

УДК 532.516.013.4:532.69

© 2001 г. О.И. КАРПИЛОВА, Г.М. СИСОЕВ, В.Я. ШКАДОВ

К ЗАДАЧЕ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЕНКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С РАСТВОРЕННЫМ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫМ ВЕЩЕСТВОМ

Исследуется линейная устойчивость стекающей по вертикальной поверхности пленки вязкой жидкости с растворенным поверхностно-активным веществом (ПАВ). Используемая модель учитывает процессы диффузии, адсорбции – десорбции и испарения ПАВ. Вычислены три вида неустойчивых возмущений, исследованы границы областей их существования в пространстве свободных параметров, определяющих математическую модель течения.

Наличие неравномерно распределенного ПАВ в пленке жидкости приводит к переменной коэффициенту поверхностного натяжения вдоль ее свободной поверхности, что вызывает касательные напряжения на ней в дополнение к самоиндуцированному давлению капиллярных сил, характерному для волновых движений. Эти касательные напряжения, пропорциональные числу Марангони (Ma), влияют на движение жидкости, развитие неустойчивостей и на процесс переноса ПАВ.

Впервые линейная устойчивость стекающей по вертикальной поверхности пленки жидкости с неравномерным распределением ПАВ рассматривалась в [1]. В модели учитывается испарение ПАВ из объема жидкости в окружающий газ, которое характеризуется числом Био (Bi), и предполагается, что концентрация Γ ПАВ на свободной поверхности в адсорбированном подслое постоянна. Показано, что при небольших и умеренных числах Рейнольдса (Re) в стекающих пленках жидкости имеются две неустойчивые моды возмущений. Первая мода получена параметрическим продолжением поверхностной моды, существующей и при $Ma = 0$; возрастание числа Марангони приводит к уменьшению коэффициента роста и увеличению длины наиболее опасных возмущений. Наличие испарения ($Bi > 0$) приводит к формированию неоднородного распределения ПАВ по толщине пленки, причем профиль плотности ПАВ изменяется вдоль течения. Показано, что в этом случае при положительных значениях числа Ma появляется неустойчивая коротковолновая диффузионная мода, скорость распространения которой близка к скорости жидкости на свободной поверхности. Рост параметра Γ оказывает стабилизирующее воздействие на эту моду. Предположение $\Gamma = const$ представляет существенное ограничение модели [1].

Наиболее общая модель течения пленки с ПАВ предложена в [2]. В этой модели предполагается, что ПАВ может находиться как в растворенном виде в объеме жидкости, так и в связанном виде в тонком адсорбированном приповерхностном слое. Между двумя фазами возможен массообмен, определяемый кинетикой адсорбции – десорбции, диффузией в пленке, а также испарением растворенного ПАВ во внешнюю среду. При формулировке модели с включением адсорбционного барьера использовались представления работ [3–6] о развитии неустойчивости в покоящихся горизонтальных пленках вязкой жидкости, содержащих ПАВ. Для исследования в [2] применяется метод [7], который позволяет свести задачу для уравнений Навье – Стокса и диффузии с соответствующими граничными условиями к системе эволюционных уравнений. В рамках этой системы в [2] получено решение задачи о ста-

ционарной диффузии ПАВ в стекающей пленке; исследована его линейная устойчивость. В частном случае постоянного значения плотности связанной фазы ПАВ получено соответствие с результатами [1].

Этот метод позволил провести обширные численные исследования неустойчивых состояний в многопараметрической системе с десятью свободными параметрами. При учете процессов адсорбции и десорбции ПАВ обнаружен ряд новых явлений. В частности, при определенных значениях числа Ма существуют две неустойчивые диффузионные моды, скорости которых близки, а коэффициенты усиления могут различаться на порядок. При варьировании числа Ма возможно формирование непрерывной комбинированной неустойчивой моды из гидродинамической и одной из диффузионных. При малых числах Re диффузионная мода может преобладать над поверхностной.

Цель настоящей работы – в рамках полной постановки задачи на основе выборочных расчетов проверить основанные на приближенном методе результаты [2], уточнить влияние определяющих параметров задачи на характеристики устойчивости.

1. Основные уравнения. Для описания течения пленки вязкой жидкости, содержащей ПАВ, вводится декартова система координат x^* , y^* , причем ось x^* направлена вниз вдоль вертикальной плоскости и ось y^* – внутрь жидкости. Вводятся безразмерные переменные

$$(x^*, y^*, h^*) = H_c(x, y, h), \quad t^* = \frac{H_c}{U_c} t, \quad (u^*, v^*) = U_c(u, v)$$

$$p^* = \rho_c U_c^2 p, \quad \rho_v^* = R_{v,c} \rho_v, \quad \rho_s^* = R_{s,c} \rho_s, \quad \sigma^* = \Sigma_c \sigma$$

где t^* – время, u^* , v^* и p^* – компоненты скорости и давление, h^* – толщина пленки, ρ_v^* и ρ_s^* – объемная плотность растворенного ПАВ и поверхностная плотность связанного ПАВ, σ^* – коэффициент поверхностного натяжения. Используемые в качестве характерных величины H_c , U_c , $R_{v,c}$, $R_{s,c}$ и Σ_c определяются ниже; ρ_c – плотность жидкости.

