

УДК 532.529.2:536.421

© 2001 г. П.Т. ЗУБКОВ, Е.В. КАЛАБИН

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ
ВОДЫ ВБЛИЗИ ТОЧКИ ИНВЕРСИИ ПЛОТНОСТИ
ПРИ ЧИСЛАХ ГРАСГОФА ДО 10^6**

Рассмотрена естественная конвекция пресной воды при температуре, близкой к температуре инверсии плотности в квадратной ячейке со значениями числа Грасгофа $2,9 \cdot 10^4 \leq Gr \leq 10^6$. В дополнение к трем стационарным течениям, которые ранее были обнаружены и описаны для небольших чисел Gr ($0 \leq Gr \leq 2 \cdot 10^5$), в результате численного исследования найдены еще одно стационарное и три автоколебательных решения. К основным характеристикам нестационарных течений применен фурье-анализ, выявлены основные частоты колебаний, рассмотрены эволюция течений и изменение характеристики колебаний при увеличении числа Gr .

Задача о естественной конвекции жидкостей в замкнутых полостях – объект многих экспериментальных и численных исследований [1], что объясняется важностью этого явления в природных и технологических процессах. Данная задача допускает множество решений, как стационарных, так и нестационарных, что обусловлено нелинейностью уравнений Навье–Стокса и конвективного теплопереноса. Например, в [2] проведено исследование автоколебательных решений в задаче естественной конвекции воздуха и воды (при температуре около 20°C) в области с локальным теплообменом на горизонтальных сторонах при различных начальных условиях и при больших значениях числа Грасгофа ($Gr = 10^4 - 2 \cdot 10^5$ для воды и $10^5 - 5 \cdot 10^9$ для воздуха). Найдено три типа колебательных течений в зависимости от значений числа Грасгофа. Стационарные и автоколебательные решения могут существовать при одних и тех же параметрах, в [3] получены одно автоколебательное и три стационарных течения в квадратичной ячейке с изотермическими участками на горизонтальных сторонах при различных начальных условиях и числе Грасгофа, равном $2 \cdot 10^5$.

Воздействие тех или иных факторов на структуру конвективных течений и теплоперенос в областях с простейшей геометрией изучено, например, в [4], где рассмотрено влияние теплового излучения и слабого наклона в квадратной ячейке с изотермическими горизонтальными и адиабатическими вертикальными стенками. Еще одним фактором, меняющим характеристики теплообмена и усложняющим структуру течения, является нелинейная зависимость плотности жидкости от температуры. Примером подобной жидкости может служить вода, для которой эта зависимость имеет максимум около 4°C . Влияние этой нелинейности численно изучено в [5, 6], где рассматривалась конвекция холодной воды в квадратной ячейке, подогреваемой снизу. Были обнаружены одно автоколебательное и три стационарных решения, а также отмечено, что учет аномалии плотности приводит к усложнению течений. Этот факт был подробно обсужден в [7].

С развитием вычислительной техники расширилась возможность численного моделирования трехмерных течений; например, в [8] проведено исследование естественной

конвекции холодной воды в кубической ячейке с изотермическими горизонтальными и адиабатическими вертикальными стенками для чисел Грасгофа от 0 до $1,7 \cdot 10^4$. Получены шесть различных стационарных решений, причем большинство из них имеет именно трехмерную структуру.

Однако существует большой класс задач, которые могут быть решены и в двумерной постановке. Например, периодические и непериодические автоколебательные течения в ячейке Хеле–Шоу (т.е. в полости, один из размеров которой намного меньше двух других) были численно исследованы в [9], а экспериментально проверены в [10]. Принципиально иная ситуация рассмотрена в [11], где экспериментально исследована естественная конвекция в полости размером $160 \times 120 \times 120$ мм³ с различными температурами на противоположных боковых стенках. Показано, что поле скоростей в центральном сечении совпадает с результатами двумерного численного моделирования даже при числе Грасгофа порядка $1,25 \cdot 10^6$.

Таким образом, двумерная постановка задач естественной конвекции до сих пор актуальна (например, для изучения явления гистерезиса в [12]), так как трехмерная постановка подобного рода задач чрезвычайно затруднена.

