МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 2001

УДК 533.72

© 2001 г. Н.В. МАЛАЙ, Е.Р. ЩУКИН, Ю.И. ЯЛАМОВ

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОЙ НАГРЕТОЙ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Получено выражение для силы сопротивления гидрозольной частицы сфероидальной формы при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее с учетом зависимости вязкости от температуры, представленной в виде экспоненциально-степенного ряда.

Движение нагретых частиц в вязких жидких и газообразных средах рассматривалось в [1–5]. Под нагретой частицей понимают частицу, средняя температура поверхности которой значительно превышает температуру окружающей среды. Нагрев поверхности частицы может быть обусловлен, например, протеканием объемной химической реакции, процессом радиоактивного распада вещества частицы и т.д. Нагретая поверхность сфероида оказывает значительное влияние на теплофизические характеристики окружающей среды и тем самым существенно может повлиять на распределение полей скорости и давления в ее окрестности. Частицы, используемые в промышленных установках и встречающиеся в природе, часто имеют сфероидальную форму.

1. Постановка задачи. Рассматривается равномерное движение нагретой твердой гидрозольной высокотеплопроводной частицы в вязкой жидкости, имеющей форму сплюснутого сфероида. Движение происходит при малых числах Рейнольдса вдоль оси симметрии сфероида. Внутри частицы действуют тепловые источники плотностью q_p. Решение такой задачи целесообразно проводить в системе координат, связанной с частицей. При этом задача сводится к задаче обтекания нагретого неподвижного сплюснутого (вытянутого) сфероида плоскопараллельным потоком жидкости со скоростью $\mathbf{U}_\infty$. Предполагается, что плотность, теплопроводность, теплоемкость жидкости постоянны.

Из всех параметров переноса жидкости только коэффициент динамической вязкости сильно зависит от температуры [6]. При учете зависимости вязкости от температуры удобно пользоваться общим выражением (1.1), впервые приведенным в [7]:

$$\mu_l = \mu_\infty \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left(\frac{T_l}{T_\infty} - 1\right)^n\right] \exp\left\{-A\left(\frac{T_l}{T_\infty} - 1\right)\right\} \tag{1.1}$$

где $A = \mathrm{const}$, $\mu_\infty = \mu_l(T_\infty)$, T_∞ – температура жидкости вдали от частицы.

Криволинейная система координат ε, η, φ с началом в центре частицы связана с декартовыми координатами следующими соотношениями [8]:

$$x = c\,\mathrm{sh}\,\varepsilon \sin\eta \cos\varphi, \quad y = c\,\mathrm{sh}\,\varepsilon \sin\eta \sin\varphi, \quad z = c\,\mathrm{ch}\,\varepsilon \cos\eta \tag{1.2}$$

$$x = c\,\mathrm{ch}\,\varepsilon \sin\eta \cos\varphi, \quad y = c\,\mathrm{ch}\,\varepsilon \sin\eta \sin\varphi, \quad z = c\,\mathrm{sh}\,\varepsilon \cos\eta \tag{1.3}$$

где $c = \sqrt{b_0^2 - a_0^2}$ в случае вытянутого сфероида ($a_0 < b_0$, формула (1.2)) и $c = \sqrt{a_0^2 - b_0^2}$

в случае сплюснутого сфероида ($a_0 > b_0$, формула (1.3)); a_0 и b_0 – полуоси сфероида. При этом ось z декартовой системы координат совпадает с осью симметрии сфероида. Поверхности частицы соответствует координатная поверхность $\varepsilon = \varepsilon_0$.

При малых числах Re распределение скорости $\mathbf{U}_l$, давления p_l и температур в жидкости T_l и частице T_p описывается системой уравнений [9]

$$\nabla p_l = \mu_l \Delta \mathbf{U}_l + 2(\nabla \mu_l \nabla)\mathbf{U}_l + [\nabla \mu_l \times \mathbf{rot}\mathbf{U}_l], \ \operatorname{div} \mathbf{U}_l = 0 \tag{1.4}$$

$$\Delta T_l = 0, \ \Delta T_p = -q_p / \lambda_p \tag{1.5}$$

При решении системы уравнений (1.4), (1.5) учитываются граничные условия

$$\varepsilon = \varepsilon_0: \ \mathbf{U}_l = 0, \ T_l = T_p, \ \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial \varepsilon} = \lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial \varepsilon} \tag{1.6}$$

$$\varepsilon \to \infty: \ \mathbf{U}_l \to U_\infty \cos\eta\, \mathbf{e}_\varepsilon - U_\infty \sin\eta\, \mathbf{e}_\eta; \ T_l \to T_\infty, \ p_l \to p_\infty \tag{1.7}$$

$$\varepsilon \to 0: \ T_p \neq \infty \tag{1.8}$$

Здесь $\mathbf{e}_\varepsilon$ и $\mathbf{e}_\eta$ – единичные векторы сфероидальной системы координат, λ_l и λ_p – коэффициенты теплопроводности жидкости и частицы, $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$.