В объеме жидкости выполняются уравнения Навье – Стокса, неразрывности и диффузии для растворенного ПАВ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Fr}^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho_v}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial^2 \rho_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_v}{\partial y^2} \right)$$

$$\text{Re} = \frac{U_c H_c}{\nu}, \quad \text{Fr}^2 = \frac{U_c^2}{g H_c}, \quad \text{Pe} = \frac{U_c H_c}{D_v}$$

Здесь введены числа Рейнольдса (Re), Фруда (Fr^2) и Пекле (Pe), ν – коэффициент кинематической вязкости, D_v – коэффициент диффузии, g – ускорение силы тяжести.

На твердой поверхности $y = 0$ ставятся условия прилипания и непротекания для жидкости и условие отсутствия потока массы ПАВ

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial \rho_v}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

Граничные условия на поверхности пленки $y = h(x, t)$ включают кинематическое и динамические условия

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v \quad (1.3)$$

$$p - \frac{2}{b^2} \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\sigma}{b^3 \operatorname{We}} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{1}{b} \left[\left(1 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 4 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{We}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$$

$$\operatorname{We} = \frac{\rho U_c^2 H_c}{\Sigma_c}, \quad b^2 = 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2$$

где We – число Вебера. На поверхности пленки массообмен ПАВ, который включает процессы адсорбции – десорбции, испарения и диффузии связанной фазы, описывается соотношениями [2]

$$-\frac{1}{b} \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial y} - \frac{\partial \rho_v}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right) = K_a \rho_v - K_d \rho_s \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho_s}{b} \left(u + v \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] = \frac{1}{b \operatorname{Pe}_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{b} \frac{\partial \rho_s}{\partial x} \right) + \frac{K_a - \operatorname{Bi}}{G} \rho_v - \frac{K_d}{G} \rho_s$$

$$\operatorname{Pe}_s = \frac{U_c H_c}{D_s}, \quad \operatorname{Bi} = \frac{K_e H_c}{D_v}$$

$$K_a = \frac{K_a H_c}{D_v}, \quad K_d = \frac{K_d H_c R_{s,c}}{D_v R_{v,c}}, \quad G = \frac{R_{s,c} U_c}{R_{v,c} D_v}$$

В (1.4) входят диффузионное число Pe связанного ПАВ, число Био (Bi) и безразмерные параметры адсорбции и десорбции; K_e, K_a, K_d – размерные коэффициенты испарения, адсорбции и десорбции, параметр G связан с различием размерностей величин $R_{v,c}$ и $R_{s,c}$.

При исследовании течений с ПАВ используются два вида линейной зависимости коэффициента поверхностного натяжения: $\sigma(\rho_s)$ или $\sigma(\rho_{v,h})$. Эти зависимости можно объединить в выражение

$$\sigma = 1 - \frac{\operatorname{We} \operatorname{Ma}_v}{\operatorname{Re}} (\rho_{v,h} - 1) - \frac{\operatorname{We} \operatorname{Ma}_s}{\operatorname{Re}} (\rho_s - 1) \quad (1.5)$$

$$\operatorname{Ma}_v = - \frac{d\sigma^*}{d\rho_{v,h}^*} \Big|_{R_{v,c}} \frac{R_{v,c}}{\rho v U_c}, \quad \operatorname{Ma}_s = - \frac{d\sigma^*}{d\rho_s^*} \Big|_{R_{s,c}} \frac{R_{s,c}}{\rho v U_c}$$

Здесь введены обозначения $\rho_{v,h} \equiv \rho_v \Big|_{y=h}$ – плотность растворенного ПАВ на поверхности, Ma_v и Ma_s – числа Марангони. Физический смысл имеют случаи $\operatorname{Ma}_v \neq 0$, $\operatorname{Ma}_s = 0$ или $\operatorname{Ma}_v = 0$, $\operatorname{Ma}_s \neq 0$.

