

УДК 532.517.2: 536.25

© 2001 г. О.Н. АЛИКИНА, Е.Л. ТАРУНИН

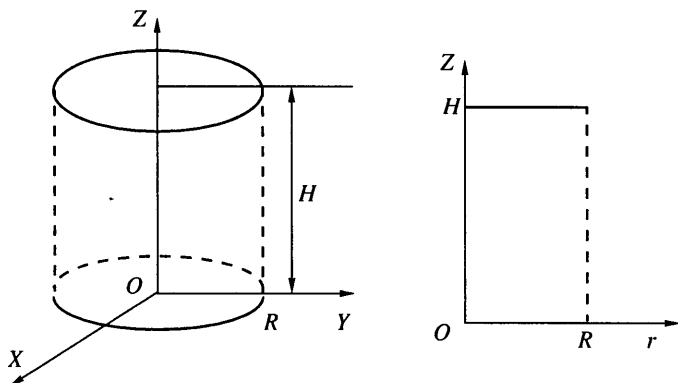
ПОДКРИТИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В СЛУЧАЕ ВЯЗКОСТИ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Методом вычислительных экспериментов изучены конвективные движения жидкости, вязкость которой зависит от температуры. Полученные результаты дают информацию для лабораторных экспериментов, направленных на определение жесткого характера неустойчивости.

При наличии температурной зависимости параметров жидкости возникают подкритические движения, которые часто исследовались с помощью метода разложения по параметрам надкритичности [2]. Прямой счет методом сеток конвективного движения жидкости с температурной зависимостью вязкости был выполнен в работах [2, 3]. В [2] не удалось обнаружить интервал подкритических движений осесимметричного движения в вертикальном цилиндре, подогреваемом снизу при перепаде вязкости меньше двух, хотя аналитика четко его предсказывала. В [3] численно в двумерной постановке было показано наличие интервала подкритичности для полости квадратного сечения при перепаде вязкости, равном 10, и указаны приемы, позволяющие отделить этот эффект от погрешности решения. Расчеты трехмерной конвекции в гексагональной ячейке горизонтального слоя, подогреваемого снизу [4], также отчетливо обнаружили подкритические движения. Однако эти расчеты показали, что трехмерная постановка задачи требует детальной пространственной сетки. В данной работе исследуется ситуация, близкая по постановке задачи к [4]. Предполагается, что основные характеристики конвективного течения (в частности, характеристики подкритичности) мало изменяется при замене ячейки гексагональной структуры на вертикальный "цилиндр" со свободными вертикальными границами. При этом трехмерная задача свелась к двумерной осесимметричной, что позволило применить более детальную сетку и выяснить зависимость эффектов от перепада вязкости. Выбранный радиус "цилиндра" соответствовал конвективной ситуации, при которой первое критическое движение является осесимметричным.

1. Постановка задачи и метод решения. Вязкая жидкость полностью заполняет вертикальный цилиндр (фиг. 1), верхняя и нижняя границы которого поддерживаются при постоянных, но различных температурах (ситуация подогрева снизу), боковые границы теплоизолированы. Вязкость жидкости предполагается зависящей от температуры по линейному закону. Граничные условия допускают равновесное решение ($V^{(0)} = 0$) с линейным по z распределением температуры.

Геометрическим параметром задачи является отношение радиуса к высоте R/H . При использованном значении $R/H = 1$ наиболее опасным является осесимметричное конвективное течение [1]. Поэтому задача о конвективном течении, возникающем после потери устойчивости равновесия, является двумерной в цилиндрических координатах.



Фиг. 1. Геометрия задачи (а) и расчетная область (б)

Движение вязкой жидкости описывается уравнениями свободной конвекции в приближении Буссинеска [1]

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{V} + 2(\nabla \eta \nabla) \mathbf{V} + (\nabla \eta \times \text{rot } \mathbf{V}) + \rho(T)g$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0, \quad \rho C \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) T \right] = \chi \Delta T \quad (1.1)$$

$$\eta = \eta_0(1 - \gamma T)$$

В системе (1.1) \mathbf{V} – вектор скорости, p – превышение давления над гидростатическим, T – температура, ρ – плотность, C – удельная теплоемкость, g – ускорение свободного падения, η – динамическая вязкость.

