильтрации,  $m$  – пористость,  $k$  – проницаемость,  $\mu$  – вязкость,  $P$  – давление,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\rho$  – плотность,  $C$  – теплоемкость,  $T$  – температура,  $\lambda$  – теплопроводность. Индексы:  $w, v, s$  – вода, пар и скелет пористой среды соответственно, 1 – область пара, 2 – область воды.

Условия на межфазной границе формулируются как условия термодинамически равновесного скачка функции водонасыщенности [6] и с учетом силы тяжести имеют вид

$$\begin{aligned} T_+ &= T_- = T_*, \quad P_+ = P_- = P_* \\ \ln \frac{P_*}{P_a} &= A + \frac{B}{T_*}, \quad A = 12,512, \quad B = -4611,73, \quad P_a = 10^5 \text{ Па} \\ m \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right) V_n &= \frac{k}{\mu_v} \frac{\rho_v}{\rho_w} (\operatorname{grad} P)_{n+} - \frac{k}{\mu_w} (\operatorname{grad} P)_{n-} + \frac{k}{\mu_w} \rho_w g \left( 1 - \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_v^2}{\rho_w^2} \right) \\ m q \rho_w V_n &= \lambda_- (\operatorname{grad} T)_{n-} - \lambda_+ (\operatorname{grad} T)_{n+} - \frac{k q \rho_w}{\mu_w} ((\operatorname{grad} P)_{n-} - \rho_w g) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $V$  – скорость межфазной поверхности,  $q$  – удельная теплота испарения. Индексы:  $n$  – нормаль, плюс и минус – величины относящиеся к области пара и жидкости соответственно, \* – значения величин на фронте.

Рассмотрим класс течений, когда конвективным переносом тепла в (1.1) можно пренебречь. Отношение конвективного слагаемого к кондуктивному в уравнении энергии в (1.1) для области воды определяется безразмерным параметром

$$\frac{\rho_w C_w}{\mu_w \lambda_1} k (\delta P - \rho_w g l)$$

в котором проницаемость и вариация давления могут сильно изменяться, в то время как остальные физические параметры меняются незначительно, поэтому условие малости конвективного переноса тепла после подстановки характерных значений параметров может быть записано в виде

$$\frac{\rho_w C_w}{\mu_w \lambda_1} k |\delta P - \rho_w g l| \sim 10^{10} \text{ н}^{-1} \quad k |\delta P - \rho_w g l| \ll 1 \quad \text{или} \quad k |\delta P - \rho_w g l| \ll 10^{-10} \text{ н}$$

где  $l$  – характерный масштаб длины.

Аналогично для области пара имеем

$$\frac{\rho_v C_p}{\mu_v \lambda_2} k |\delta P - \rho_v g l| \sim 0,33 \cdot 10^8 \text{ н}^{-1} \quad k |\delta P - \rho_w g l| \ll 1 \quad \text{или}$$

$$k |\delta P - \rho_w g l| \ll 3 \cdot 10^{-9} \text{ н}$$

Отсюда следует, что условие малости конвективного переноса тепла в области пара является более слабым и выполняется автоматически при условии малости конвективного переноса в области воды, если в качестве вариации давления брать разность давлений между высокопроницаемыми пластами, а характерный линейный размер представляет собой расстояние между ними. Тогда уравнения энергии сводятся к обычному уравнению теплопроводности для обеих областей. Если же в качестве вариации давления рассматривать изменения давления в каждой из однофазных областей, то могут реализовываться режимы фазовых переходов, когда градиент давления пара существенно больше градиента давления воды. Тогда конвективный перенос в области пара превосходит конвективный перенос в области воды и условия малости конвективного переноса следует рассматривать в каждой области независимо. В этом случае в качестве характерного линейного размера берется размер соответствующей однофазной области.