Пусть H_c и $R_{v,c}$ – характерные толщина пленки и плотность растворенного ПАВ; в качестве масштабов скорости и плотности связанного ПАВ выбираются

$$U_c = \frac{g H_c^2}{3\nu}, \quad R_{s,c} = \frac{K_a - K_e}{K_d} R_{v,c} \quad (1.6)$$

Величина $R_{v,c}$ принимается равной значению плотности растворенного ПАВ на поверхности в начальном сечении $x = 0$. Характерное значение поверхностного натяжения определяется как $\Sigma_c = \sigma^*(R_{v,c})$ или $\Sigma_c = \sigma^*(R_{s,c})$ в зависимости от задания функции σ^* . Из (1.6) следует

$$Fr^2 = \frac{1}{3} Re, \quad K_d = K_a - Bi \quad (1.7)$$

Значение параметра десорбции K_d выражается через введенный в [2] параметр T :

$$K_d = \frac{G}{T} (3Ca)^{1/3}, \quad Ca = \frac{We}{Re}$$

где Ca – капиллярное число. Параметр T характеризует отношение скорости переноса концентрации R_s конвективным потоком вдоль поверхности пленки к скорости десорбции внутри жидкого объема. В расчетах рассматривались значения $0 < T < 10$.

Постановка задачи (1.1)–(1.5) обобщает постановку, данную в [2] тем, что в граничных условиях учитываются члены, несущественные при исследовании линейной устойчивости. В методе решения, примененном в [2], используются допущения

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \ll 1$$

которые с большой точностью выполняются для длинных волн, но могут нарушаться при уменьшении длины волны возмущения. Одна из целей данной работы – уточнить поведение решений при возрастании волновых чисел.

2. Стационарная диффузия ПАВ. В случае отсутствия испарения ($Bi = 0$) задача (1.1)–(1.5) имеет стационарное решение, соответствующее безволновому стеканию пленки с постоянными значениями растворенного и связанного ПАВ,

$$U(y) = 3 \left(y - \frac{y^2}{2} \right), \quad V = 0, \quad P(y) = 0, \quad H = 1 \quad (2.1)$$

$$R_v = \text{const}, \quad R_s = \text{const}, \quad K_a R_v = K_d R_s$$

В случае испаряющегося ПАВ ($Bi \neq 0$) стационарное решение будем рассматривать при больших значениях числа Re . Заменяя переменные в (1.1)–(1.5) согласно

$$x_1 = \varepsilon x, \quad v_1 = \frac{v}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{1}{Pe} \ll 1$$

можно получить с точностью до $O(\varepsilon)$, что гидродинамическая задача отделяется от диффузионной и имеет такое же решение, как и при отсутствии испарения в окружающую среду (2.1). Система уравнений и граничных условий диффузионной задачи имеет вид

$$U \frac{\partial R_v}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 R_v}{\partial y^2} \quad (2.2)$$

$$y = 0: \frac{\partial R_v}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

$$y = 1: \frac{\partial R_v}{\partial y} = K_d R_s - K_a R_v \quad (2.4)$$

$$\varepsilon G U \frac{dR_s}{dx_1} = (K_a - Bi) R_v - K_d R_s \quad (2.5)$$

Для ее решения надо задать начальные условия $R_v(0, y)$, $R_s(0)$. Для большинства пленочных течений с ПАВ справедливо

$$\frac{\varepsilon}{Re} \ll 1, \quad \frac{\varepsilon^2}{We} \ll 1, \quad \varepsilon Ma_v \ll 1 \text{ или } \varepsilon Ma_s \ll 1, \quad \frac{\varepsilon}{Pe_s} \ll 1$$

Неравновесность кинетики адсорбции – десорбции определяется параметром εG . В случае его малости можно отбросить соответствующее слагаемое в уравнении для связанного ПАВ (2.5); с учетом (1.7) плотность поверхностной фазы вычисляется согласно

$$R_s(x_1) = R_v(x_1, 1) \quad (2.6)$$

и граничные условия на поверхности пленки в (2.2) заменяются на

$$y = 1: \frac{\partial R_v}{\partial y} = -Bi R_v \quad (2.7)$$

Для сформулированных диффузионных задач разностная аппроксимация второго порядка точности приводит к трехдиагональной системе линейных алгебраических уравнений, которая решается методом прогонки.

Пример расчета диффузии ПАВ в стекающей пленке вязкой жидкости по неравновесной (2.2)–(2.5) и равновесной (2.2), (2.3), (2.7) моделям представлен на фиг. 1. Решения получены при однородном начальном распределении растворенного ПАВ $R_v(0, y) = 1$; при расчете по неравновесной модели дополнительно задано $R_s(0) = 0$. Начальные условия соответствуют вытеканию жидкости с равномерно растворенным ПАВ из замкнутого объема. Из фиг. 1, *a* видно, что решения равновесной и неравновесной моделей различаются лишь на начальном участке течения; начиная с $x_1 = 0.001$ распределения растворенного ПАВ по толщине пленки близки (фиг. 1, *б*). Следовательно, в рассматриваемом диапазоне параметров стационарная диффузия ПАВ определяется преимущественно числом Bi – единственным параметром равновесной модели.