На горизонтальных поверхностях ($z = 0$, $z = H$) используются условия прилипания, а боковая граница ($r = R$) считается свободной (1.2). Отсутствие касательных напряжений на боковой поверхности области приближает постановку этой задачи к задаче Бенара для слоя, в котором возникают гексагональные структуры. О близости этих задач говорит и небольшое отличие критического числа Рэлея Ra рассматриваемой области при постоянной области от критического числа Рэлея для бесконечного слоя. Это отличие менее 6%.

$$V = 0, (z = 0, H); \quad V_r = 0, \quad \frac{\partial V_z}{\partial r} = 0 \quad (r = R) \quad (1.2)$$

Температуры на горизонтальных поверхностях – фиксированы, а боковые поверхности предполагаются теплоизолированными

$$T = T_1 (z = 0); \quad T = T_2 (z = H), \quad T_2 < T_1 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (r = R)$$

Параметр η_0 отвечает средней температуре, равной $(T_2 + T_1)/2$. Коэффициент $\gamma > 0$ для "нормальной" жидкости.

Приведем к безразмерным переменным, выбрав за единицу длины R – радиус цилиндра и R^2/η – характерное время, η/R – скорость, $\Theta = T_1 - T_2$ – температура.

Задача содержит четыре безразмерных параметра – отношение R/H , число Грас-

гофа $G = g\beta\Theta L^3/\eta^2$, число Прандтля $Pr = \eta/\chi$ и параметр $\alpha = \gamma\Theta$, определяющий перепад вязкости через температурный коэффициент γ

$$\sigma = \frac{\eta(T_2)}{\eta(T_1)} = \frac{2 + \alpha}{2 - \alpha} \quad (1.4)$$

Система уравнений в переменных вихрь – функция тока и граничные условия имеют вид

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad V_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1.5)$$

$$\varphi = \frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \varphi \right) = (1 + \alpha T) \left(\Delta \varphi - \frac{\varphi}{r^2} \right) - G \frac{\partial T}{\partial r} + \quad (1.7)$$

$$+ 2\alpha \left\{ \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{2r} \right) + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial r} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\} + \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \varphi \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{Pr} \Delta T$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + r\varphi = 0$$

$$T = -\frac{1}{2} \quad (z = 0), \quad T = \frac{1}{2} \quad (z = H), \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (r = R) \quad (1.8)$$

$$\psi|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0, H), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (r = 0, R) \quad (1.9)$$

Для вихря скорости на твердых границах используются формула Тома и модифицированная формула, включающая формулы Тома и Пирсона [5] с весом 0,5. На свободной границе $r = R$ и на фиктивной $r = 0$ вихрь скорости обращается в нуль.

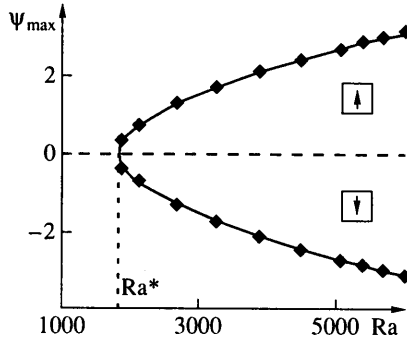
Уравнения (1.7) решаются по явной двухслойной схеме на равномерной квадратной сетке с шагом h .

Разностная аппроксимация на стационаре имеет второй порядок по h (производные внутри области аппроксимируются центральными разностями).

Стационарное решение задачи находилось методом установления. Критериями установления служило неравенство

$$|Nu^{k+1} - Nu^k| + |E^{k+1} - E^k| + |\psi_{\max}^{k+1} - \psi_{\max}^k| < \epsilon ps$$

в которое входят кинетическая энергия E и тепловой поток через границу области Nu , а также экстремальное значение функции тока ψ_{\max} . Индекс k определяет номер шага по времени. Значение ϵps варьировалось в интервале 10^{-5} – 10^{-6} . Необходимо отметить, что при приближении к критическому значению числа Рэлея время установления процесса резко возрастает и иногда достигает 13 единиц безразмерного времени. Вдали от порога для достижения стационарного решения вполне достаточно 0,5 единиц безразмерного времени.



Фиг. 2. Зависимость экстремума функции тока Ψ_{\max} от числа Рэлея Ra в случае постоянной вязкости ($Pr = 1$, сетка 28×28 , $\alpha = 0$)

2. Результаты. Амплитуда установившегося движения (экстремальное значение функции тока) в зависимости от числа Рэлея приведена на фиг. 2 для случая постоянной вязкости. В этом случае существуют только надкритические движения. Критическое значение, при котором равновесие теряет устойчивость относительно малых возмущений, получается экстраполированием амплитуды на нуль. Как видно, ветви амплитудной кривой симметричны относительно горизонтальной оси. Этот результат отмечен в работе [6]. Вид соответствующего конвективного течения показан схематично на квадратиках, стрелки внутри которых указывают направление движения жидкости на оси цилиндра. С точностью до 4% для экстремума функции тока справедлив корневой закон Ландау

$$\Psi_{\max} = 0,0023\sqrt{Ra - Ra_*}, \quad \frac{Ra}{Ra_*} < 3,5 \quad (2.1)$$

Значение Ra_* для случая постоянной вязкости составило 1815 ± 5 .

