МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 2001

УДК 533.722

 В.Ю. АЛЕКСАНДРОВ

ОБ УСЛОВИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО СКОЛЬЖЕНИЯ ГАЗА ПРИ НАЛИЧИИ СКАЧКА ТЕМПЕРАТУРЫ ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

Получено обобщение известного кинетического условия температурного скольжения газа вдоль неравномерно нагретой поверхности на случай, когда имеется малая (порядка длины свободного пробега молекул) область больших продольных градиентов температуры и пристеночный кнудсеновский слой существенно двумерный. Для получения обобщенного условия температурного скольжения используется теорема Грина для линеаризованного уравнения Больцмана.

Для исследования течения слаборазреженного газа используются уравнения Навье – Стокса с условиями скольжения газа у поверхности, в частности скольжения, обусловленного продольным градиентом температуры газа вдоль поверхности [1]

$$u_T = \beta \frac{\partial T}{\partial s} = \sigma a_* \frac{l_* \partial T}{T_w \partial s} \tag{0.1}$$

где s – координата вдоль поверхности тела, T_w – температура поверхности, u_T – скорость газа у поверхности, β – размерный коэффициент скольжения, σ – безразмерный коэффициент. Для течений слаборазреженного газа с характерным размером L_*, скоростью звука a_*, длиной пробега молекул l_* имеет место $l_* / L_* = \mathrm{Kn} \leqslant 1$ и $u_T \sim a_* \mathrm{Kn}$. С погрешностью $O(\mathrm{Kn}^2)$ температура в условии скольжения может быть заменена на температуру поверхности T_w.

Граничное условие (0.1) получено методом сращиваемых асимптотических разложений. Внешнее разложение соответствует гидродинамическому течению, а главный член внутреннего разложения – течению в одномерном кнудсеновском слое [1–3]. Значения безразмерного коэффициента σ были вычислены сначала при диффузном граничном условии для функции распределения в кнудсеновском слое и предположении о справедливости линеаризованного модельного уравнения БГК [1–3], а затем и для одномерного кнудсеновского слоя, описываемого линеаризованным уравнением Больцмана для молекул, взаимодействующих по закону твердых сфер [4]. Граничное условие (0.1) эффективно используется для решения уравнений сплошной среды в физической газовой динамике больших скоростей и в газодинамике медленных неизотермических течений, которая применима также к описанию локальных зон сверхзвуковых течений с локальным числом Re ~ 1 [5].

Однако не всегда изменение температуры вдоль поверхности происходит на значительных расстояниях, сравнимых с характерным гидродинамическим размером. Примером области с резким изменением температуры поверхности может служить участок стыка теплозащитных поверхностей с различными коэффициентами оптической черноты или коэффициентами каталитичности. В окрестности такого стыка имеет место скачкообразное изменение температуры, которое приводит вследствие температурного скольжения к разгону и торможению потока и, следовательно, к значительному локальному изменению давления (в нелинейном приближении).

Изучение полной нелинейной задачи температурного скольжения при большом перепаде температуры осложнено тем, что течение газа в таком слое существенно двумерное. Первым шагом в исследовании проблемы является изучение граничного условия температурного скольжения при малом скачкообразном изменении температуры поверхности. При этом предполагается, что отношение скачка температуры вдоль поверхности к характерной величине температуры поверхности $\Delta T_w T_w^{-1}$ мало, но не связано с величиной числа Kn. Малость величины $\Delta T_w T_w^{-1}$ позволяет линеаризировать уравнение Больцмана. При этом двумерность течения в кнудсеновском слое сохраняется.

Учитывая, что скорость температурного скольжения отлична от нуля только в малой области длиной порядка длины свободного пробега молекул, можно ожидать преобразования граничного условия (0.1) в следующее:

$$u_T = \beta \Delta T_w \delta(x) \tag{0.2}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Такой тип граничных условий следует из аналогии с задачей о термомолекулярной разности давлений для медленных течений газа в капилляре, обусловленной продольной неоднородностью температуры, рассмотренной в [6]. В этой работе для течения разреженного газа в капилляре при произвольной степени разреженности газа (произвольном числе Kn) и малом относительно температуры поверхности перепаде температуры на торцах капилляра показано с использованием теоремы Грина для линеаризированного уравнения Больцмана, что разность давления на торцах капилляра не зависит от характера изменения температуры поверхности и определяется лишь общим перепадом температуры на торцах ΔT_w.

Аналогично в задаче о температурном скольжении условие (0.2) означает, что для скорости скольжения газа, отличной от нуля лишь в малой (порядка длины свободного пробега) окрестности области резкого изменения температуры поверхности, интеграл от скорости скольжения вдоль поверхности $\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_T ds$ также зависит лишь от разности температуры поверхности до и после участка скачкообразного ее изменения.