В [2] для стационарной диффузии получены аналитические формулы

$$Bi^2 x_1 = \ln R_{v,h} + \frac{1}{2}(R_{v,h} - 1) \quad (2.8)$$

$$R_v = \begin{cases} 1, & y \in [0, y_d] \\ 1 - (1 - R_{v,h}) \left[1 - \frac{Bi}{2} \frac{R_{v,h}}{1 - R_{v,h}} (1 - y) \right]^2, & y \in [y_d, 1] \end{cases}$$

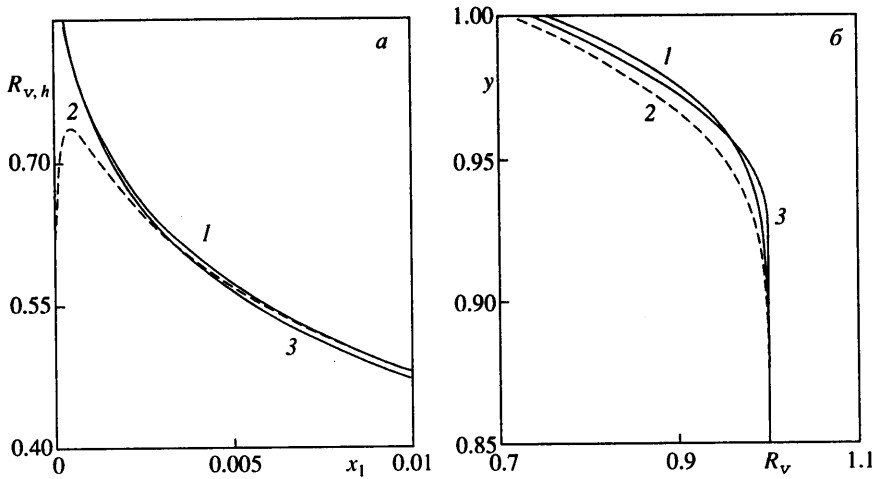
$$y_d = 1 - \frac{2}{Bi} \frac{1 - R_{v,h}}{R_{v,h}}$$

Вычисления по формулам (2.8) также приводятся на фиг. 1. Результаты практически совпадают с точными расчетами по равновесной модели.

Решения в рамках неравновесной и тем более равновесной модели вблизи $x = 0$ могут быть уточнены с учетом влияния капиллярных сил на входном участке течения. В случае начальной нулевой концентрации ПАВ в адсорбированном подслое ($R_s(0) = 0$) вблизи начального сечения существует узкая релаксационная зона, для которой в [2] дано аналитическое выражение

$$R_s = 1 - \exp(-2x/3T)$$

Ширина релаксационной зоны много меньше размера начального участка, на котором решения равновесной и неравновесной моделей существенно отличаются (см. фиг. 1, *a*).



Фиг. 1. Стационарная диффузия ПАВ при $Bi = 10$, $K_a = 133.5$, $\varepsilon G = 0.004$: *a* – плотность растворенного ПАВ на поверхности, *б* – распределение растворенного ПАВ по толщине пленки при $x_1 = 0.001$. Кривые 1 – расчет по равновесной модели, 2 – по неравновесной, 3 – по формулам (2.8)

3. Линейная устойчивость. Вследствие малости параметра ε характерный диффузионный масштаб вдоль продольной координаты существенно больше толщины пленки; в этом случае при исследовании устойчивости зависимости величин R_v и R_s от координаты x можно считать параметрическими [2]. Тогда решение задачи (1.1) – (1.5) ищется в виде

$$u = U(y) + u^{(1)}, \quad v = v^{(1)}, \quad p = p^{(1)}$$

$$h = 1 + h^{(1)}, \quad \rho_v = R_v(y) + \rho_v^{(1)}, \quad \rho_s = R_s + \rho_s^{(1)}$$

где верхним индексом (1) обозначены малые возмущения. После подстановки этого решения в (1.1)–(1.5), линеаризации и рассмотрения возмущений в виде $f^{(1)} = f(y) \exp i\alpha(x - ct)$, где α – волновое число, $c = c_r + ic_i$ – неизвестная комплексная скорость (здесь нижний индекс r обозначает действительную часть величины, индекс i – мнимую), можно получить задачу на собственные значения для функций v , ρ_v и фазовой скорости c

$$v'''' - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v = i\alpha \operatorname{Re}[(U - c)(v'' - \alpha^2 v) - U''v] \quad (3.1)$$

$$\rho_v'' - [\alpha^2 + i\alpha \operatorname{Pe}(U - c)]\rho_v = \operatorname{Pe} R_v' v \quad (3.2)$$

$$y = 0: \quad v = 0, \quad v' = 0, \quad \rho_v' = 0 \quad (3.3)$$

$$y = 1: \quad v''' - [3\alpha^2 + i\alpha \operatorname{Re}(U - c)]v' + \frac{i\alpha^3 \operatorname{Re} \Sigma}{\operatorname{We}(U - c)} v = 0 \quad (3.4)$$

$$v'' + \frac{\alpha^2 \operatorname{Ma}_s}{E_1} R_s v' + \alpha^2 \left(\operatorname{Ma}_v + \operatorname{Ma}_s \frac{K_a - Bi}{G E_1} \right) \rho_v + \quad (3.5)$$