Для кинетической энергии и теплового потока через границу области (числа Нуссельта)

$$E = \frac{1}{2} \iint V^2 dv = \pi \int_0^1 \int_0^R r V^2 dr dz, \quad Nu = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \left| \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right| dr \quad (2.2)$$

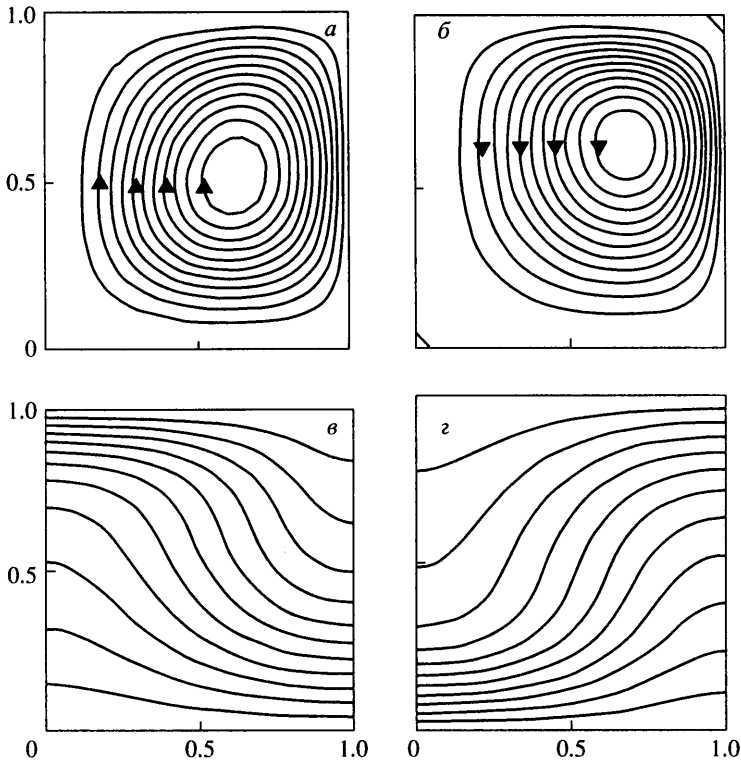
в этом же интервале чисел Рэлея справедливы зависимости

$$E \cong 0,0132(Ra - Ra_*), \quad Nu \cong 0,00052(Ra - Ra_*) \quad (2.3)$$

Перейдем к обсуждению стационарных решений с переменной вязкостью. Типичные картины установившегося движения жидкости изображены на фиг. 3 для числа Рэлея $Ra = 2500$ и перепада вязкости σ , равного 10 ($\alpha = 1,636$).

На первой паре рисунков представлены течения с нисходящим потоком вдоль оси симметрии. Максимальное значение функции тока $-1,62$ достигается в точке с координатами $(0,75; 0,7)$. Вторая пара рисунков – это картины течения с нисходящим потоком вдоль оси цилиндра. В этом случае экстремум функции тока достигается в точке $(0,65; 0,55)$ и равен 1,48.

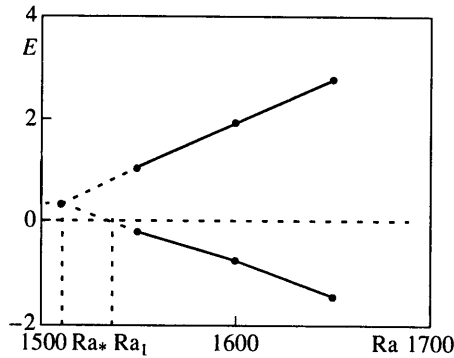
Амплитуды этих течений различны, что приводит к увеличению числа Нуссельта Nu на ~53%, кинетической энергии на ~54%, а максимума функции тока на ~31%. Этот факт соответствует результатам многих авторов [1], утверждающих, что при вязкости, убывающей с ростом температуры, в горизонтальном слое предпочтительны гексагональные ячейки с восходящим течением в центре.