В граничных условиях (1.6) на поверхности частицы учтены условие прилипания для скорости, равенство температур и непрерывность потоков тепла.

Сила, действующая на частицу со стороны потока, определяется по формуле

$$F_z = \int_S \left(-p_l \cos\eta + \sigma_{\varepsilon\varepsilon} \cos\eta - \frac{\operatorname{sh}\varepsilon}{\operatorname{ch}\varepsilon} \sigma_{\varepsilon\eta} \sin\eta\right) dS, \ dS = c^2 \operatorname{ch}^2 \varepsilon \sin\eta\, d\eta\, d\varphi \tag{1.9}$$

где dS – дифференциальный элемент поверхности, $\sigma_{\varepsilon\varepsilon}$ и $\sigma_{\varepsilon\eta}$ – компоненты тензора напряжений в сфероидальной системе координат [9].

2. Определение силы сопротивления. Для вычисления силы сопротивления нужно знать распределения в окрестности частицы температур, массовой скорости и давления. Интегрируя уравнения (1.5) с соответствующими граничными условиями, получаем

$$t_l = 1 + \frac{\gamma}{c} \operatorname{arcctg} \lambda \tag{2.1}$$

$$t_p = B + \frac{\lambda_l}{\lambda_p} \frac{\gamma}{c} \operatorname{arcctg} \lambda + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \operatorname{arcctg} \lambda f \, d\lambda - \operatorname{arcctg} \lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda} f \, d\lambda \tag{2.2}$$

$$\gamma = t_s - 1, \ \frac{T_s}{T_\infty} = 1 + \frac{1}{4\pi \lambda_l T_\infty} \int_V q_p dV \tag{2.3}$$

$$f = -\frac{c^2}{2\lambda_p T_\infty} \int_{-1}^{+1} q_p (\lambda^2 + x^2) dx, \ B = 1 + \left(1 - \frac{\lambda_l}{\lambda_p}\right) \gamma \sqrt{1 + \lambda_0^2} \operatorname{arcctg} \lambda_0, \ \lambda_0 = \operatorname{sh} \varepsilon_0$$

Здесь $\lambda = \operatorname{sh}\varepsilon$, $x = \cos\eta$, $t = T/T_\infty$, $t_s = T_s/T_\infty$, T_s – средняя температура поверхности нагретого сфероида.

В (2.3) интегрирование ведется по всему объему нагретой частицы. В частном случае равномерного распределения источников выражение для T_s принимает простой вид: $T_s = T_\infty + q_p a_0 b_0 / (3\lambda_l)$.

С учетом (2.1) выражение (1.1) принимает вид

$$\mu_l = \mu_\infty \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left(\frac{\gamma}{c} \operatorname{arcctg} \lambda\right)^n\right] \exp\{-\gamma_0 \operatorname{arcctg} \lambda\}, \ \gamma_0 = \frac{A\gamma}{c} \tag{2.4}$$

Учитывая, что вязкость зависит только от радиальной координаты λ, решение системы уравнений (1.4) находим методом разделения переменных, раскладывая поля скорости и давления по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [8]. В частности, для компонент массовой скорости $\mathbf{U}_l$ получены следующие выражения, удовлетворяющие граничным условиям (1.7)

$$U_\varepsilon(\varepsilon,\eta) = \frac{U_\infty}{cH_\varepsilon}\cos\eta[c^2 + A_1G_1 + A_2G_2] \qquad (2.5)$$

$$U_\eta(\varepsilon,\eta) = -\frac{U_\infty}{cH_\varepsilon}\sin\eta[c^2 + A_1G_3 + A_2G_4] \qquad (2.6)$$

$$G_1 = -\frac{1}{\lambda^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta_n^{(1)}}{(n+3)\lambda^n},\quad G_2 = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta_n^{(2)}}{(n+1)\lambda^n} - \frac{\beta}{\lambda^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta_n^{(1)}}{(n+3)\lambda^n}\times \qquad (2.7)$$

$$\times[(n+3)\ln\frac{\lambda_0}{\lambda} - 1],\quad G_3 = G_1 + \frac{1+\lambda^2}{2\lambda}G_1^1,\quad G_4 = G_2 + \frac{1+\lambda^2}{2\lambda}G_2^1$$

$$H_\varepsilon = c\sqrt{\operatorname{ch}^2\varepsilon - \sin^2\eta},$$

$$\theta_n^{(1)} = -\frac{1}{n(n+5)}\sum_{k=1}^{n}[(n+4-k)\{(n+1-k)\alpha_k^{(1)} + \alpha_k^{(2)}\} + \alpha_k^{(3)}]\theta_{n-k}^{(1)}(n \geqslant 1),$$