$$+ \left[\alpha^2 - \frac{U''}{U - c} - \frac{i\alpha}{U - c} R_v' \left(\operatorname{Ma}_v + \operatorname{Ma}_s \frac{K_a - Bi}{G E_1} \right) \right] v = 0$$

$$\rho'_v + \frac{E_2}{E_1} \rho_v - \frac{K_d}{E_1} R_s v' - \frac{i}{\alpha(U-c)} \left(R''_v + R'_v \frac{E_2}{E_1} \right) v = 0 \quad (3.6)$$

$$\Sigma = 1 - \frac{\text{WeMa}_v}{\text{Re}} (R_{v,h} - 1) - \frac{\text{WeMa}_s}{\text{Re}} (R_s - 1)$$

$$E_1 = i\alpha(U-c) + \frac{\alpha^2}{\text{Pe}_s} + \frac{K_d}{G}$$

$$E_2 = K_a \left[i\alpha(U-c) + \frac{\alpha^2}{\text{Pe}_s} \right] + \frac{K_d \text{Bi}}{G}$$

Течения пленок с ПАВ характеризуются умеренными числами Re и большими значениями чисел Pe. Вследствие этого возможны решения с различными масштабами существенного изменения собственных функций: решения диффузионного уравнения (3.2) связаны с кинетикой адсорбции – десорбции и испарения ПАВ и локализованы в узкой области вблизи свободной поверхности в отличие от решений уравнения Орра – Зоммерфельда (3.1), переменных по всей толщине пленки. Для эффективного вычисления решений задача на собственные значения преобразуется для выделения диффузионной и гидродинамической частей [1]. Пусть φ – решение краевой задачи:

$$\varphi'' - [\alpha^2 + i\alpha \text{Pe}(U-c)]\varphi = 0; \quad \Phi'(0) = 0, \quad \varphi'(1) = 1 \quad (3.7)$$

С учетом (3.2) верно равенство

$$\varphi(1)\rho'_v(1) - \rho_v(1)\varphi'(1) = \text{Pe} \int_0^1 R'_v \varphi v dy \quad (3.8)$$

позволяющее получить соотношение между $\rho_v(1)$ и $\rho'_v(1)$; из условий (3.5), (3.6) и (3.8) следует граничное условие на свободной поверхности, не содержащее этих величин

$$y = 1: \quad v'' + \frac{\alpha^2}{E_1} (\text{Ma}_s + E_3 K_d \varphi) R_s v' + \left[\alpha^2 + \frac{i\alpha E_3}{U-c} \left(R'_v + \frac{E_2}{E_1} R'_v \right) \right] \varphi - \quad (3.9)$$

$$- \frac{i\alpha}{U-c} \left(\text{Ma}_v + \text{Ma}_s \frac{K_a - \text{Bi}}{G E_1} \right) R'_v - \frac{U''}{U-c} \Big] v - \alpha^2 E_3 \text{Pe} \int_0^1 R'_v \varphi v dy = 0$$

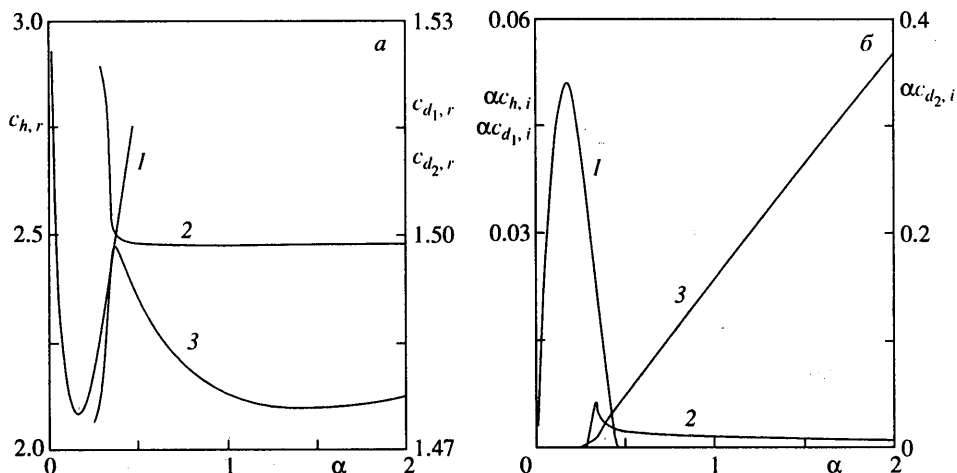
$$E_3 = \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \varphi \right)^{-1} \left(\text{Ma}_v + \text{Ma}_s \frac{K_a - \text{Bi}}{G E_1} \right)$$

Следовательно, число c является собственным значением, если для него существует нетривиальное решение задачи (3.1), (3.3), (3.4), (3.9), где функция φ – решение краевой задачи (3.7).