Фиг. 3. Картины установившегося движения жидкости при $Pr = 1$, $Ra = 1600$, сетка 28×28 , $\alpha = 1,636$ ($\sigma = 10$): изолинии функции тока для восходящего (а) и нисходящего (в) течений в центральной части; изотермы для восходящего (б) и нисходящего (г) течений в центральной части. Стрелками показано направление движения жидкости на оси цилиндра

Зависимости кинетической энергии от числа Рэлея вблизи порога представлены на фиг. 4 для обеих устойчивых ветвей решений (зависимость для теплового потока имеет аналогичный вид). Для более четкого графического представления течению с нисходящей струей по центру приписаны отрицательные значения кинетической энергии. Выбранное значение $\alpha = 1,636$ соответствует десятикратному перепаду вязкости σ . Зависимости близки к линейным. Относительная разность амплитуд на двух ветвях решений увеличивается при уменьшении числа Рэлея. Так, при $R = 1650, 1600, 1550$ относительные различия составляют 46, 59 и 79% соответственно (сетка 28×28). Значение Ra_1 определяет точку, где равновесие становится неустойчивым относительно малых возмущений. При $Ra > Ra_1$ происходит "мягкое" возбуждение отрицательной ветви. В интервале чисел Рэлея $Ra_* > Ra > Ra_1$ происходит "жесткая" потеря устойчивости равновесия. Интервал подкритических движений определяется разностью $\Delta Ra = (Ra_1 - Ra_*)$.

Другой интегральной характеристикой подкритических движений является величина E_* , которая определяет минимальную амплитуду течения в подкритической области (для обсуждаемых значений параметров $E_* \cong 0,45$). Аналогичные характеристики ветвления для экстремума функции тока и добавки к числу Нуссельта $(Nu - 1)$ составляют 0,023 и 0,018 соответственно. Параметры ветвления $\Delta Ra, Ra_1$, определенные по значениям квадрата экстремума функции тока, тепловому потоку и кинетической энергии таковы: $Ra_1 = 1528 \pm 4, \Delta Ra = 22 \pm 2$.



Фиг. 4. Зависимость кинетической энергии E от числа Рэлея Ra при $Pr = 1$, сетка 28×28 , $\alpha = 1,636$ ($\sigma = 10$)

Из приведенных результатов видно, что величина подкритичности ΔRa довольно мала, а погрешность ее определения по трем интегральным характеристикам на сетке 28×28 значительна и составляет около 10%.

Для выяснения зависимости погрешности решения от параметров метода были выполнены вычислительные эксперименты с различными сетками. Расчеты при значении числа Рэлея вблизи порога $Ra = 1550$ ($\alpha = 1,636$) показали, что при $h < 1/20$ зависимости интегральных характеристик аппроксимируются функцией вида $f = A(1 + Ch^2)$, где A и C – константы. Значения этих констант для кинетической энергии, теплового потока и экстремума функции тока приведены ниже:

$$E = 0,941(1 + 77h^2), \quad (Nu-1) = 0,0375(1 + 133h^2), \quad \psi_{\max}^2 = 0,107(1 + 94h^2)$$

Используя эти данные, можно выяснить, что для определения использованных интегральных характеристик с точностью менее 5% требуется использовать сетку с числом узлов более 45. Если учесть при этом, что время счета при приближении к пороговому значению резко возрастает, счет на таких сетках оказывается весьма трудоемким.

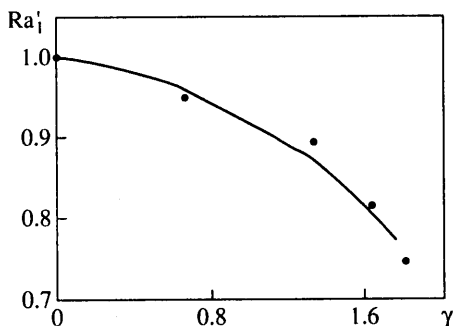
Вычислительные эксперименты показали, что основная погрешность вычисления вблизи порога обусловлена аппроксимацией условий вязкого прилипания. Хорошими аппроксимационными свойствами обладает формула [5]

$$\Phi_0 = \frac{12\psi_1 - \psi_2}{4h^2 r} \quad (2.4)$$

которая получена комбинацией двух известных формул – Тома и Пирсона с весом 0,5. Расчеты с использованием формулы (2.4) показали, что зависимость $E(Ra)$ вблизи порога также близка к линейной. Сравнительные эксперименты для формулы Тома и формулы (2.4) показали, что более точные критические значения дает формула (2.4). При этом значения коэффициентов C , приведенные выше, пропорциональные относительной погрешности, уменьшаются более чем в 2 раза.