$$\theta_n^{(2)} = -\frac{1}{(n-2)(n+3)}\left[\sum_{k=1}^{n}\{(n+2-k)[(n+1-k)\alpha_k^{(1)} + \alpha_k^{(2)}] + \alpha_k^{(3)}\}\theta_{n-k}^{(2)} + \right.$$

$$\left. +\beta\sum_{k=0}^{n}[(2n-2k+3)\alpha_k^{(1)} + \alpha_k^{(1)}]\theta_{n-k-2}^{(1)} - 6\alpha_n^{(4)}\right](n \geqslant 3),$$

$$\theta_1^{(2)} = -\frac{1}{4}[2(\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}) + \alpha_1^{(3)} + 6\alpha_1^{(4)}],\ \theta_2^{(2)} = 1,\ \theta_0^{(1)} = -1,\ \theta_0^{(2)} = -1$$

$$\beta = -\frac{1}{5}[\{3(2\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}) + \alpha_1^{(3)}\}\theta_1^{(2)} - 2(\alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}) - \alpha_2^{(3)} - 6\alpha_2^{(4)}]$$

$$\alpha_n^{(1)} = C_n + 12\sum_{k=0}^{n_2}(-1)^k\frac{C_{n-2k-2}}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)},\quad \alpha_n^{(4)} = \Delta_n,\ \Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = \gamma$$

$$\alpha_n^{(2)} = (n-2)C_n - \gamma_0C_{n-1} + 12\sum_{k=0}^{n_2}(-1)^k\frac{(4k+5)C_{n-2k-2}}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} -$$

$$-3\sum_{k=0}^{n_3}(-1)^k\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}[(n-2k-2)C_{n-2k-2} - \gamma_0C_{n-2k-3} +$$

$$+(n-2k-4)C_{n-2k-4}]\ (n \geqslant 1),\ C_0 = 1$$

$$\alpha_n^{(3)} = -2(n+2)C_n + 2\gamma_0C_{n-1} - 2(n-2)C_{n-2} + 12\sum_{k=0}^{n_2}(-1)^k\frac{C_{n-2k-2}}{(2k+5)} +$$

$$+6\sum_{k=0}^{n_3}(-1)^k\frac{(k+2)(4k+5)}{(2k+3)(2k+5)}[(n-2k-2)C_{n-2k-2} - \gamma_0C_{n-2k-3} +$$

$$+(n-2k-4)C_{n-2k-4}]\ (n \geqslant 1),\ \Delta_{n+2} = \frac{1}{n+2}[\gamma_0\Delta_{n+1} - n\Delta_n]\ (n \geqslant 0)$$

$$C_k = \sum_{l_1+3l_3+5l_5+\ldots+sl_s=k} \frac{l!}{l_1!l_3!l_5!\ldots l_s!} F_l f_1^{l_1} f_3^{l_3} f_5^{l_5}\ldots f_s^{l_s},\ s = k - \frac{1+(-1)^k}{2}$$

$$l = l_1 + l_3 + l_5 + \ldots + l_s,\ f_{2k-1} = (-1)^{k-1}\frac{\gamma}{c(2k-1)}(k \geqslant 1),\ n_x = \left[\frac{n+x}{2}\right]$$

$$C_1 = \frac{F_1\gamma}{c},\ C_2 = \frac{F_2\gamma^2}{c^2},\ C_3 = \frac{F_3\gamma^3}{c^3} - \frac{F_1\gamma}{3c}$$

$$C_4 = \frac{F_4\gamma^4}{c^4} - \frac{2F_2\gamma^2}{3c^2}$$

Через $[k/2]$ обозначена целая часть числа $k/2$.

Сила, действующая на сфероид за счет вязких напряжений, определяется интегрированием выражения (1.9) по поверхности сфероида и с учетом (2.5), (2.6) равна

$$\mathbf{F}_z = -4\pi\frac{\mu_\infty U_\infty}{c}A_2\exp\left\{-\frac{A\gamma}{c}\operatorname{arcctg}\lambda_0\right\}\mathbf{n}_z \tag{2.8}$$

где $\mathbf{n}_z$ – единичный вектор в направлении оси z.

Постоянные интегрирования A_1, A_2, входящие в выражения для компонент массовой скорости (2.5), (2.6), определяются из граничных условий на поверхности сфероида. С учетом конкретного вида A_2 выражение (2.8) можно представить следующим образом:

$$\mathbf{F}_z = 6\pi a_0\mu_\infty KU_\infty\mathbf{n}_z \tag{2.9}$$

$$K = \frac{2}{3}\frac{G_1^1}{\sqrt{1+\lambda_0^2}[G_2G_1^1 - G_1G_2^1]}\exp\left\{-\frac{A\gamma}{c}\operatorname{arcctg}\lambda_0\right\}$$

где G_1^1 и G_2^1 – первые производные по λ от соответствующих функций. Функции G_1, G_2, G_1^1 и G_2^1 берутся при $\lambda = \lambda_0$. Чтобы получить выражение для гидродинамического сопротивления вытянутого сфероида, необходимо заменить в (2.9) λ на $i\lambda$ и c – на $-ic$ (i – мнимая единица).