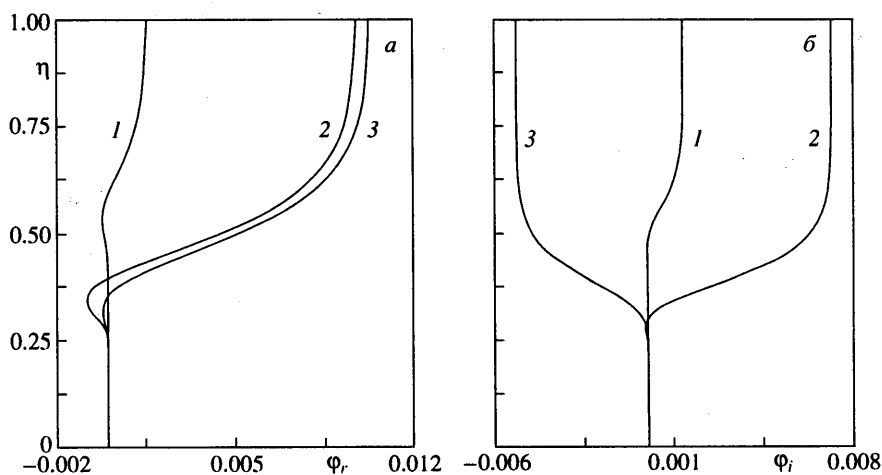
Для вычисления решений (3.7), локализованных в диффузионном слое толщины κ вблизи свободной поверхности, проводится замена независимой переменной

$$y = \frac{1 - \exp(-\eta/\kappa)}{1 - \exp(-1/\kappa)}$$

Задача на собственные значения (3.1), (3.3), (3.4), (3.7), (3.9) для скорости c , функций $v(y)$ и $\varphi(y)$ решается методом дифференциальной прогонки, при котором два линейно независимых решения уравнения (3.1), удовлетворяющие начальным условиям из (3.3), численно интегрируются от $y = 0$ до $y = 1$; из условий (3.4), (3.9), в которые входит решение задачи (3.7), следует характеристическое уравнение $F(c, \alpha) = 0$ для определения собственного значения $c(\alpha)$. Краевая задача (3.7) решается разностным методом.



Фиг. 2. Фазовая скорость (а) и коэффициенты усиления возмущений (б) при $Ma_v = -10$, $G = 2000$, $T = 5$, $Pe = 10^6$, $Pe_s = 2 \cdot 10^5$: 1 – гидродинамическая мода, 2 и 3 – первая и вторая диффузионные моды

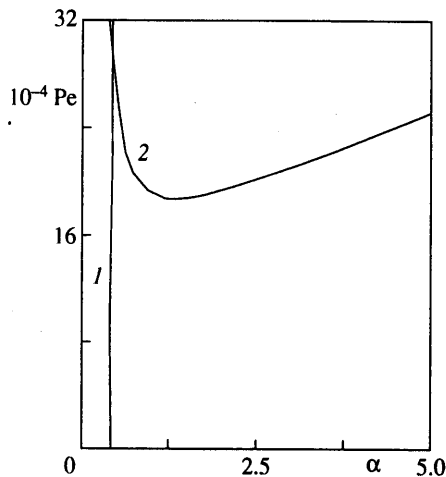


Фиг. 3. Собственные функции φ_r (а), φ_i (б) при значениях параметров фиг. 2 и волновом числе $\alpha = 0.3$: 1 – гидродинамическая мода, 2 и 3 – первая и вторая диффузионные моды. Использовано значение $\kappa = 0.1$ при вычислении функции φ

Решение задачи на собственные значения зависит от восьми определяющих параметров и локальных характеристик растворенного и связанного ПАВ $R_v(x, y)$, $R_s(x)$. При нахождении собственных чисел использовано распределение ПАВ, полученное при решении стационарной задачи (2.2), (2.3), (2.7) с начальными условиями $R_v(0, y) = 1$; тогда верно (2.6) и распределение ПАВ зависит лишь от параметра Bi и координаты x_1 . Таким образом, задача включает восемь внешних независимых параметров:

$$Re, We, Pe, Pe_s, T, Bi, G, Ma_v (Ma_s)$$

а также длину x (или x_1), определяющую характеристики диффузионного пограничного слоя, и внутренний параметр – волновое число α . Ниже представлены результаты, соответствующие значениям $Re = 32$, $We = 0.077$, $Bi = 10$, $x_1 = 0.001$.