Существование нескольких типов стационарных течений холодной воды в квадратной ячейке с теплоизолированными вертикальными стенками и изотермическими горизонтальными численно исследовано в [13]. Эволюция этих решений при изменении числа Грасгофа рассмотрена в [14], где два симметричных и одно несимметричное стационарные решения получены при различных начальных условиях для $0 \leq Gr \leq 2 \cdot 10^5$.

В настоящей работе продолжается исследование задачи, сформулированной в [13, 14], но с большими значениями числа Грасгофа.

1. Постановка задачи. Изучаются конвективные течения и теплоперенос в квадратной полости со стороны Н, заполненной пресной холодной водой (температура около 4°C). Вертикальные стенки полости теплоизолированы, а горизонтальные поддерживаются при постоянной температуре. Значения температур верхней и нижней стенок (T_u и T_d) выбираются так, чтобы температура максимума плотности воды (T_{inv}) находилась строго посередине между ними.

Для моделирования задач естественной конвекции обычно используется приближение Буссинеска [15], в рамках которого все теплофизические характеристики полагаются постоянными, за исключением изменения плотности в источниковом члене уравнения движения. Причем для зависимости плотности от температуры используется линейная аппроксимация. Однако она неверна для воды с экстремумом плотности вблизи 4°C, и из-за этого возникает вопрос о применимости приближения Буссинеска для исследования естественной конвекции холодной воды.

Влияние переменного коэффициента вязкости μ и аномальной зависимости плотности от температуры на конвективные течения в квадратной полости с теплоизолированными горизонтальными и изотермическими вертикальными стенками рассмотрено в [16]. Сделан вывод о том, что нелинейная зависимость плотности от температуры сильно усложняет структуру течения, в то время как изменением коэффициента вязкости можно пренебречь. Более детально этот вопрос исследован в [17], где эта задача решалась в предположении переменности давления и коэффициентов вязкости и теплопроводности.

Здесь все теплофизические характеристики предполагаются постоянными, а нелинейная зависимость плотности от температуры аппроксимируется формулой Гебхарда–Моллендорфа [18]

$$\rho(T) = \rho_m (1 - \beta |T - T_{inv}|^\gamma), \quad \beta = 9,297173 \cdot 10^{-6} (\text{°C})^{-\gamma}, \quad \gamma = 1,894816$$

Здесь $\rho_m = 999,972$ кг/м³ – максимум плотности при температуре инверсии $T_{inv} = 4,029325$ °C.

Для описания естественной конвекции несжимаемой жидкости используется система двумерных уравнений Навье–Стокса в безразмерном виде и в постановке, аналогичной приближению Буссинеска:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial Fo} + (\mathbf{V}\mathbf{V})\mathbf{V} = -\nabla P + \Delta \mathbf{V} + Gr |\Theta|^{\gamma} \mathbf{e}_y \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + (\mathbf{V}\mathbf{V})\Theta = \frac{1}{Pr} \Delta \Theta, \quad \nabla \mathbf{V} = 0$$

$$X = \frac{x}{H}, \quad U = \frac{uH}{\nu}, \quad Fo = \frac{t\nu}{H^2}, \quad \Theta = \frac{T - T_{inv}}{T_d - T_u}, \quad P = \frac{pH^2}{\nu^2 \rho_m}$$

$$Gr = \frac{g\beta |T_d - T_u|^{\gamma} H^3}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}$$

Здесь размерные и безразмерные характеристики: $\mathbf{v} = (u, v)$, $\mathbf{V} = (U, V)$ – скорость течения; T и Θ – температура; p и P – давление; g – ускорение свободного падения; ν – кинематическая вязкость; χ – температуропроводность. Все размерные параметры сгруппированы в числе Грасгофа Gr и Прандтля Pr . Для холодной воды (около 4°C) $Pr \approx 11,59$.

Безразмерные граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} Y=0, \quad 0 < X < 1: \quad \mathbf{V} = 0, \quad \Theta = 0,5 \\ Y=1, \quad 0 < X < 1: \quad \mathbf{V} = 0, \quad \Theta = -0,5 \\ \left. \begin{aligned} X=0 \\ X=1 \end{aligned} \right\}, \quad 0 < Y < 1: \quad \mathbf{V} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

При получении и исследовании решений использовались четыре типа начальных условий ($Fo = 0$): $\mathbf{V} = 0, \Theta = 0,5$; $\mathbf{V} = 0, \Theta = -0,5$; $\mathbf{V} = 0, \Theta = -0,5 + X$; решение, полученное при других значениях Gr .