1. Постановка задачи. Рассматривается возможность обобщения условия (0.1) для течения вдоль поверхности с кривизной $R_* \geqslant L_* \geqslant l_*$, температура которой в одном из направлений изменяется по закону

$$T_w = T_{w_1} + \Delta T_w F(x), \quad \frac{\partial T_w}{\partial z} = 0, \quad \Delta T_w T_w^{-1} \ll 1$$

Здесь x, z – координаты вдоль поверхности тела. Поверхность является локально-плоской в силу $R_* \gg l_*$ при изменении x в пределах $x_1 < x < x_2$, $F(x_1) = 0$, $F(x_2) = 1$, $x_2 - x_1 \geqslant l_*$, т.е. dF/dx отлична от нуля в малой окрестности выбранного на поверхности тела начала координат.

Условие малости $\Delta T_w T_w^{-1}$ позволяет использовать линеаризированное уравнение Больцмана. При этом в гидродинамической области течения возмущение температуры относительно T_w вблизи поверхности (на внешней границе кнудсеновского слоя) описывается линейным уравнением теплопроводности. (Конвективные члены в уравнении переноса энергии имеют второй порядок по величине $\Delta T_w T_w^{-1}$.) По аналогичным причинам течение газа около поверхности, индуцированное перепадом температуры, в первом по $\Delta T_w T_w^{-1}$ приближении описывается уравнением Стокса при отсутствии внешнего потока и внешнего градиента давления.

Для формулировки условия скольжения необходимо рассмотреть задачу о кнудсеновском (пристеночном) слое для функции распределения молекул по скоростям $\varphi(x, y, \xi)$, соответствующей возмущенному относительно равновесного с температурой T_{w_1} состояния газа, определяемой следующим образом:

$$f = f_0(\xi)(1+\varphi(x, y, \xi)) + O((\Delta T)^2)$$

$$f_0(\xi) = n_*(2\pi R T_{w_1})^{-3/2} \exp(-\xi^2 / 2RT_{w_1})$$

где n_* – плотность газа у поверхности. Функция распределения $\varphi(x, y, \xi)$ удовлетворяет линеаризованному относительно f_0 уравнению Больцмана

$$\xi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \Lambda\varphi, \quad i = 1, 2, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y \tag{1.1}$$

где $\Lambda\varphi$ – линеаризованный интеграл столкновений [2].

Во внешней области течения (вне кнудсеновского слоя, $\Delta y \sim l_*$, y – координата, нормальная к поверхности) $\varphi(x, y, \xi)$ изменяется на масштабах $\Delta x \sim \Delta y \sim L_0$, $L_0 \leqslant L_*$, где L_* – масштаб, допускающий линеаризацию по $\Delta T_w T_{w_1}^{-1}$. Обезразмеривание с учетом $x \sim L_0$, $y \sim L_0$, $\xi \sim a_* \sim \sqrt{T_{w_1}}$, $\varphi \sim a_*^{-3} n_*$ приводит к уравнению для внешней относительно кнудсеновского слоя области

$$\varepsilon \xi_i \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_i} = \Lambda \varphi_e, \quad \varepsilon = \frac{l_*}{L_0} \tag{1.2}$$

Здесь и далее черта у безразмерных величин опускается.

Решение уравнения (1.2) для функции распределения вне кнудсеновского слоя φ_e, как известно, может быть найдено в виде ряда Чепмена – Энскога [2]

$$\varphi_e = \sum_\alpha \varepsilon^\alpha \varphi_e^{(\alpha)}$$

$$\varphi_e^{(0)} + \varepsilon\varphi_e^{(1)} = n + T\left(\xi^2 - \frac{3}{2}\right) + u_i \xi_i + \varepsilon B(\xi)\xi_i\xi_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \varepsilon A(\xi)\xi_i \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

$$n = \int f_0(\xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad n + T = \frac{2}{3}\int \xi^2 f_0(\xi)\varphi(\xi)d\xi \tag{1.3}$$

$$u_i = \int \xi_i f_0(\xi)\varphi d\xi$$

Здесь n, T, u_i, f_0, φ – макропараметры и функции распределения, обезразмеренные указанным выше образом; $A(\xi)$, $B(\xi)$ – функции, зависящие от модели взаимодействия в интеграле столкновений и определяемые из решения интегрального уравнения для φ_e в методе Чепмена – Энскога. Внутри кнудсеновского слоя ($\Delta y \sim \varepsilon$) разложение (1.3) не справедливо из-за близости взаимодействующей с молекулами твердой поверхности и изменения ее температуры в окрестности $x = 0$ на расстоянии $\Delta x \sim \varepsilon$.

