

УДК 532.5.031+533.692

© 2001 г. В.Г. ЛЕОНТЬЕВ, А.В. ПОТАШЕВ

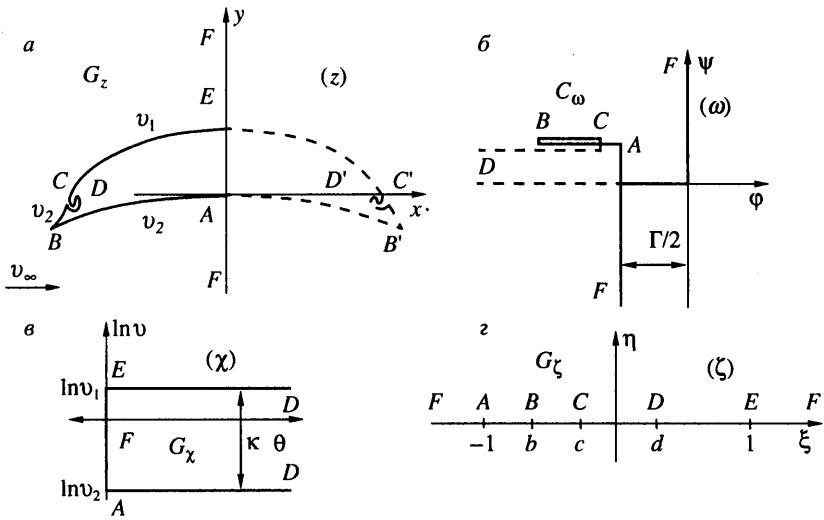
### ВЫСОКОНЕСУЩИЕ МОДЕЛЬНЫЕ КРЫЛОВЫЕ ПРОФИЛИ С ДВУМЯ УЧАСТКАМИ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ НА КОНТУРЕ

Рассмотрена задача построения симметричного крылового профиля с кусочно-постоянным распределением скорости на контуре. Найдена область определения исходных параметров, соответствующая физически реализуемым профилям. Исследованы их оптимальные свойства.

При проектировании крыловых профилей одной из основных проблем является максимизация коэффициента подъемной силы  $C_y$  при ограничении на величину максимальной скорости  $|v_{\max}|$  ( $C_y = 4R_y / (L\rho_\infty v_\infty^2)$ ,  $R_y$  – подъемная сила,  $L$  – характерный линейный размер,  $\rho_\infty$  и  $v_\infty$  – плотность и скорость жидкости на бесконечности). В плоскопараллельном потоке идеальной несжимаемой жидкости при ограниченной кривизне контура профиля и условии расположения критических точек на нем, а не в потоке максимальное значение  $C_y = 2$  [1] (в качестве  $L$  взят периметр контура профиля) достигается при обтекании круга с совпадающими точками разветвления и схода потока. При этом  $|v_{\max}|/v_\infty = 4$ .

Ограничение на величину  $|v_{\max}|$  естественно приводит к обратной краевой задаче аэрогидродинамики [2] построения профиля с участком постоянной скорости  $|v| = |v_{\max}|$  на верхней границе. Изучение таких "модельных" профилей представляет интерес в связи с тем, что их контур удается описать явными формулами. Тем самым получаем возможность весьма простого получения оптимальных, с точки зрения аэродинамики, форм. Для профилей гидродинамических решеток известны решения таких задач с двумя участками постоянной скорости  $|v| = v_1$  и  $|v| = v_2$  на верхней и нижней границах профилей [3].

В настоящей работе исследуется обратная задача, в которой кусочно-постоянное распределение скорости задается на контуре изолированного крылового профиля. Ранее (см. [4], п. 1) был рассмотрен случай, когда точки разрыва скорости и точки разветвления потока совпадают. Таким образом, на всей верхней поверхности профиля скорость принимает постоянное значение  $v_1$ , а на всей нижней –  $v_2$ . Исследование построенного решения показало, что контур соответствующего профиля в окрестности кромок закручивается по логарифмическим спиральям. Простота аналитического решения задачи позволила получить оценку максимального значения коэффициента подъемной силы  $C_{y_{\max}} = 2e$  (в качестве  $L$  бралась длина верхней части контура). Однако проведенные расчеты показали неоднозначность профилей такого типа: их нижняя поверхность всегда располагается выше верхней.