Для описания теплопереноса через полость используются характеристики

$$Nu_d = \int_0^1 \left| \frac{\partial \Theta}{\partial Y}(X, 0) \right| dX$$

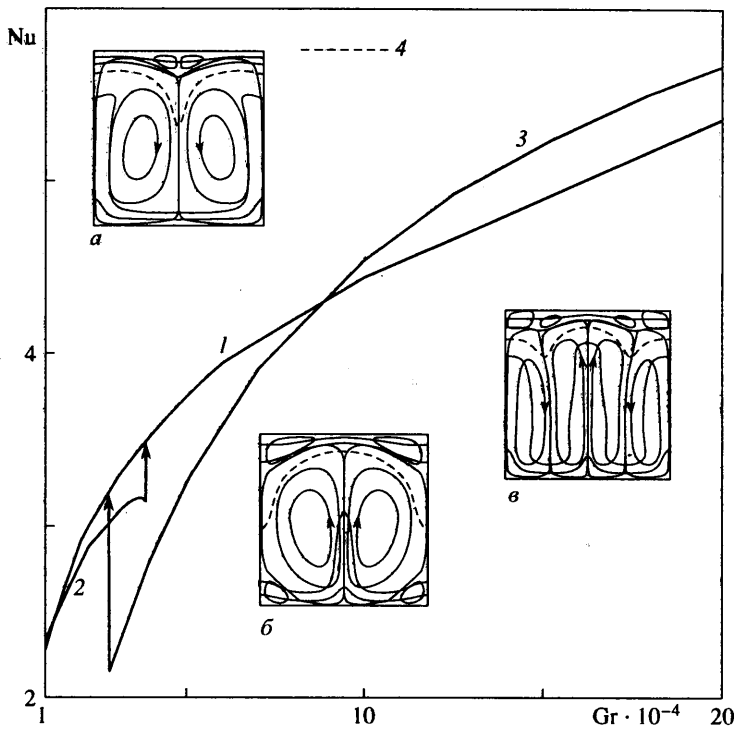
$$Nu_u = \int_0^1 \left| \frac{\partial \Theta}{\partial Y}(X, 1) \right| dX$$

где Nu_u и Nu_d – интегральные тепловые потоки (числа Нуссельта) соответственно на верхней и нижней стенках полости.

Задача (2.1)–(2.2) решалась численно методом контрольного объема с использованием алгоритма SIMPLE [19]. Расчеты проводились на равномерной сетке, содержащей 89×89 ($Gr \leq 2 \cdot 10^5$), 139×139 ($2 \cdot 10^5 \leq Gr \leq 8 \cdot 10^5$) и 199×199 ($Gr \geq 8 \cdot 10^5$) ячеек. Шаг по времени равен $\Delta Fo = 0,025 \cdot \Delta X \cdot \Delta Y$ (где ΔX и ΔY – соответственно горизонтальный и вертикальный размеры контрольного объема).

2. Стационарные решения. При $Gr \leq 2 \cdot 10^5$ три типа стационарных решений (плюс решение с отсутствием конвекции) обнаружены в [13], два из них симметричны относительно вертикальной линии, проходящей через центр ячейки, и одно – несимметричное. Здесь число Грасгофа увеличено до 10^6 , что позволило обнаружить еще одно стационарное решение.

На фиг. 1 представлена зависимость числа Нуссельта через ячейку от числа Грасгофа для трех стационарных решений, которые существуют в выбранном диапазоне числа Gr (представлены также и картины течений). Кривые 1 и 2 соответствуют решениям [13]. Следует отметить, что решение 1 на фиг. 1 существует не толь-