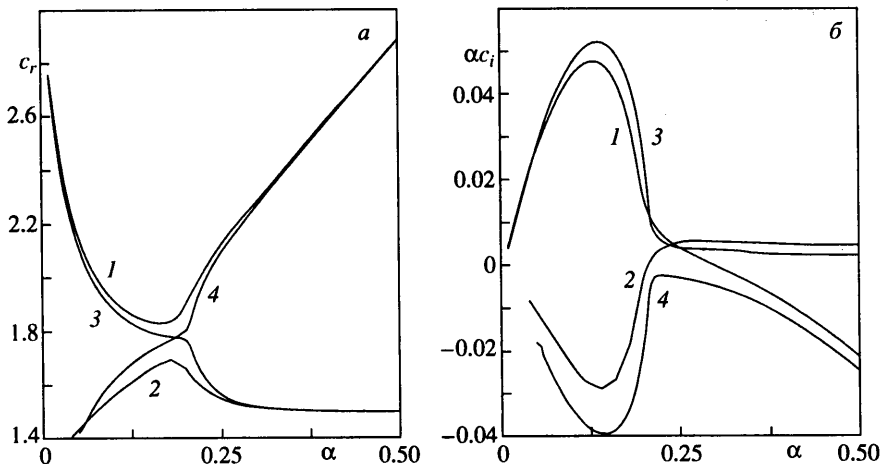
Фиг. 4. Нейтральные кривые при $G = 640$, $T = 1$, $Pe_s = 6.4 \cdot 10^4$, $Ma_v = 1$: 1 – гидродинамическая мода, 2 – первая диффузионная мода

4. Численные результаты. В [2] анализ линейной устойчивости выполнен в рамках приближенного метода интегральных соотношений. На фиг. 2 показаны зависимости собственных значений, которые соответствуют параметрам фиг. 6 работы [2]. В этом случае наряду с гидродинамической модой существуют также две диффузионные моды неустойчивости (нижний индекс h соответствует гидродинамической моде, d_1 и d_2 – первой и второй диффузионным модам). На фиг. 3 представлены гидродинамические и диффузионные собственные функции при одном и том же значении волнового числа. Сопоставление с результатами [2] для рассматриваемого варианта показывает, что имеет место не только качественное, но и приемлемое количественное соответствие с учетом приближенного характера системы эволюционных уравнений, выведенных в [2]. Объяснение этого соответствия заключается в том, что собственные функции, как это видно на фиг. 3, вполне согласуются с представлениями о наличии диффузионного пограничного слоя и о возможности аппроксимации их простыми полиномами, использованными в [2]. Можно отметить, что действительные части собственных функций задачи, вычисленных при одинаковой нормировке, показывают, что гидродинамическая мода имеет наибольшее возмущение скорости, диффузионные – возмущение плотности растворенного ПАВ.

Применение эволюционной системы работы [2] при анализе устойчивости пленочного течения с ПАВ позволяет достаточно быстро провести первоначальный анализ возможных типов решений в задаче, содержащей 10 независимых безразмерных параметров. Дальнейший выборочный анализ собственных чисел можно проводить более громоздким, но более точным методом дифференциальной прогонки.

Обратимся теперь к численным решениям задачи на собственные значения (3.1), (3.3), (3.4), (3.7), (3.9), демонстрирующим влияние некоторых основных безразмерных параметров, прежде всего, Pe , T , Ma . Рассматривались волновые числа из интервала $\alpha \in (0, 10)$.

В работах [1, 2] показано, что при положительных значениях числа Ma_v взаимосвязь гидродинамической и диффузионной задач приводит к появлению диффузионной неустойчивости в дополнение к гидродинамической, характерной для стекающего по вертикальной поверхности слоя вязкой жидкости. Пример расчета нейтральных кривых представлен на фиг. 4, где гидродинамическая мода неустойчива левее кривой 1, диффузионная – выше кривой 2. В [2], где рассматривались как положительные, так и отрицательные числа Ma , обнаружена также вторая неустойчивая корот-



Фиг. 5. Фазовая скорость (а) и коэффициенты усиления возмущений (б) неустойчивых мод при $G = 640$, $T = 1$, $Re_s = 6.4 \cdot 10^4$, $Ma_v = 10$: 1 и 2 – гидродинамическая и первая диффузионная моды при $Re = 32 \cdot 10^4$; 3 и 4 – комбинированные моды при $Re = 22.4 \cdot 10^4$

коволновая мода. Как показывают расчеты настоящей работы, вторая неустойчивая диффузионная мода существует при всех значениях числа Re . Рост этого параметра существенно влияет и на неустойчивость первой моды, поскольку его увеличению соответствует утоньшение диффузионного слоя и более резкое распределение растворенного ПАВ.

Две неустойчивые моды при положительных значениях числа Ma и три – при отрицательных имеются также при использовании модели, в которой коэффициент поверхностного натяжения зависит от плотности связанного ПАВ – $Ma_s \neq 0$, $Ma_v = 0$. Например, в варианте $Ma_s = -1$, $G = 640$, $T = 1$, $Re = 12.8 \cdot 10^4$, $Re_s = 6.4 \cdot 10^4$ существуют гидродинамическая и две диффузионные моды, причем в данном случае наиболее опасны коротковолновые возмущения второй диффузионной моды.