Фиг. 1. Схема решения задачи

Для получения однолистного решения в п. 2 работы [4] постановка задачи была изменена: точка скачка скорости была перенесена на верхнюю часть контура профиля. В данном классе профилей удалось найти однолистные решения. На основе расчетов была построена область изменения исходных параметров, соответствующая однолистным контурам, и исследованы оптимальные свойства получающихся профилей. К сожалению, контуры профилей в этом случае имеют логарифмическую особенность – завиток в точках скачка скоростей, реализовать которую на практике невозможно. В связи с этим в настоящей работе предлагается еще один подход к изучаемой проблеме, позволяющий преодолеть эту трудность.

Пусть искомый профиль (фиг. 1, а) обтекается установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости плотности  $\rho_\infty$  с заданной на бесконечности скоростью  $v_\infty$ , параллельной оси абсцисс. Требуется найти форму крылового профиля и коэффициент подъемной силы, если распределение скорости вдоль контура задается в виде кусочно-постоянной функции. На нижней части контура  $BAB'$  и начальных и конечных участках верхней части контура  $BD$  и  $B'D'$  скорость равна  $v_2$ , а на среднем участке  $DED'$  верхней части контура –  $v_1$  ( $v_1 > v_2$ ).

Для того чтобы избежать появления логарифмических спиралей в окрестности точек  $D, D'$  скачка скорости, поместим в эти точки полубесконечные кольцевые каналы (такая модель была применена в работе [5]) с расходами  $q$  одинаковой величины, но с разными знаками. Таким образом, слева жидкость вытекает из профиля, а справа – затекает в него. Несмотря на то что введенные кольцевые каналы бесконечнолиственны, они удовлетворительно моделируют реальные однолистные каналы конечной длины (см. [6]).

В дальнейшем все решения будем проводить в безразмерных переменных

$$z' = z/L, \quad v' = v/v_\infty, \quad Y' = Y/(L\rho_\infty u_\infty^2)$$

опуская штрихи для упрощения записи.

В силу симметричных исходных данных картина течения будет симметрична относительно оси ординат, поэтому достаточно рассмотреть ее левую половину  $G_z$ .

Для решения задачи построим области  $G_w$  (фиг. 1, б) и  $G_\chi$  (фиг. 1, в), соответствующие области течения  $G_z$  в плоскостях комплексного потенциала  $w = \varphi + i\psi$  и функции Жуковского – Мичелла

$$\chi = i \ln \left( \frac{dw}{dz} \right) = \theta + i \ln v \quad (1)$$

где  $v$  – модуль скорости,  $\theta$  – ее аргумент.

В качестве канонической области выберем верхнюю полуплоскость  $G_\zeta$  в плоскости вспомогательного переменного  $\zeta = \xi + i\eta$  с соответствием точек, показанным на фиг. 1, г. Конформные отображения области  $G_\zeta$  на области  $G_w$  и  $G_\chi$  запишутся по формулам Кристоффеля – Шварца

$$w(\zeta) = iA \int_1^\zeta \frac{(t-b)(t-c)dt}{(t-d)\sqrt{t^2-1}} \quad (2)$$

$$\chi(\zeta) = -iB \int_1^\zeta \frac{dt}{(t-d)\sqrt{t^2-1}} + i \ln v_1 \quad (3)$$

где  $A$  и  $B$  – действительные положительные константы (аналогичные выражения можно получить если строить  $dw/d\zeta$  и  $d\chi/d\zeta$  методом особенностей [7]).

Проинтегрировав выражения (2) и (3) при  $\zeta = \xi \in [-1, 1]$ , получим

$$w(\xi) = A \left\{ -\sqrt{1-\xi^2} + (d-b-c) \left( \arcsin \xi + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{(d-b)(d-c)}{\sqrt{1-d^2}} \ln \frac{2|\xi-d|}{[\sqrt{(1-d)(1+\xi)} + \sqrt{(1+d)(1-\xi)}]^2} \right\}$$

$$\chi(\xi) = \frac{B}{\sqrt{1-d^2}} \ln \frac{2|\xi-d|}{[\sqrt{(1-d)(1+\xi)} + \sqrt{(1+d)(1-\xi)}]^2} + i \ln v_k$$

где  $k = 1$  при  $\xi \in (d, 1]$  или  $k = 2$  при  $\xi \in [-1, d)$ .