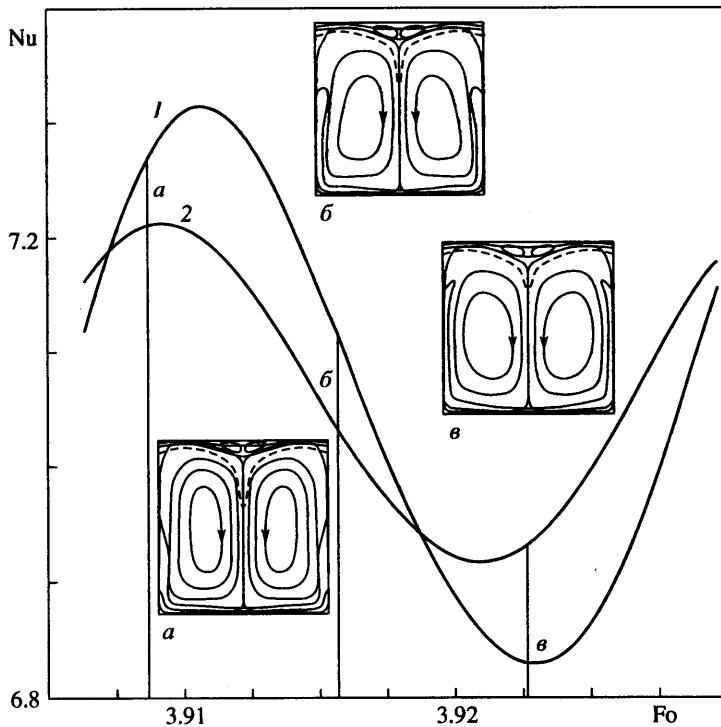
Фиг. 1. Зависимости интегрального числа Нуссельта от числа Gr и картины течений (а-в) (функция тока и изотермы, кривой 4 выделена изотерма $\Theta = 0$): 1-3 – первое, второе и третье стационарные решения

ко до $Gr = 2 \cdot 10^5$, как было получено ранее, но и до $5 \cdot 10^5$. При дальнейшем увеличении Gr оно становится неустойчивым и переходит в автоколебательный режим первого типа, который представлен ниже.

При $2,9 \cdot 10^4 \leq Gr \leq 9,5 \cdot 10^5$ существует третье симметричное стационарное решение (кривая 3 на фиг. 1). Течение состоит из четырех основных и четырех вторичных вихрей; вода движется вверх в центре ячейки и вблизи стенок. Интерес представляет тот факт, что данное решение невозможно получить из предыдущих, изменяя число Gr. Оно было найдено при $Gr = 5 \cdot 10^5$ с начальными условиями $V = 0$, $\Theta = 0,5$, а затем была исследована область существования с помощью постепенного уменьшения и увеличения числа Грасгофа. При $Gr < 2,9 \cdot 10^4$ это решение трансформируется в первое симметричное решение. Следует отметить, что в интервале $2,9 \cdot 10^4 \leq Gr \leq 3,81 \cdot 10^4$, используя различные начальные условия, можно определить три типа различных стационарных и при этом симметричных решения. При $Gr > 9,5 \cdot 10^5$ стационарных решений получить не удалось.

3. Автоколебательные режимы. Как было отмечено, первое симметричное стационарное решение при $Gr > 5 \cdot 10^5$ становится неустойчивым: основные вихри начинают как бы "дышать", интенсивность течения в них периодически то увеличивается, то уменьшается. Данное решение существует при $5,1 \cdot 10^5 \leq Gr \leq 6,7 \cdot 10^5$. Изменение интегральных чисел Нуссельта и картины течения в некоторые моменты времени по периоду колебаний показаны на фиг. 2 (для случая $Gr = 5,5 \cdot 10^5$).

Основываясь на этих данных, можно сделать вывод, что колебания имеют строго периодический, синусоидальный характер, причем амплитуда колебаний Nu_d больше амплитуды Nu_u . Амплитуды колебаний Nu_d и Nu_u составляют соответственно 7 и 4,3%



