

УДК 532.614:532.516.

© 2001 г. В.Е. ЗАХВАТАЕВ

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ БЕНАРА – МАРАНГОНИ ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЙ ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ МЕЖФАЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Исследуется влияние изменений поверхностной внутренней энергии, обусловленных локальными приращениями площади межфазной поверхности, на условия возникновения термокапиллярной неустойчивости Марангони двухслойной системы для жидкостей с пониженной вязкостью. Показано, что в линейном приближении рассматриваемый эффект оказывает стабилизирующее воздействие на развитие монотонной моды неустойчивости.

При изучении термокапиллярной конвекции [1] – конвективных движений в окрестности неизотермических границ раздела фаз, вызываемых градиентами межфазного натяжения, изменения внутренней энергии межфазной поверхности, как правило, не учитываются. Для большинства обычных жидкостей при комнатной температуре влияние этих изменений на формирование потоков тепла, полей температуры и скоростей в окрестности поверхности раздела незначительно по отношению к вязкому трению и теплопереносу [2]. Однако при достаточно высоких температурах, т.е. в условиях, когда вязкость и теплопроводность обычных жидкостей существенно уменьшаются, а также для жидкостей с пониженной вязкостью приращения поверхностной внутренней энергии могут оказывать значительное воздействие на динамику [3, 4].

Поверхностная внутренняя энергия, отнесенная к единице площади межфазной поверхности, u^s , складывается для индивидуальных веществ из поверхностной свободной энергии σ и скрытой теплоты образования q^s единицы поверхности [5, 6]: $u^s = \sigma + q^s$, $q^s = -\theta d\sigma/d\theta$, где θ – абсолютная температура. Для многих чистых жидкостей в широком диапазоне температур зависимость σ от θ хорошо аппроксимируется линейной [6]. В этом случае $u^s = \text{const}$ и приращения внутренней энергии межфазной поверхности целиком обусловлены локальными изменениями ее площади (обновлением границы раздела). Выделение или поглощение теплоты при локальных приращениях площади межфазной поверхности, вызывая изменения поля температуры, индуцируют дополнительные тангенциальные напряжения на границе раздела.

Отношение порядков величин последних и вязких напряжений характеризуется безразмерным параметром [3, 4] $E = (d\sigma/d\theta)^2 \theta^* / (\mu k)$, где μ , k и θ^* – соответственно характерные вязкость, теплопроводность и температура жидкости в окрестности поверхности раздела. Согласно расчетам [3], значения $E = O(1)$, при которых обсуждаемый физический фактор необходимо учитывать, достигаются для большинства обычных жидкостей при достаточно высоких температурах, а также для жидкостей с пониженной вязкостью, например для криогенных жидкостей, таких как жидкий CO_2 (так, для воды H_2O имеем [7] $E \approx 0.02$ при $\theta = 303.15\text{K}$; $E \approx 0.6$ при $\theta = 573.15\text{K}$; $E \approx 0.7$ при $\theta = 623.15\text{K}$).

Различные аспекты вопроса о воздействии приращений поверхностной внутренней энергии на устойчивость и динамику термокапиллярных систем рассматривались

в [2–4, 8, 9]. В настоящей работе исследуется влияние изменений внутренней энергии межфазной поверхности на условия возникновения монотонной термокапиллярной неустойчивости состояния покоя двухслойной системы при наличии градиента температуры в поперечном направлении.

1. Формулировка задачи. Рассмотрим две несмешивающиеся жидкости, заполняющие пространство между плоскими горизонтальными твердыми стенками, так что невозмущенная граница раздела между жидкими фазами определяется уравнением $z = 0$ (x, y, z – декартовы координаты, причем ось z направлена вертикально вверх). На нижней ($z = -d_1$) и верхней ($z = d_2$) стенках поддерживаются постоянные значения температуры T_1 и T_2 соответственно. Плотности ρ_j ($j = 1, 2$), динамические вязкости μ_j , теплопроводности k_j и температуропроводности χ_j жидкостей считаются постоянными (индексами 1 и 2 обозначаются величины, относящиеся соответственно к нижнему и верхнему слою). Зависимость коэффициента межфазного натяжения σ от температуры аппроксимируется линейной: $\sigma = \sigma_0 - \kappa(\theta - \theta^*)$, где θ^* – температура на межфазной поверхности в состоянии равновесия, σ_0 и κ – константы. Система находится в постоянном поле тяжести; величина ускорения силы тяжести равна g . Предполагается, что жидкости несжимаемы, однокомпонентны, силами плавучести и диффузией тепла вдоль границы раздела можно пренебречь. Для простоты будем также пренебрегать массопереносом через межфазную поверхность.