2. Рассмотрим одномерную задачу о перетоке фаз. Предположение об одномерности применительно к реальной ситуации имеет место, если характерные линейные масштабы, на которых меняются давления в высокопроницаемых пластах, много больше толщины  $L$  низкопроницаемого слоя. Пусть верхний водонасыщенный пласт  $x < 0$  с давлением  $P_0$  имеет температуру  $T_0$ , а нижний  $x > L$  – с давлением  $P^0$  имеет температуру  $T^0$ . Отметим, что толщина обоих высокопроницаемых пластов не существенна для формулируемой задачи. Если давления и температуры в обоих высокопроницаемых пластах постоянны (постоянство температуры обеспечивается притоком тепла от окружающих пород, а постоянство давления – высокой проницаемостью верхнего и нижнего пласта), то фронт фазовых переходов, находящийся в низкопроницаемом слое  $0 < x < L$ , займет некоторое равновесное положение  $x = h$  и задача будет иметь стационарное решение. Область  $0 < x < h$  будет насыщена водой, а область  $h < x < L$  – паром (фиг. 1). Положение межфазной границы  $x = h$ , а также значения температуры  $T_*$  и давления  $P_*$  на этой границе являются неизвестными величинами и находятся в процессе решения задачи.

Системы уравнений для искомых функций давления и температуры в областях воды и пара в стационарном случае при условии малости конвективного переноса энергии имеют вид

$$P''(x) = 0, \quad T''(x) = 0$$

Законы сохранения массы и энергии на границе фазового перехода в стационарном случае принимают форму

$$\frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_v}{\rho_w} P'_+ - P'_- + \rho_w g \left( 1 - \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_v^2}{\rho_w^2} \right) = 0$$

$$\lambda_+ T'_+ - \lambda_- T'_- + \frac{kq\rho_w}{\mu_w} (P'_- - \rho_w g) = 0$$

где штрих обозначает производную по  $x$ . Вместе с условиями термодинамического равновесия на поверхности фазового перехода данные условия составляют полную систему соотношений на фронте.

Решения в областях воды и пара имеют соответственно вид

$$P = P_0 + \frac{P_* - P_0}{h} x, \quad T = T_0 + \frac{T_* - T_0}{h} x$$

$$P = \frac{P^0 - P_*}{L - h} x + \frac{LP_* - hP^0}{L - h}, \quad T = \frac{T^0 - T_*}{L - h} x + \frac{LT_* - hT^0}{L - h} \quad (2.1)$$

Подставляя решение (2.1) в стационарные условия на границе фазового перехода, получаем систему уравнений для неизвестных величин  $T_*$ ,  $P_*$  и  $h$

$$\frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_v}{\rho_w} \frac{P^0 - P_*}{L - h} - \frac{P_* - P_0}{h} + \rho_w g \left[ 1 - \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_v^2}{\rho_w^2} \right] = 0$$

$$\lambda_+ \frac{T^0 - T_*}{L - h} - \lambda_- \frac{T_* - T_0}{h} + \frac{kq\rho_w}{\mu_w} \left[ \frac{P_* - P_0}{h} - \rho_w g \right] = 0$$

$$P_* = f(T_*) = P_a \exp \left( A + \frac{B}{T_*} \right) \quad (2.2)$$

Рассмотрим характерные режимы стационарных течений реализующихся в геотермальных системах при следующих значениях параметров:  $\mu_w = 1,48 \cdot 10^{-4}$  Па·с,  $\mu_v = 1,59 \cdot 10^{-5}$  Па·с,  $\rho_w = 888,66$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_v = 4,82$  кг/м<sup>3</sup>,  $q = 2 \cdot 10^6$  Дж/кг,  $L = 10$  м,  $C_s = 10^3$  Дж/(кг·К),  $\lambda_s = 2$  Вт/(м·К),  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

В силу того что при не очень больших значениях пористости (а в типичных геотермальных системах она невелика) теплоемкость и теплопроводность пород определяются соответствующими параметрами скелета, для простоты полагаем  $\Lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_s$  и  $C_1 = C_2 = C_s$ . Рассмотрим некоторые особенности течений в стационарном случае, особенно те, которые представляют интерес для исследования устойчивости.