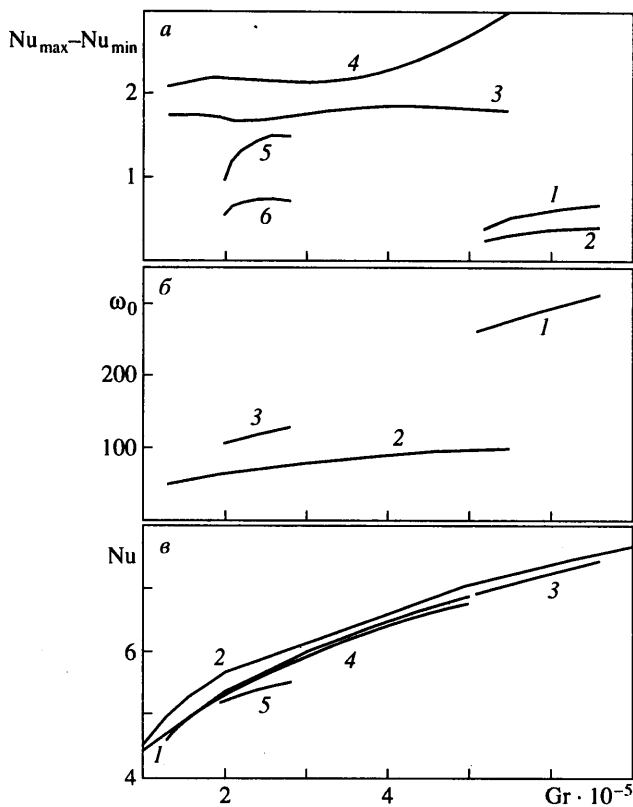
Фиг. 2. Изменение интегрального числа Нуссельта (1, 2 – Nu_d и Nu_u) и картины течения (а–в) по периоду колебаний для первого автоколебательного режима

от осредненного по времени значения. Изменение частоты и амплитуд колебаний в зависимости от числа Грасгофа представлено на фиг. 3, а, б. Как видно из фиг. 3, б, безразмерная частота колебаний ω_0 имеет значения порядка 300. Для реальной ячейки с перепадом температур $T_d - T_u = 8^\circ\text{C}$ и при $H \approx 5$ см (что соответствует $Gr \approx 6,2 \cdot 10^5$, когда и достигается $\omega_0 \approx 300$) этому значению соответствует частота 0,12 Гц.

Первое автоколебательное решение получено в результате развития стационарного решения. Второе и третье автоколебательные режимы найдены с использованием начальных условий $V = 0, \Theta = 0,5$ для второго и $V = 0, \Theta = -0,5 + X$ для третьего.

Изменение интегральных чисел Нуссельта и картины течения в некоторые моменты времени по периоду колебаний для второго автоколебательного решения изображено на фиг. 4: течение состоит из двух основных вихрей и четырех вторичных. Картина колебаний выглядит следующим образом: нижние вторичные вихри постепенно увеличиваются, передавливают части основных вихрей, вытесняя их вверх, а затем опять уменьшаются и возвращаются в нижние углы; так все периодически и повторяется. Данное автоколебательное решение реализуется при $1,3 \cdot 10^5 \leq Gr \leq 5,5 \cdot 10^5$.

Амплитуды колебаний Nu_d и Nu_u составляют соответственно 32,4 и 41,7% (при $Gr = 2 \cdot 10^5$) от осредненного по времени значения $\langle Nu \rangle$, т.е. в отличие от первого решения амплитуда колебаний Nu_d теперь уже меньше амплитуды Nu_u . Кроме того, амплитуды колебаний Nu_d и Nu_u имеют немонотонную зависимость от числа Грасгофа (это видно на фиг. 3, а), что объясняется ростом влияния на теплоперенос колебаний вторичных вихрей. Основная же частота монотонно растет при увеличении Gr (фиг. 3, б).