Формула (2.9) позволяет оценить гидродинамическую силу, действующую на высокотеплопроводную частицу сфероидальной формы, внутри которой действуют источники (стоки) тепла, с учетом произвольной зависимости вязкости от температуры и носит наиболее общий характер.

Влияние формфактора частицы и температуры ее поверхности на силу сопротивления определяется коэффициентом K. В качестве примера в табл. 1, 2 приведены результаты численных расчетов зависимости коэффициента K от средней температуры поверхности сфероида и отношения полуосей для твердых частиц, взвешенных в воде при T_∞ = 273 K ($K^{(1)}$ при T_s = 283 K, $K^{(2)}$ при T_s = 333 K, A = 5,779, $F_n = 0$ при $n \geqslant 1$). Численный анализ показал, что нагрев поверхности сфероида существенно влияет на силу сопротивления.

В пределе при $\gamma \to 0$ (малые перепады температуры в окрестности сфероида) $G_1 = \frac{1}{3}\lambda^{-3}$, $G_1^1 = -\lambda^{-4}$, $G_2 = \lambda^{-1}$, $G_2^1 = -\lambda^{-2}$ и $a_0 = b_0 = R$, коэффициент $K = 1$ и формула (2.8) переходит в формулу Стокса для твердой сферической частицы радиуса R [8].

При равномерном падении сфероидальной частицы в поле силы тяжести на нее действует сила

$$F_g = \frac{4}{3}\pi a_0^2 b_0 g(\rho_p - \rho_l) \tag{2.10}$$

где g – ускорение свободного падения, ρ_p, ρ_l – плотность частицы и жидкости.

Таблица 1

a_0/b_0	T_s, K						
	273	283	303	333	343	353	363
0,73	0.947	0.705	0.393	0.163	0.121	0.089	0.065
0,9	0.980	0.727	0.397	0.158	0.116	0.086	0.062

Таблица 2

a_0/b_0	$K^{(1)}$	$K^{(2)}$
0.71	0.5822	0.1451
0.75	0.7076	0.1614
0.80	0.7137	0.1594
0.85	0.7201	0.1585
0.90	0.7266	0.1581
0.95	0.7332	0.1582
0.99	0.7386	0.1585

Приравнивая (2.9) и (2.10), получаем скорость установившегося падения нагретой частицы сфероидальной формы

$$U = \frac{\sqrt{1+\lambda_0^2}}{3} a_0 b_0 \frac{G_1 G_2^1 - G_2 G_1^1}{G_1^1} \exp\left\{\frac{A\gamma}{c} \operatorname{arcctg} \lambda_0\right\} g \cdot (\rho_p - \rho_l)$$

Заключение. Полученные формулы позволяют оценивать силу сопротивления движению твердой сфероидальной частицы, нагреваемой внутренними источниками тепла, а также скорости оседания частиц при очистке жидкостей от загрязняющих их частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kassoy D.R., Adamson T.C., Messiter A.F.* Compressible Low Reynolds Number around a Sphere // Phys. Fluids. 1966. V. 9. № 4. P. 671–681.
2. *Найденов В.И.* Установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости с учетом зависимости вязкости от температуры // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 1. С. 162–166.
3. *Щукин Е.Р., Малай Н.В.* Фотофоретическое и термодиффузиофоретическое движение нагретых нелетучих аэрозольных частиц // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 54. № 4. С. 630–635.
4. *Щукин Е.Р., Малай Н.В., Яламов Ю.И.* Движение нагреваемых внутренними источниками тепла капель в бинарных газовых смесях // Теплофизика высоких температур. 1988. Т. 26. № 5. С. 1020–1024.
5. *Малай Н.В.* Гидродинамическое сопротивление гидрозольной частицы сфероидальной формы, нагреваемой внутренними источниками тепла при малых числах Рейнольдса // Инж.-физ. журн. 1999. Т. 72. № 4. С. 651–655.
6. *Бретшнайдер Ст.* Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.; Л.: Химия, 1966. 535 с.
7. *Щукин Е.Р.* Движение неравномерно нагретых капель и частиц сферической формы в вязких неизотермических жидкостях // Инж.-физ. журн. 1986. Т. 50. № 2. С. 681–683.
8. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.

Белгород,
Москва

Поступила в редакцию
20.XI.2000