В зависимости от значений температуры и давления в высокопроницаемых пластах могут реализовываться различные режимы фазовых переходов, соответствующие различным направлениям движения фаз, т.е. перетоку теплоносителя из верхнего слоя в нижний или наоборот. В первом случае процесс сопровождается испарением воды, а во втором – конденсацией пара.

Например, при  $T_0 = 450$  К,  $T^0 = 457$  К,  $P_0 = P^0 = 10^6$  Па и  $k = 10^{-16}$  м<sup>2</sup> получаем следующие значения искомых величин  $T_* = 454,21$  К,  $P_* = 1,0578 \cdot 10^6$  Па и  $h = 8,4$  м. Здесь вода движется вниз под действием сил тяжести, попадает в область с большей температурой и испаряется на фронте фазового перехода, что приводит к росту давления на поверхности раздела, которое превышает значения давлений на границах, но меньше гидростатического. Образующийся пар движется от фронта фазового перехода и перетекает из низкопроницаемого слоя в высокопроницаемый пласт.

Если увеличить давление в нижнем пласте, насыщенном паром, до значения  $P^0 = 1,1 \cdot 10^6$  Па, то решение системы уравнений на границе дает следующие значения:  $T_* = 453$  К,  $P_* = 1,0294 \cdot 10^6$  Па и  $h = 3,19$  м. Здесь давление на поверхности раздела уменьшилось по сравнению с предыдущим случаем, хотя давление на нижней границе увеличилось. Этот факт обусловлен тем, что в последнем случае имеет место конденсация пара, вызванная движением пара вверх из нижнего пласта и его перемещением в область меньших температур. Вода также движется вверх, перетекая из области низкопроницаемых пород в водонасыщенный высокопроницаемый пласт.

Возможен также третий случай, соответствующий отсутствию движения и фазовых переходов, являющийся вырожденным решением, для реализации которого требуется определенное соответствие между распределениями давления и температуры. Распределение давления в этом случае должно совпадать с гидростатическим. Это решение может быть построено, задавая положение поверхности фазовых вращений.

Пусть давление в верхнем водонасыщенном слое  $P_0 = 10^6$  Па, а поверхность раздела фаз находится на одинаковом расстоянии от высокопроницаемых пластов, т.е.  $h = 5$  м, при  $L = 10$  м. Тогда отсюда однозначно находится давление на поверхности раздела, которое отличается от граничного, на гидростатическое (фазовые переходы

отсутствуют, так как нет движения)  $P_* = 1,043544 \cdot 10^6$  Па. Далее, добавляя гидростатическое давление пара, получаем давление в нижнем высокопроницаемом пласте  $P^0 = 1,04378 \cdot 10^6$  Па. Такие значения давления на границах соответствуют динамическому покою. Чтобы удовлетворить термодинамическим условиям, необходимо выбрать такое распределение температуры, чтобы значение на границе лежало на кривой Клапейрона, т.е. на кривой фазового равновесия вода – пар при давлении  $P_* = 1,043544 \cdot 10^6$  Па. Это значение температуры однозначно определено и равно  $T_* = 453,6072$  К. Соответственно температура на верхней границе должна быть ниже температуры кипения воды  $T_0 < T_f(P_0) = 451,7134$  К, а на нижней границе выше температуры испарения  $T^0 > T_f(P^0) = 453,6173$  К. Произвол имеется только в выборе градиента температур. Например, задавая  $T_0 = 450$  К и используя отсутствие фазовых переходов (непрерывность производных температуры на поверхности раздела), а также известное значение температуры на поверхности раздела фаз, получаем следующее значение для температуры на нижней границе:  $T^0 = 457,2144$  К. Это решение реализуется при всех значениях коэффициента проницаемости.

Представленное решение покоя реализуется только при указанных граничных значениях давления и совпадении температуры пласта с температурой фазового перехода, вычисленной по распределению давления на поверхности раздела. Изменение значений давления на границах или распределения температуры приводит к решению с движением фаз. Это означает, что решения покоя представляют собой вырожденные изолированные решения в том смысле, что малое изменение граничных условий приводит к решению с движением фаз. В зависимости от того, уменьшено или увеличено давление, реализуется режим испарения или конденсации, соответственно положение поверхности раздела смещается вниз или вверх.