Для описания возникновения термокапиллярной неустойчивости используем следующую систему уравнений и граничных условий [10–12]:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_j = 0, \quad \rho_j \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = -\rho_j g \mathbf{z} - \nabla p_j + \mu_j \Delta \mathbf{v}_j, \quad \frac{d\theta_j}{dt} = \chi_j \Delta \theta_j \quad (1.1)$$

$$f(\mathbf{x}, t) \equiv z - h(x, y, t) = 0:$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} = v_n^s, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad -\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n} + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n} = 2K\sigma \mathbf{n} + \nabla_s \sigma \quad (1.2)$$

$$q^s \nabla_s \cdot \mathbf{v} = (k_2 \nabla \theta_2 - k_1 \nabla \theta_1) \cdot \mathbf{n} \quad (1.3)$$

$$z = -d_1 : \mathbf{v}_1 = 0, \quad \theta_1 = T_1; \quad z = d_2 : \mathbf{v}_2 = 0, \quad \theta_2 = T_2 \quad (1.4)$$

$$\nabla_s = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$$

Здесь $\mathbf{v}_j(\mathbf{x}, t)$ – поле скоростей в точке $\mathbf{x} = (x, y, z)$ в момент времени t ; $\theta_j(\mathbf{x}, t)$ – абсолютная температура; $p_j(\mathbf{x}, t)$ – давление; \mathbf{z} – единичный вектор, направленный противоположно оси z ; \mathbf{P}_j – тензор давлений; $\mathbf{n} = \nabla f / |\nabla f|$ – единичный вектор нормали к поверхности $f = 0$; K – средняя кривизна поверхности $f = 0$ (считается, что $K > 0$, если поверхность $f = 0$ выпукла наружу области, занимаемой верхним слоем жидкости); v_n^s – скорость перемещения поверхности $f = 0$ в направлении нормали \mathbf{n} ; точка между символами тензоров используется для обозначения внутреннего произведения.

Соотношения (1.1) суть уравнения неразрывности, движения и баланса внутренней энергии. Соотношения (1.2) выражают кинематическое условие непротекания, непрерывность полей скоростей и температур и баланс напряжений на межфазной границе. Условие баланса энергии (1.3) означает, что скачок теплового потока по нормали к границе раздела компенсируется теплотой, поглощаемой или выделяющейся при локальных изменениях площади межфазной поверхности (отметим, что приращение элемента площади $d\Sigma$ границы раздела удовлетворяют соотношению [13]: $d / dt d\Sigma = d\Sigma \nabla_s \cdot \mathbf{v}$).

2. Анализ устойчивости. Определим условия возникновения монотонной моды термокапиллярной неустойчивости состояния механического равновесия рассматриваемой системы. Аналогичная задача без учета скрытой теплоты образования межфазной границы рассмотрена в [14]. В основном состоянии жидкости неподвижны,

профили давлений и температур линейны по вертикальной координате, граница раздела плоская:

$$p_{0j} = -\rho_j g z + \text{const}, \quad \theta_{0j} = \theta^* + b_j z, \quad h_0 = 0$$

$$\theta^* = \frac{T_1 + T_2 H^*}{1 + H^*}, \quad b_1 = \frac{1}{d_1} \frac{(T_2 - T_1) H^*}{1 + H^*}, \quad b_2 = \frac{k_1}{k_2} b_1, \quad H^* = \frac{k_2 d_1}{k_1 d_2}$$