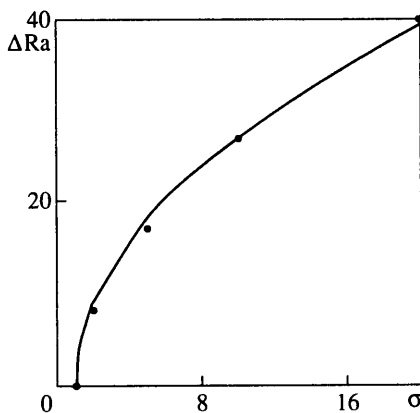
Было выяснено влияние возможного поворота амплитудной кривой при переменной вязкости на точность аналитической обработки экспериментальных данных от чисел Рэлея Ra . Этот анализ был подсказан работой [3], в которой показано, что при учете поворота амплитудной кривой удастся в преобразованных координатах ψ' , Ra' вновь аппроксимировать экспериментальные данные в виде корневого закона для экстремума функции тока вида $\psi' = k\sqrt{Ra'}$. Обработка результатов расчета показала, что сумма квадратов невязок по шести точкам уменьшается в 24 раза при учете поворота амплитудной кривой. Также выяснилось, что при увеличении перепада вязкости поворот амплитудной кривой увеличивается.

Для выяснения зависимости величины подкритического интервала от перепада вязкости определялась зависимость критического числа Рэлея Ra_1 от температурного



Фиг. 5

Фиг. 5. Зависимость критического числа Рэлея $Ra'_1 = Ra_1(\gamma)/Ra_1(0)$ от температурного коэффициента γ . Точками отмечены результаты вычислений, а сплошная линия соответствует аналитической зависимости (2.5)



Фиг. 6

Фиг. 6. Зависимость величины подкритического интервала ΔRa от перепада вязкости σ . Точками отмечены результаты вычислений, а сплошная линия соответствует аналитической зависимости (2.6)

коэффициента γ , введенного по формуле (1.1) (фиг. 5). Сплошная линия на фигуре отвечает найденной аппроксимационной зависимости, подсказанной работой [1]

$$Ra_1(\gamma) = 1815(1 - \gamma^2) \quad (2.5)$$

На фиг. 6 приведена зависимость величины подкритического интервала ΔRa от перепада вязкости σ

$$\Delta Ra = 9\sqrt{\sigma - 1}, \quad 0 \leq \sigma \leq 20 \quad (2.6)$$

Интегральные характеристики ветвления при $Pr = 1$, сетка 28×28 в зависимости от σ приведены ниже:

σ	5	10	15
$(\Psi_{\max})_*$	0,209	0,231	0,254
E_*	0,323	0,45	0,535
$(Nu - 1)_*$	0,0151	0,0176	0,0216

Вычислительные эксперименты выполнялись и при значительно большем перепаде вязкости $\sigma \geq 50$. При этом выяснилось, что резко возрастает погрешность вычисления. Поэтому эти результаты здесь не обсуждаются.

Закключение. В результате вычислительных экспериментов установлено, что наиболее ярко эффект подкритичности проявляется по скорости и кинетической энергии; изменение теплового потока по сравнению с равновесным значением менее 2%.

Расчеты показали, что определение характеристик подкритичности с погрешностью менее 5% требует пространственной сетки 40×40 . Указаны приемы, позволяющие сократить затраты машинного времени путем использования идеи продолжения счета по параметру, последовательности сетки [5] и обработки результатов.

Осуществлен перебор перепада вязкости σ в интервале от 1 до 20 и найдены зависимости основных характеристик подкритического движения от этого параметра. Выяснено, что расчеты при перепаде вязкости, большем 20, требуют более детального разрешения возникающих пограничных слоев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Liang S.F., Vidal, A., Acrivos A. Buoyancy-driven convection in a cylindrical geometries // J. Fluid Mech. 1969. V. 36. Pt 2. P. 239–256.
3. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Тарунин Е.Л. Конвекция подогреваемой снизу жидкости в замкнутой полости при наличии температурной зависимости вязкости // Теплофизика высоких температур. 1973. Т. 11. № 3. С. 579–587.
4. Мызникова Б.И., Тарунин Е.Л. Трехмерные режимы естественной конвекции в горизонтальном слое при наличии температурной зависимости вязкой жидкости // Тр. VI Нац. конгр. Болгарии по теорет. и прикл. механике, Варна, 1989. София: Изд-во БАН, 1990. Т. 3. С. 201–204.
5. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990, 228 с.
6. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Тарунин Е.Л. Численное исследование конвекции жидкости, подогреваемой снизу // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 6. С. 93–99.

Пермь

Поступила в редакцию
11.VII.2000