Зависимость $c(\alpha)$ включает девять параметров и имеет особенности. Приведем один пример решения, важный с механической точки зрения.

Этот случай соответствует комбинированной моде, впервые обнаруженной в [2] для отрицательных чисел Ma . В расчетах полной задачи при изменении параметра Re найдено, что неустойчивая комбинированная мода существует и при положительных числах Ma , что демонстрируется на фиг. 5: при больших значениях Re имеются гидродинамическая (кривая 1) и первая диффузионная мода (кривая 2), при уменьшении этого параметра ниже критического происходит их взаимодействие с образованием двух комбинированных мод (кривые 3 и 4). Одна из комбинированных мод (кривая 3) неустойчива как для длинных, так и для коротких волн; при дальнейшем убывании Re ее область неустойчивых волновых чисел сокращается, и для достаточно малых чисел Re комбинированная мода является растущей для длин волн, характерных для гидродинамической моды в отсутствие ПАВ. Вторая комбинированная мода устойчива, за исключением узкого интервала волновых чисел в окрестности $\alpha \approx 0,2$ при значениях числа Re , близких к критическому. Комбинированная мода при положительных числах Ma отличается от приведенной в [2] при $Ma_v < 0$; последняя формируется из гидродинамической и сильно неустойчивой быстрой диффузионной моды. Комбинированная мода при отрицательных числах Ma , также может образовываться из гидродинамической и второй диффузионной моды.

Представленные примеры показывают возможность взаимного перехода мод неустойчивости при варьировании параметров в окрестности особых точек функции $c(\alpha)$.

Подчеркнем, что различие моделей [1] и [2] связано с учетом в последней возможности изменения локальной концентрации связанного ПАВ за счет массообмена с объемной фазой. Усиление процессов адсорбции – десорбции, определяемых уменьшением параметра T , ведет к стабилизации диффузионной моды.

Заключение. Прямые численные решения полной многопараметрической задачи о неустойчивости стекающей пленки с ПАВ подтверждают выводы работы [2] о новых модах неустойчивости, обнаруженных на основе анализа предложенной в этой работе системы эволюционных уравнений. Наряду с гидродинамической модой, которая существует и в однородной жидкой пленке без ПАВ, имеются также диффузионные моды неустойчивости, тип которых зависит от значений десяти свободных параметров. Диффузионные возмущения распространяются практически со скоростью жидкости на поверхности пленки. В частности, исследовано несколько основных вариантов проявления неустойчивости: если существуют два или три неустойчивых возмущения, то их коэффициенты усиления могут различаться более чем на порядок (фиг. 2). Если гидродинамическая волновая мода переходит в диффузионную при возрастании волнового числа, то такая комбинированная мода может быть как быстровозрастающей, так и иметь небольшие коэффициенты усиления. Прямыми расчетами собственных функций подтвержден вывод [2], что быстрорастущие диффузионные моды представляют по существу продольные приповерхностные волны концентрации с малыми деформациями поверхности в отличие от гидродинамических поперечных волн. Наличие быстрорастущих возмущений концентрации вблизи поверхности указывает на возможность сильного влияния этого вида неустойчивости на массоперенос.

Набор возникающих мод неустойчивости течения пленки с ПАВ существенно зависит от заданных значений свободных параметров задачи. Большое количество свободных параметров делает необходимым сопоставление расчетов с экспериментальными данными. К сожалению, в настоящее время экспериментальные данные такого рода практически отсутствуют, хотя известно [1], что воздействие растворенных ПАВ на развитие течения и тепломассообмена в пленке бывает существенным. Представленные теоретические результаты могут служить базовым ориентиром при постановке и проведении соответствующих экспериментов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 00-01-00645).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ji W., Setterwall F.* On the instabilities of vertical falling liquid films in the presence of surface-active solute // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 278. P. 297–323.
2. *Веларде М.Г., Шкадов В.Я., Шкадова В.П.* Влияние поверхностно-активного вещества на неустойчивость стекающей пленки жидкости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2000. № 4. С. 56–67.
3. *Lin S.P.* Stabilizing effects of surface-active agents on a film flow // *AIChE Journal.* 1970. V. 16. № 3. P. 375–379.
4. *Brian P.L.T.* Effect of Gibbs adsorption on Marangoni instability // *AIChE Journal.* 1971. V. 17. № 4. P. 765–772.
5. *Palmer H.J., Berg J.C.* Hydrodynamic stability of surfactant solutions heated from below // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 51. Pt 2. P. 385–402.
6. *Hennenberg M., Chu X.-L., Velarde M.G., Sanfeld A.* Transverse and longitudinal waves at the air liquid interface in the presence of an adsorption barrier // *J. Colloid and Interface Sci.* 1992. V. 150. P. 7–21.
7. *Шкадов В.Я.* Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1967. № 1. С. 43–50.