Существует также режим, качественно отличающийся от перечисленных выше, для которого функция температуры имеет минимальное значение на границе раздела. Этот режим движения реализуется в геотермальных системах с малыми градиентами температуры, когда имеет место испарение жидкой фазы. Так, при следующих граничных значениях температуры  $T_0 = 450$  К,  $T^0 = 450$  К, давления  $P_0 = 10^6$  Па,  $P^0 = 6 \cdot 10^5$  Па и проницаемости  $k = 0,5 \cdot 10^{-16}$  м<sup>2</sup> решение системы трансцендентных уравнений дает значения искомых величин  $T_* = 445,64$  К,  $P_* = 8,7 \cdot 10^5$  Па, которые свидетельствуют о падении температуры на фронте фазового перехода из-за поглощения тепла при испарении.

Следует проверить также справедливость предположения о малости конвективного переноса энергии для полученных решений. В первом примере, как показывают вычисления, кондуктивный поток тепла на два порядка превосходит конвективный в обеих областях. Во втором примере – соответственно на три порядка в области воды и на два порядка в области пара. В случае решения покоя конвективный перенос энергии отсутствует вообще, а в последнем примере конвективный перенос в обеих зонах приблизительно одинаков и на порядок меньше кондуктивного.

3. Исследуем устойчивость относительно малых возмущений найденного стационарного решения, содержащего поверхность фазового перехода. Системы основных уравнений, линеаризованные вокруг стационарного решения при условии малости конвективного переноса энергии в обеих областях, имеют вид:

$$\Delta P = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a_{1,2} \Delta T, \quad a_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2}}{(\rho C)_{1,2}}, \quad 0 < x < h, \quad h < x < L \quad (3.1)$$

Здесь и далее для простоты предполагаем, что теплоемкости и теплопроводности в обеих областях определяются соответствующими параметрами скелета пористой среды  $a = a_1 = a_2$ .

Граничные условия для возмущений принимают форму

$$P = 0, \quad T = 0, \quad (x = 0, L)$$

$$P_- = P_+ + \Gamma_1 \eta, \quad \Gamma_1 = \left( \frac{P_0}{h} + \frac{P^0 h - P_* L}{h(L-h)} \right), \quad x = h$$

$$T_- = T_+ + \Gamma_2 \eta, \quad \Gamma_2 = \left( \frac{T_0}{h} + \frac{T^0 h - T_* L}{h(L-h)} \right), \quad x = h$$

$$P_- = \left( \frac{\partial f(T)}{\partial T} \right)_{T=T_*} T_- + \left[ \left( \frac{\partial f(T)}{\partial T} \right)_{T=T_*} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_- - \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_- \right] \eta = -\Gamma T_- - \Gamma_0 \eta,$$

$$\Gamma = \frac{P_* B}{T_*^2}, \quad \Gamma_0 = \frac{P_* B}{T_*^2} \frac{T_* - T_0}{h} + \frac{P_* - P_0}{h}, \quad x = h$$

$$m(1-R) \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{k}{\mu_v} R \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_+ - \frac{k}{\mu_w} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_-, \quad R = \frac{\rho_v}{\rho_w}, \quad x = h$$

$$mq\rho_w \frac{\partial \eta}{\partial t} = \lambda_- \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_- - \lambda_+ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_+ - \frac{kq\rho_w}{\mu_w} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_-, \quad x = h \quad (3.2)$$