Пусть u_j, v_j, w_j – соответственно x -, y -, z -компоненты вектора скорости, θ'_j – возмущение температуры в нижнем и в верхнем слое. Линеаризуя на основном состоянии систему (1.1) – (1.4), исключая из полученных уравнений обычным путем возмущение давления и горизонтальные компоненты скорости u_j, v_j , для нейтральных нормальных возмущений следующего вида получим краевую задачу

$$(w_j, \theta'_j, h) = (W_j(z), \Theta_j(z), H) \exp(i\alpha_x x + i\alpha_y y)$$

$$(D^2 - \alpha^2)^2 W_j = 0, \quad \chi_j (D^2 - \alpha^2) \Theta_j = b_j W_j$$

$$z = 0: W_1 = W_2 = 0, \quad DW_1 = DW_2, \quad \Theta_1 + b_1 H = \Theta_2 + b_2 H$$

$$\mu_1 D^3 W_1 - \mu_2 D^3 W_2 - 3\alpha^2 (\mu_1 - \mu_2) DW_1 = \alpha^2 (\rho_1 - \rho_2) g H + \alpha^4 \sigma_0 H$$

$$\mu_1 D^2 W_1 - \mu_2 D^2 W_2 = -\alpha \alpha^2 (\Theta_1 + b_1 H)$$

$$k_1 D \Theta_1 - k_2 D \Theta_2 = \alpha \theta_{01} DW_1$$

$$D = d/dz, \quad \alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2$$

$$z = -d_1: \Theta_1 = 0, \quad W_1 = 0, \quad DW_1 = 0$$

$$z = d_2: \Theta_2 = 0, \quad W_2 = 0, \quad DW_2 = 0$$

(2.1)

Условие существования нетривиального решения системы (2.1) дает соотношение, определяющее критическое число Марангони M :

$$\begin{aligned} M \left\{ 1 - \frac{d_2 \chi_1}{d_1 \chi_2} \frac{F_1(\alpha d_1)}{F_1(\alpha d_2)} - \frac{8 \text{Ca}}{\text{Bo} + (\alpha d_1)^2} G_1(\alpha d_1) \left\{ 1 + \frac{\text{th}(\alpha d_1)}{\text{th}(\alpha d_2)} \right\} \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 - \frac{\mu_2 d_1^2}{\mu_1 d_2^2} \frac{G_2(\alpha d_1)}{G_2(\alpha d_2)} + (\alpha d_1)^2 \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) G_2(\alpha d_1) \right\} \right\} = \\ = 8 F_2(\alpha d_1) \left\{ 1 + \frac{b_1 \text{th}(\alpha d_1)}{b_2 \text{th}(\alpha d_2)} \right\} \left\{ 1 + \frac{\mu_2 d_1}{\mu_1 d_2} \frac{F_3(\alpha d_1)}{F_3(\alpha d_2)} \right\} + 4 \alpha d_1 E F_1(\alpha d_1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$M = \frac{-\alpha b_1 d_1^2}{\mu_1 \chi_1}, \quad E = \frac{\alpha^2 \theta^*}{\mu_1 k_1} > 0, \quad \text{Ca} = \frac{\mu_1 \chi_1}{\sigma_0 d_1}, \quad \text{Bo} = \frac{(\rho_1 - \rho_2) g d_1^2}{\sigma_0}$$

$$F_1(\xi) = \frac{(1 - (1/\xi^2) \text{sh}^2 \xi) \text{sh} \xi}{\text{ch} \xi - (1/\xi^3) \text{sh}^3 \xi}, \quad F_2(\xi) = \frac{(1 - (1/\xi) \text{sh} \xi \text{ch} \xi) \text{ch} \xi}{\text{ch} \xi - (1/\xi^3) \text{sh}^3 \xi}$$

$$F_3(\xi) = \frac{1 - (1/\xi^2) \text{sh}^2 \xi}{1 - (1/\xi) \text{sh} \xi \text{ch} \xi}, \quad G_1(\xi) = \frac{\text{ch} \xi \text{sh}^2 \xi}{\text{ch} \xi - (1/\xi^3) \text{sh}^3 \xi}$$

$$G_2(\xi) = \frac{1 - (1/\xi^2) \text{sh}^2 \xi}{\text{sh}^2 \xi}$$

При $E = 0$ формула (2.2) совпадает с результатом, полученным в [14].

Нетрудно видеть, что модуль критического числа Марангони, определяемого соотношением (2.2), возрастает в сравнении со случаем $E = 0$.