Координаты искомого контура профиля, с учетом (1), определяются по формуле

$$z(\zeta) = \frac{1}{v_\infty} \int_1^\zeta e^{i\chi(t)} \frac{dw}{dt} dt$$

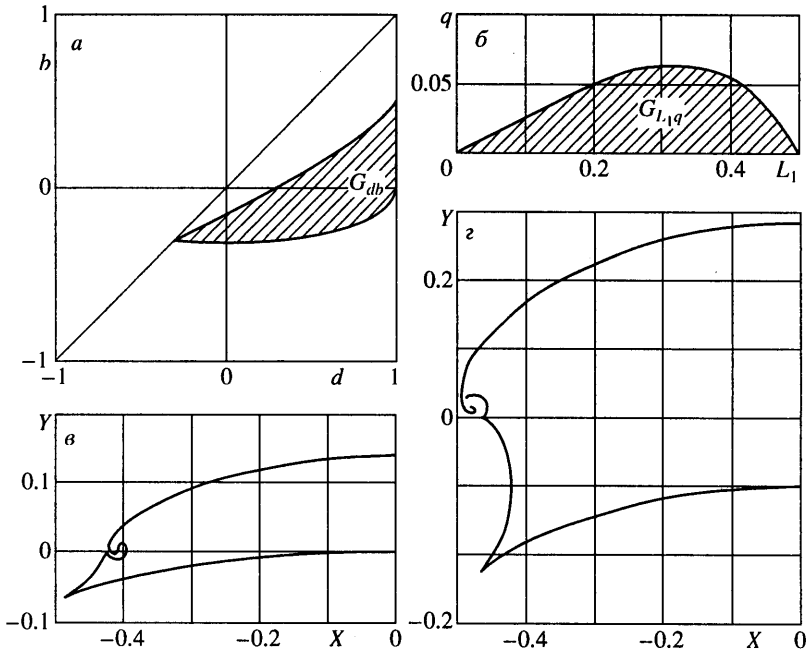
Для решения этой задачи в классе замкнутых профилей имеем шесть условий:

$$\pi i \operatorname{res}_{\zeta=d} \frac{dw}{d\zeta} = iq, \quad \pi i \operatorname{res}_{\zeta=d} \frac{d\chi}{d\zeta} = -ix, \quad \operatorname{res}_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{dz}{d\zeta} = 0$$

$$\varphi(b) = \frac{-v_1 L}{2}, \quad \varphi(c) = v_2 L_1 - \frac{-v_1 L}{2}, \quad \operatorname{Im} \chi(\infty) = 0$$

В них входят пять неизвестных параметров:  $b, c, d, A, B$ , поэтому вместо скоростей  $v_1$  и  $v_2$  так же, как в работе [4], будем задавать безразмерный параметр  $\kappa = \ln(v_1/v_2)$ , а сами скорости – отыскивать.

Полученную систему уравнений удобно решать в полуобратной постановке, задавая вместо  $L_1$  и  $q$  координаты  $b$  и  $d$  точек разветвления потока и расположения канала



Фиг. 2. Области существования физически реализуемых профилей и их вид

во вспомогательной плоскости  $\zeta$ . Тогда все остальные неизвестные параметры получают явные выражения:

$$B = \frac{\kappa\sqrt{1-d^2}}{\pi}, \quad v_1 = \exp\left[\frac{\kappa}{\pi} \arccos(-d)\right]$$

$$v_2 = v_1 e^{-\kappa}, \quad c = d - b - B$$

$$\frac{1}{q} = \frac{2}{v_2 \pi} \left[ \frac{\sqrt{1-d^2} \sqrt{1-b^2}}{(d-b)(d-c)} - \frac{\sqrt{1-d^2} (d-b-c)}{(d-b)(d-c)} \left( \arcsin b + \frac{\pi}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - \ln \frac{2(d-b)}{[\sqrt{(1-b)(1+d)} + \sqrt{(1+b)(1-d)}]^2} \right]$$

$$A = \frac{q\sqrt{1-d^2}}{\pi(d-b)(d-c)}, \quad \Gamma = 2\pi A(d-b-c)$$

$$L_1 = \frac{1}{v_2} \left[ -A\sqrt{1-c^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \arcsin c + \frac{\pi}{2} \right) + \ln \frac{2(d-c)}{[\sqrt{(1-c)(1+d)} + \sqrt{(1+c)(1-d)}]^2} \right] + \frac{1}{2}$$