где  $x = h + \eta(t, y)$  – уравнение поверхности фазового перехода. Предположим далее, что температуры и давления имеют вид  $g(x) \exp(\sigma t + i\kappa y)$ . Тогда из условия существования нетривиального решения задачи (3.1), (3.2), получим дисперсионное соотношение

$$F(\sigma, \kappa) \equiv \alpha \operatorname{cth}[\alpha(L-h)] \left[ \Gamma_3 \kappa \frac{k}{\mu_w} \operatorname{cth}(\kappa h) + \Gamma_4 R \kappa \frac{k}{\mu_v} \operatorname{cth}[\kappa(L-h)] - m(1-R)\sigma \right] +$$

$$+ \alpha \operatorname{cth}(\alpha h) \left[ \Gamma_5 R \kappa \frac{k}{\mu_v} \operatorname{cth}[\kappa(L-h)] + \Gamma_0 \kappa \frac{k}{\mu_w} \operatorname{cth}(\kappa h) - m(1-R)\sigma \right] + \frac{\Gamma q \rho_w k R \kappa}{\lambda}$$

$$\left[ \sigma \frac{m}{\mu_v} \operatorname{cth}[\kappa(L-h)] + \sigma \frac{m}{\mu_w} \operatorname{cth}(\kappa h) + \Gamma_1 \kappa \frac{k}{\mu_v \mu_w} \operatorname{cth}(\kappa h) \operatorname{cth}[\kappa(L-h)] \right] = 0,$$

$$\Gamma_3 = \Gamma \frac{T^0 - T_*}{L-h} + \frac{P_* - P_0}{h}, \quad \Gamma_4 = \Gamma \frac{T^0 - T_*}{L-h} + \frac{P^0 - P_*}{L-h}, \quad \Gamma_5 = \Gamma \frac{T_* - T_0}{h} + \frac{P^0 - P_*}{L-h},$$

$$\alpha = \sqrt{\kappa^2 + \frac{\sigma}{a}}$$

Если для любого фиксированного действительного  $\kappa$  существуют комплексные корни  $\sigma$  дисперсионного соотношения  $F(\sigma, \kappa) = 0$  с положительной действительной частью, то соответствующие возмущения будут экспоненциально расти со временем и базовое стационарное решение (2.1) будет неустойчиво.

Трансцендентная функция  $F(\sigma) = F(\sigma, \kappa)$  при фиксированном действительном  $\kappa$  (в силу инвариантности дисперсионного уравнения относительно замены  $\kappa \rightarrow -\kappa$  можно ограничиться рассмотрением только положительных  $\kappa$ ) аналитична всюду в комплексной плоскости  $\sigma$ , кроме отрицательной вещественной полуоси, где имеет изолированные полюса, отделенные от нуля.

Рассмотрим левую часть полученного дисперсионного соотношения как функцию комплексного переменного  $F(\sigma)$ . Нули этой функции соответствуют корням дисперсионного соотношения. Отсутствие нулей с положительной действительной частью,

которая дает экспоненциальный рост малых возмущений, свидетельствует об устойчивости решения. Для исследования устойчивости воспользуемся принципом аргумента [7], согласно которому разность между числом нулей и полюсов функции  $F(\sigma)$  внутри некоторого контура  $C$  на плоскости ( $\text{Re}(\sigma)$ ,  $\text{Im}(\sigma)$ ) равна числу оборотов радиуса-вектора на плоскости ( $\text{Re} F(\sigma)$ ,  $\text{Im} F(\sigma)$ ) при обходе контура  $C_1$ , являющегося образом  $C$  при отображении  $F(\sigma)$ .