В длинноволновом приближении $\alpha d_1 \rightarrow 0$ из (2.2) получаем

$$\begin{aligned} M & \left\{ (\alpha d_1)^2 \left(1 - \frac{d_2^2 \chi_1}{d_1^2 \chi_2} \right) + \frac{120 \text{Ca}}{\text{Bo}} \left(1 + \frac{d_1}{d_2} \right) \left(1 - \frac{\mu_2 d_1^2}{\mu_1 d_2^2} \right) \right\} = \\ & = 80 \left(1 + \frac{b_1 d_1}{b_2 d_2} \right) \left(1 + \frac{\mu_2 d_1}{\mu_1 d_2} \right) + 20E(\alpha d_1)^2 \\ \frac{M - M_0}{M_0} & = \frac{E(\alpha d_1)^2}{4} \left(1 + \frac{b_1 d_1}{b_2 d_2} \right)^{-1} \left(1 + \frac{\mu_2 d_1}{\mu_1 d_2} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

(M_0 – критическое число Марангони M , определяемое (2.2) при $E = 0$), а в коротковолновом пределе $\alpha d_1 \rightarrow \infty$ имеем

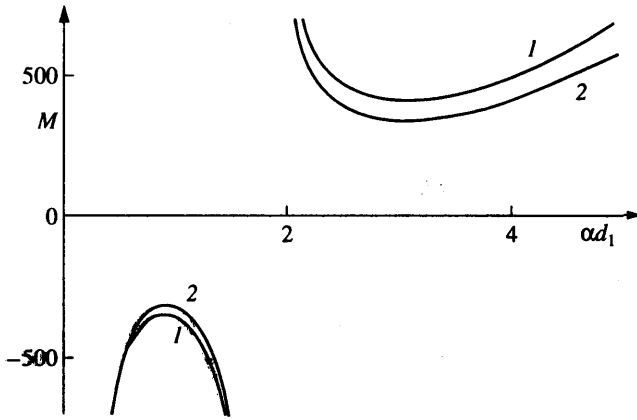
$$\begin{aligned} M \left(1 - \frac{\chi_1}{\chi_2} \right) & = 8(\alpha d_1)^2 \left(1 + \frac{b_1}{b_2} \right) \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) + 4E(\alpha d_1)^2 \\ \frac{M - M_0}{M_0} & = \frac{E}{2} \left(1 + \frac{b_1}{b_2} \right)^{-1} \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из (2.4) видно, что при $E \geq O(10^{-1})$ относительный рост критического числа Марангони $\delta = (M - M_0)/M_0$ в коротковолновой области может быть весьма существенным. (Интересно отметить, что уже при комнатной температуре 30°C для системы вода – водяной пар в условиях насыщения ($E = 0.02$) относительное изменение δ для коротковолновых возмущений составляет примерно один процент.) В то же время, согласно (2.3), в длинноволновом предельном случае границы устойчивости расширяются незначительно с ростом параметра E .

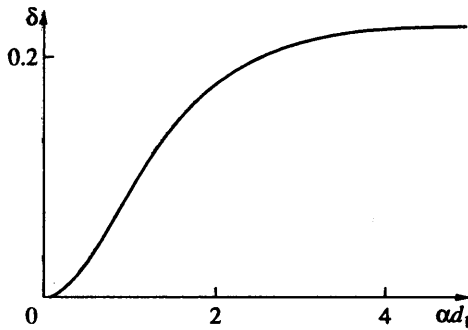
На фиг. 1 приведены нейтральные кривые для следующих значений определяющих параметров, соответствующих системе вода – водяной пар в условиях насыщения при температуре 300°C [7]: $\text{Bo} = 0.05$; $\text{Ca} = 10^{-5}$; $\chi_2/\chi_1 = 2$; $\mu_2/\mu_1 = 0.2$; $b_2/b_1 = 7.5$; $d_2/d_1 = 2$; кривая 1 соответствует $E = 0.6$, кривая 2 – $E = 0$ (соответствующие длинноволновой моде ветви нейтральных кривых не показаны в масштабах рисунка). Для этого случая на фиг. 2 изображена зависимость величины δ от αd_1 . Согласно результатам расчета, относительный рост минимального критического числа Марангони коротковолновой моды неустойчивости при подогреве снизу ($M > 0$) составляет приблизительно 21%, а при подогреве сверху ($M < 0$) – 7%. Максимальное относительное увеличение критического числа Марангони достигается в коротковолновой области. Как показывают численные расчеты, выход на коротковолновую асимптотику (2.4) во многих случаях имеет место при $\alpha d_1 \sim 4$.