Для разрешимости задачи параметры  $d$  и  $b$  при фиксированном значении  $\kappa$  должны лежать в некоторой области допустимых значений  $G_{db}$ , которая определяется неравенствами

$$-1 \leq b \leq d \leq 1, \quad b \leq c \leq d \quad (4)$$

№	$\kappa$	$b$	$d$	$q$	$L_1$	$v_1$	$v_2$	$C_y$
1	1,0	-0,31	0,197	0,001	0,11	1,755	0,646	2,26
2	1,0	-0,30	0,197	0,009	0,09	1,755	0,646	2,23
3	2,0	-0,63	-0,117	0,002	0,30	2,522	0,341	6,28
4	2,0	-0,62	-0,117	0,014	0,25	2,522	0,341	6,11

Первому неравенству в системе (4) соответствует треугольная область, ограниченная прямыми  $d = 1$ ,  $b = -1$ ,  $b = d$ . Второе из неравенств (4) преобразуется к виду

$$-\frac{\kappa\sqrt{1-d^2}}{\pi} \leq b \leq \frac{d}{2} - \frac{\kappa\sqrt{1-d^2}}{2\pi}$$

На фиг. 2, *a* показана полученная область  $G_{db}$  для  $\kappa = 1$ . В левой точке пересечения границ ( $b = d$ ) точки  $D$  и  $C$  совпадают с точкой  $B$  разветвления потока и расход в канале равен нулю. Таким образом, эта точка характеризует первый из рассмотренных в [4] случаев, при котором получены неоднолистные решения. Нижняя граница области соответствует равенству  $c = d$ , то есть нулевому расходу в канале (второй случай из [4]).

Проведенные расчеты показали, что область  $G_{db}$  не является областью допустимых параметров для построения однолистных профилей. Это связано с тем, что стенки канала могут пересекать либо нижнюю поверхность профиля, либо ось симметрии  $y$ . Указанные ограничения трудно выразить аналитически, поэтому область, соответствующая однолистным решениям, была построена численно. Она представляет собой довольно узкую полосу, прилегающую к нижней границе области  $G_{db}$ , поэтому для большей наглядности на фиг. 2, *б* показана область  $G_{L_1q}$  в плоскости физических параметров  $L_1, q$ , из которой видно, что однолистные решения возможны лишь при малых значениях расхода  $q$ .

Профилям, обладающим максимальным коэффициентом подъемной силы, в области  $G_{L_1q}$  будет соответствовать нижняя граница  $q = 0$ , т.е. случай расположения в точке скачка скоростей логарифмического завитка. Значения параметров  $\kappa, b, d$  и величин  $L_1, v_1, v_2, C_y$  для профилей, близких к этому случаю, приведены в строках 1 и 3 таблицы. Чтобы получить профиль, соответствующий рассматриваемой схеме обтекания ( $q > 0$ ), нужно отступить от этой границы, при этом значение  $C_y$  уменьшается незначительно. Соответствующие профили и их параметры приведены на фиг. 2, *в, г* (здесь  $X = x/L, Y = y/L$ ) и в строках 2, 4 таблицы.

**Заключение.** Получено трехпараметрическое семейство симметричных крыловых профилей с двумя участками постоянного распределения скорости на их контурах, описываемых явными формулами. Построена область допустимых значений параметров, обеспечивающих однолистность течения. Указаны профили с максимальным коэффициентом подъемной силы при заданных ограничениях на определяющие параметры.

Авторы благодарят Г.Ю. Степанова и Н.Б. Ильинского за предложенную тематику исследований и полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 99-01-00365, 01-01-04004).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаурентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
2. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1994. 440 с.
3. *Степанов Г.Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.
4. *Леонтьев В.Г., Поташев А.В.* Крыловые профили постоянной скорости // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского: Казанское математическое о-во. Казань: УНИ-ПРЕСС, 1998. С. 197–204.
5. *Абзалилов Д.Ф., Ильинский Н.Б., Степанов Г.Ю.* Построение крылового профиля с отбором внешнего потока // Изв. РАН. МЖТ. 1996. № 6. С. 23–28.
6. *Степанов Г.Ю.* Построение плоских каналов и решеток турбомашин с безотрывным течением // Изв. РАН. МЖТ. 1993. № 4. С. 30–42.
7. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.

Казань

Поступила в реакцию  
15.VI.2000