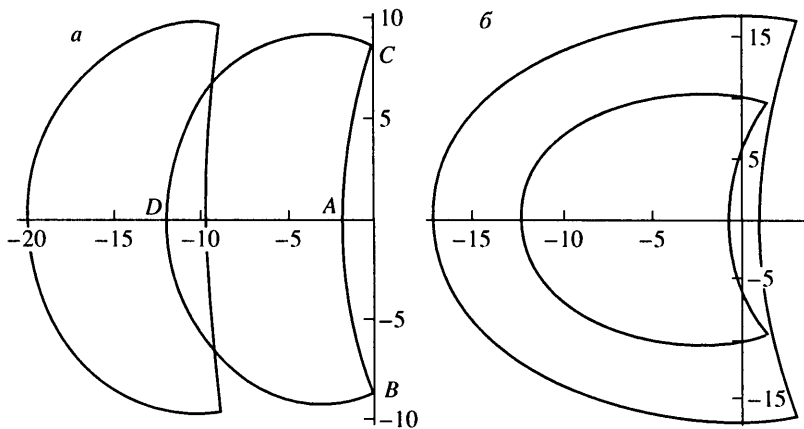
В качестве контура  $C$  выберем контур, состоящий из мнимой оси и полуокружности с центром в начале координат, лежащего в первом и четвертом квадранте. В силу аналитических свойств функции  $F(\sigma)$ , отмеченных выше, она не имеет особенностей в правой полуплоскости. Если  $F(\sigma)$  имеет нули в правой полуплоскости, то выбором достаточно большого радиуса можно добиться того, чтобы все нули и полюса лежали внутри данного контура  $C$ . Контур  $C$ , представляющий собой объединение отрезка мнимой оси, симметричного вокруг нуля и полуокружности радиуса  $R$  с центром в нуле:  $c_0 = \{\sigma = y, |y| \leq R\} \cup c = \{\sigma = R \exp \varphi, -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$ , где  $y$  – вещественная переменная, при отображении  $\sigma \rightarrow F(\sigma)$  переходит в контур  $C_1 = F(c_0) \cup F(c)$ , где составляющие компоненты  $C_1$  задаются уравнениями в комплексной плоскости  $F(\sigma)$ :  $F(c_0) = r_1(y) \exp[\varphi_1(y)]$ ,  $F(c) = r_2(\varphi) \exp[\varphi_2(\varphi)]$  с конкретными функциями  $r_i, \varphi_i, i = 1, 2$ .

Были проведены расчеты устойчивости стационарного решения (2.1) для большого числа граничных значений давления и проницаемости, удовлетворяющих критерию малости конвективного переноса энергии по сравнению с кондуктивным. При наличии движения фаз все эти режимы устойчивы. При этом была выявлена следующая закономерность. Чем дальше равновесное положение поверхности фазового перехода  $x = h$ , определяемое из трансцендентных соотношений (2.2), отклоняется от серединного положения в рассматриваемом геотермальном пласте, когда толщина слоя воды совпадает с толщиной слоя пара, тем устойчивее оказывается эта поверхность. Если базовое решение (2.1) соответствует состоянию покоя, то наименее устойчивая конфигурация, где реализуется в точности серединное положение поверхности раздела воды и пара, строится достаточно просто в силу того факта, что в случае вырождения движения положение этой поверхности можно задать априори. Для данного решения существует критическое значение проницаемости  $k_{cr} = 2,5 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$ , разделяющее устойчивые и неустойчивые режимы покоя. При проницаемостях ниже критической решение устойчиво, а для проницаемостей выше критической – неустойчиво.

На фиг. 2, а представлены контуры  $C_1$  соответствующие первым двум режимам с движением фаз в невозмущенном состоянии, приведенным в разделе 2 для фиксированного значения волнового числа  $\kappa$ . Форма контуров, представленных на фиг. 2, типична для абсолютно всех режимов, рассматриваемых в данной работе. Эти контуры состоят из двух частей: дуги  $BAC$ , которая представляет собой образ  $F(c_0)$  прямолинейной составляющей контура  $C$  в комплексной плоскости  $\sigma$ , и дуги  $CDB$ , являющейся образом  $F(c)$  полуокружности контура  $C$ . При этом принципиальный факт, обуславливающий отсутствие нулей у  $F(\sigma)$  в силу принципа аргумента независимо от радиуса контура  $C$ , представляет собой отрицательность ненулевой координаты точки  $A$ , которая является общей для образов отрезков мнимой полуоси контура  $C$ , лежащих выше и ниже начала координат ( $y = 0$ ). Как показывают расчеты, положение точки  $A$  зависит от декремента затухания. Чем меньше расстояние от точки  $A$  до нуля, тем меньше декремент затухания.