Величины W_j , H , получаемые в процессе решения задачи о собственных значениях (2.1), не изменяются по сравнению со случаем $E = 0$. Следовательно, механизм влияния исследуемого эффекта на развитие термокапиллярной неустойчивости сопряжен с возмущениями только поля температуры.

Заключение. В линейном приближении исследовано влияние теплоты, выделяющейся или поглощаемой при локальных приращениях площади межфазной поверх-



Фиг. 1. Нейтральные кривые для $Bo = 0.05$; $Ca = 10^{-5}$; $\chi_2/\chi_1 = 2$; $\mu_2/\mu_1 = 0.2$; $b_2/b_1 = 7.5$; $d_2/d_1 = 2$; кривая 1 соответствует $E = 0.6$; кривая 2 – $E = 0$



Фиг. 2. Зависимость относительного изменения критического числа Марангони $\delta = (M - M_0)/M_0$ от αd_1 ; значения параметров те же, что для фиг. 1

ности, на условия возникновения монотонной термокапиллярной неустойчивости состояния механического равновесия двухслойной системы в бенаровской геометрии. Рассматриваемый эффект необходимо учитывать для жидкостей с пониженной вязкостью, в частности для обычных жидкостей при достаточно высоких температурах. Проведенный анализ показывает, что изменения поверхностей внутренней энергии оказывают стабилизирующее влияние на развитие неустойчивости Марангони. Наиболее значительное повышение критических градиентов температуры имеет место для коротковолновых возмущений.

Другие тепловые эффекты, например связанные с испарением, могут, конечно, существенно изменить порог устойчивости для рассматриваемой физической системы, однако приводимые результаты позволяют предсказать и, по крайней мере качественно, оценить новые эффекты, которые могут быть обнаружены при проведении соответствующих экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-15-96162), гранта конкурса-экспертизы научных проектов молодых ученых СО РАН в 2000 г. и Красноярского краевого фонда науки (код проекта 11G26).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Davis S.H.* Thermocapillary instabilities // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1987. V. 19. P. 403–435.
2. *Harper J.F., Moore D.W., Pearson J.R.A.* The effect of the variation of surface tension with temperature on the motion of bubbles and drops // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 27. Pt 2. P. 361–366.
3. *Torres F.E., Helberzheimer E.* Temperature gradients and drag effects produced by convection of interfacial internal energy around bubbles // *Phys. Fluids. A.* 1993. V. 5. № 3. P. 537–549.
4. *Захватаев В.Е.* Влияние изменений внутренней энергии межфазной поверхности на устойчивость двухслойного течения Пуазейля // *Изв. РАН. МЖТ.* 2000. № 6.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. 584 с.
6. *Адамсон А.* Физическая химия поверхностей. М.: Мир, 1979. 568 с.
7. *Варгафтик Н.Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
8. *Захватаев В.Е.* Некоторые слабонелинейные амплитудные уравнения, описывающие поведение тонкого слоя в двухфазном течении вязких теплопроводных жидкостей вдоль цилиндра // *ПМТФ.* 1997. Т. 38. № 1. С. 178–186.
9. *Захватаев В.Е.* О возможном влиянии изменения внутренней энергии свободной поверхности тонкого слоя жидкости на его волновое течение // *ПМТФ.* 1999. Т. 40. № 1. С. 10–21.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
11. *Bedeaux D., Albano A.M., Mazur P.* Boundary conditions and nonequilibrium thermodynamics // *Physica. A.* 1976. V. 82. № 3. P. 438–462.
12. *Пухначев В.В.* Движение вязкой жидкости со свободными границами. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1989. 96 с.
13. *Stone H.A.* A simple derivation of the time-dependent convection-diffusion equation for surfactant transport along a deforming interface // *Phys. Fluids. A.* 1990. V. 2. № 1. P. 111–112.
14. *Smith K.A.* On convective instability induced by surface-tension gradients // *J. Fluid Mech.* 1966. V. 24. Pt 2. P. 401–414.

Красноярск

Поступила в редакцию
10.X.2000