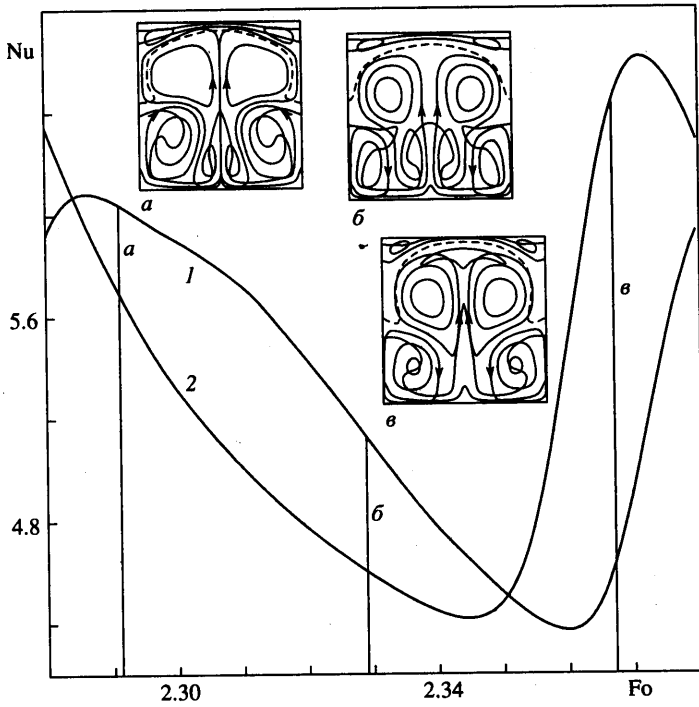
Фиг. 3. Зависимости от числа Gr амплитуды колебаний Nu_d и Nu_u (а) для 1, 2 – первого, 3, 4 – второго, 5, 6 – третьего автоколебательных режимов; основной частоты колебаний (б) для 1–3 – первого, второго и третьего автоколебательных режимов; средних чисел Нуссельта (в) для 1, 2 – первого и третьего стационарных решений, 3–5 – первого, второго и третьего автоколебательных режимов

В отличие от первых двух третье автоколебательное решение несимметрично (фиг. 5). Оно состоит из двух основных и двух вторичных вихрей. Один из основных вихрей немного больше другого. Течение со временем меняется так: основные вихри попеременно сливаются с соответствующим вторичным вихрем, оттесняя друг друга, при этом интенсивность течения в них периодически то увеличивается, то уменьшается. Данное решение существует лишь при $2 \cdot 10^5 \leq Gr \leq 2,9 \cdot 10^5$.

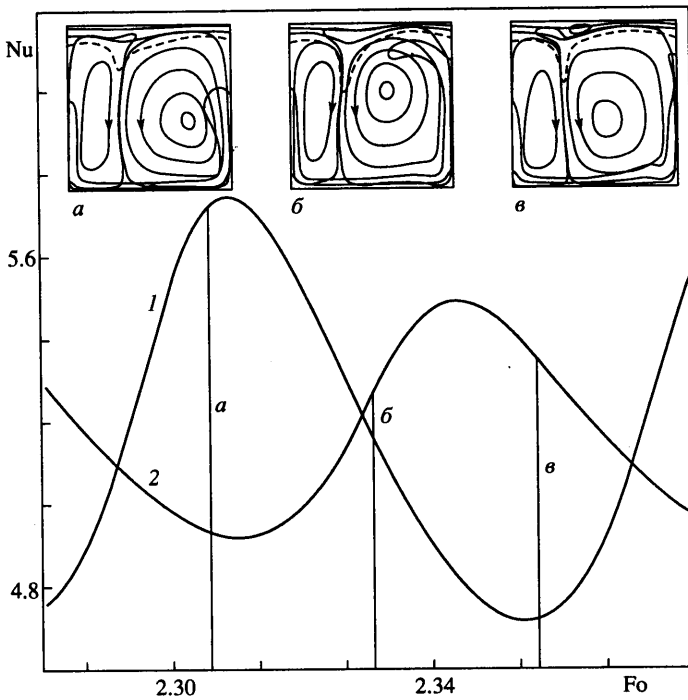
При $Gr = 2 \cdot 10^5$ амплитуды колебаний Nu_d и Nu_u составляют соответственно 18,7 и 10,5% от $\langle Nu \rangle$. Зависимость амплитуд от числа Грасгофа показана на фиг. 3, а. Необходимо отметить, что и в данном решении частота колебаний монотонно возрастает при увеличении числа Gr (фиг. 3, б), причем она гораздо больше частоты колебаний второго решения (при соответствующих числах Грасгофа).

Схематически все результаты могут быть суммированы на фиг. 3, в, где представлены зависимости от числа Gr ($10^5 \leq Gr \leq 7 \cdot 10^5$) средних тепловых потоков через ячейку для стационарных (кривые 1 и 2) и для нестационарных решений (причем для них проводилось еще осреднение по времени).

Заключение. Обнаружены и изучены три автоколебательных и одно стационарное решение задачи о естественной конвекции холодной воды в квадратичной полости. Среди нестационарных течений реализуется одно несимметричное, все остальные течения симметричны относительно центральной вертикальной оси.