На фиг. 2, б представлены два контура, соответствующие рассмотренному выше режиму покоя при различных значениях проницаемости и фиксированного  $\kappa$ . Качественный вид контуров  $C_1$  одинаков для всех  $\kappa$ , и отрицательность точки  $A$  всегда имеет место. Более того, при достаточно больших  $\kappa$  ( $\kappa \sim 30$ ) контуры  $C_1$  для разных значений  $\kappa$  перестают быть различимыми на рисунке и координаты точки  $A$  совпадают, по крайней мере в третьем знаке после запятой.





Фиг. 2. Взаимное расположение контуров  $C_1$  на комплексной плоскости  $F(\sigma)$  для режимов конденсации (левый контур) и испарения (а); устойчивого (внутренний контур) и неустойчивого состояния покоя (б)

Неустойчивое состояние покоя оказывается физически негрубым. Иными словами, малые возмущения граничных значений давления, выводящие систему из состояния покоя, приводят к устойчивому режиму. Расчеты показывают, что изменение в шестой значащей цифре в граничном условии для давления переводит неустойчивое состояние покоя в устойчивое решение с движением фаз в невозмущенном состоянии. Подобное положение говорит о том, что окрестность собственно неустойчивых решений вокруг неустойчивого состояния без движения фаз очень мала и что само это состояние покоя можно рассматривать как изолированное среди множества устойчивых состояний и потому практически нереализуемое.

Проведенное в [4] исследование предполагает отсутствие комплексных корней для декремента затухания  $\sigma$ , что, вообще говоря, требует обоснования.

**Заключение.** Дано стационарное решение задачи о движении фаз в геотермальной системе, когда слой воды располагается над слоем пара и предполагается малость конвективного переноса энергии по сравнению с кондуктивным. Проведенное исследование нормальной устойчивости решения показывает, что в допустимом диапазоне параметров решение всегда устойчиво, за исключением изолированного решения покоя при проницаемостях  $k > 2.5 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$ . Таким образом, критерием устойчивости является критерий малости конвективного переноса тепла. Этот факт позволяет понять физический механизм устойчивости, который состоит в том, что возмущения границы и проникновение водяных "пальцев" в область пара предотвращается доминирующим кондуктивным подтоком тепла, приводящим к испарению жидкой фазы. Расчеты показывают, что существуют устойчивые решения, соответствующие значениям проницаемости  $k \sim 10^{-15} \text{ м}^2$ , что на полтора порядка превосходят критическое значение, приведенное в работе [4]. При более высоких проницаемостях роль конвективного переноса тепла возрастает и использование невозмущенного решения становится неправомерным. Однако естественно выдвинуть предположение, что увеличение проницаемости не сразу приведет к возникновению неустойчивости, т.е. в реальности слой воды может устойчиво существовать над слоем пара в геотермальных системах и при более высоких проницаемостях пород в течение некоторого времени.

Авторы выражают благодарность А.Г. Куликовскому за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 99-01-0277).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *White D.E., Muffler L.J.P., Truesdell A.H.* Vapor-dominated hydrothermal systems compared with hot water systems // *Econ. Geol.* 1971. V. 66. P. 75–97.
2. *Grant M.A.* Geothermal reservoir modeling // *Geothermics.* 1983. V. 12. № 4. P. 251–263.
3. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford; London: Univ. Press., 1968. 652 p.
4. *Schubert G., Straus J.M.* Gravitational stability of water over steam in vapor-dominated geothermal systems // *J. Geophys Res.* 1980. V. 85. № B11. P. 6505–6512.
5. *O'Sullivan M.J.* Geothermal reservoir simulation // *Intern. J. Energy Res.* 1985. V. 9. № 3. P. 319–332.
6. *Цыпкин Г.Г.* О возникновении двух подвижных границ фазовых переходов при добыче пара из гидротермального водонасыщенного пласта // *Докл. РАН.* 1994. Т. 337. № 6. С. 748–751
7. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч. I. М.: Наука, 1985. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию  
2.III.2001