Фиг. 4. Изменение интегрального числа Нуссельта ($1, 2 - Nu_d$ и Nu_u) и картины течения ($a-в$) по периоду колебаний для второго автоколебательного режима



Фиг. 5. Изменение интегрального числа Нуссельта ($1, 2 - Nu_d$ и Nu_u) и картины течения ($a-в$) по периоду колебаний для третьего автоколебательного режима

Изучено поведение решений при изменении числа Грасгофа. Представлены картины течений и приведены зависимости от числа Грасгофа средних безразмерных тепловых потоков, проходящих через полость, амплитуд колебаний чисел Нуссельта на верхней и нижней стенках, основной частоты колебаний. Наибольшая частота колебаний достигается при реализации первого автоколебательного решения, наименьшая – второго. Наибольшая амплитуда колебаний – у второго решения, наименьшая – у первого. Наиболее эффективный теплоперенос через ячейку (для $10^5 \leq Gr \leq 7 \cdot 10^5$) осуществляется при третьем симметричном стационарном решении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1990. 225 с.
2. Гудзовский А.В. Автоколебательные режимы свободной конвекции в полости с локальным теплообменом на горизонтальных сторонах // Тр. 2-й Рос. конф. по теплообмену. М.: Изд-во МЭИ, 1998. Т. 3. С. 61–64.
3. Kalabin E.V., Zubkov P.T. Natural convection of cold water in a rectangle // Proc. Symp. Energy Engineering. Hong Kong: Begell House, 2000. V. 1. P. 328–333.
4. Русакова О.Л., Тарунин Е.Л. Бифуркационные режимы свободной конвекции при наличии теплового излучения и наклона плоскости // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 1. С. 42–47.
5. Блохин А.С., Блохина Н.С. Начало конвекции в жидкости вблизи температуры инверсии плотности // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193. № 4. С. 805–807.
6. Блохин А.С., Блохина Н.С., Макаева О.С. Самовозбуждающиеся колебания в жидкости при развитой конвекции // Докл. АН СССР. 1973. Т. 201. № 1. С. 75–78.
7. Геххарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. Кн. 2. М.: Мир, 1991. 528 с.
8. Yakovlev A.V., Zubkov P.T. Natural convection of cold water in cubical cavity // Proc. Int. Conf. Heat Transfer Science and Technology. Beijing: Higher Education Press, 2000. P. 223–228.
9. Любимов Д.В., Путин Г.Ф., Чернатынский В.И. О конвективных движениях в ячейке Хеле–Шоу // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 3. С. 554–556.
10. Путин Г.Ф., Ткачева Е.К. Экспериментальное исследование надкритических конвективных движений в ячейке Хеле–Шоу // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 1. С. 3–8.
11. McDonough M.W., Faghri A. Experimental and numerical analyses of the natural convection of water through its density maximum in a rectangular enclosure // Int. J. Heat Mass Transfer. 1994. V. 37. № 5. P. 783–801.
12. Гореликов А.В., Зубков П.Т., Моргун Д.А. Смешанная конвекция чистой воды в квадратной ячейке с движущейся верхней стенкой // Мат. моделирование. 2000. Т. 12. № 8. С. 69–76.
13. Зубков П.Т., Климин В.Г. Численное исследование естественной конвекции чистой воды вблизи точки инверсии плотности // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 4. С. 171–176.
14. Gorelikov A.V., Klimin V.G., Zubkov P.T. Natural convection of water near to density inversion point // Proc. Int. Conf. Fluid Engineering. Tokyo, 1997. V. 3. P. 1617–1621.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
16. Watson A. The effect of the inversion temperature on the convection of water in an enclosed rectangular cavity // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1972. V. 25. № 4. P. 423–446.
17. Reizes J.A., Leonardi E., de Vahl Davis G. Natural convection near the density extremum of water // Proc. 4th Int. Conf. Numer. Methods in Laminar and Turbulent Flow: Swansea: Pineridge Press, 1985. V. 1. P. 794–804.
18. Gebhart B., Mollendorf J. A new density relation for pure and saline water // Deep Sea Res. 1977. V. 24. № 9. P. 831–848.
19. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.