Для функции распределения в пристеночной области имеет место линеаризированное уравнение Больцмана, дополненное условием взаимодействия газа с поверхностью

$$\xi_x \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial y} = \Lambda \varphi_{in}, \quad X = \frac{x}{\varepsilon}, \quad Y = \frac{y}{\varepsilon} \tag{1.4}$$

$$H_+(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n})\varphi_{in} = -H_+(\boldsymbol{\xi})\Big\{\int H_-(\boldsymbol{\xi}')R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi}, T_{w_1})f_0(\boldsymbol{\xi}')\varphi_{in}(\boldsymbol{\xi}')(\boldsymbol{\xi}'\mathbf{n})d\boldsymbol{\xi}' - \tag{1.5}$$

$$-\tau(x)\left[\left(\xi^2 - \frac{3}{2}\right)(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n}) + \int H_-(\boldsymbol{\xi}')R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi}, T_{w_1})\left(\xi'^2 - \frac{3}{2}\right)f_0(\boldsymbol{\xi}')d\boldsymbol{\xi}'(\boldsymbol{\xi}'\mathbf{n})\right]\Big\}$$

$$H_+(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{\xi}\mathbf{n} > 0 \\ 0, & \boldsymbol{\xi}\mathbf{n} < 0 \end{cases}, \quad H_-(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{\xi}\mathbf{n} > 0 \\ 1, & \boldsymbol{\xi}\mathbf{n} < 0 \end{cases}$$

$$T_{w_1} = 1, \quad \Delta T_w = \Delta T, \quad \tau(x) = T(x) - 1$$

где $R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi})$ – ядро рассеяния, линеаризированное относительно T_{w_1}, n – внутренняя нормаль к поверхности. Предполагается далее, что ядро $R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi})$ изотропно и удовлетворяет соотношению взаимности [3]

$$H_+(\boldsymbol{\xi})H_-(\boldsymbol{\xi}')(\boldsymbol{\xi}'\mathbf{n})R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi})f_0(\boldsymbol{\xi}') + H_+(\boldsymbol{\xi})H_-(\boldsymbol{\xi}')(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n})R(-\boldsymbol{\xi} \to \boldsymbol{\xi}')f_0(\boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{1.6}$$

В частности, этому условию удовлетворяет диффузный закон отражения молекул

$$H_+(\boldsymbol{\xi})\varphi_{in}f_0(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n}) = H_+(\boldsymbol{\xi})\left[\int H_-(\boldsymbol{\xi}')f_0\varphi_{in}(\boldsymbol{\xi}')d\boldsymbol{\xi}' - \tau(x)\left(\xi^2 - \frac{3}{2}\right)(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n})\right] \tag{1.7}$$

Краевая задача (1.4)–(1.5) должна быть дополнена граничными условиями при $X, Y \to \pm\infty$. Предполагая φ_{in} в виде ряда $\varphi_{in} = \sum\limits_{\alpha} \varepsilon^{\alpha}\varphi_{in}^{(\alpha)}$, определим эти условия сращиванием разложения для φ_{in} с внешним разложением φ_e при $Y \to \infty$. Для $\varphi_{in}^{(0)}$ имеем

$$\varphi_{in}^{(0)}(Y \to \infty) = \varphi_e^{(0,0)} \quad (y \to 0)$$

где $\varphi_e^{(0,0)}$ – гильбертовское переразложение нулевого члена ряда Чепмена – Энскога

$$\varphi_e^{(0,0)} = n^{(0)} + T^{(0)}\left(\xi^2 - \frac{3}{2}\right) + u_i^{(0)}\xi_i$$

Исходя из граничных условий для функции $\varphi_i^{(0)}(Y \to \infty)$, будем искать эту функцию в виде

$$\varphi_{in}^{(0)} = n_{in}^{(0)} + T_{in}^{(0)}\left(\xi^2 - \frac{3}{2}\right) + u_{i_{(in)}}^{(0)}\xi_i + \varphi^*$$

причем, так как $u_w = 0$ (поскольку рассматриваемая поверхность неподвижна и, кроме того, отсутствуют испарение и сублимация), положим $u_{in}^{(0)} = 0$. Определив $n_{in}^{(0)}$, $T_{in}^{(0)}$ как

$$n_{in}^{(0)} = n_w^{(0)}(x), \quad T_{in}^{(0)} = \tau(x)$$

где $n_w^{(0)}(x)$ – плотность отраженных молекул в нулевом приближении, имеем

$$\partial\varphi^* / \partial X \sim O(1), \quad \partial\varphi^* / \partial Y \sim O(1) \quad \text{и} \quad \varphi^*(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n} > 0,\ Y = 0) = 0.$$

Интегрируя уравнение (1.4) поперек кнудсеновского слоя и используя введенное выше представление для $\varphi_{in}^{(0)}$, получим оценку для функции распределения

$$\varphi_{in}^{(0)}(Y\to\infty)\sim Y\frac{1}{\xi_Y}\left[\Lambda\varphi-\xi_X\frac{\partial}{\partial x}\left(n_w^{(0)}+\tau(x)\left(\xi^2-\frac{3}{2}\right)\right)\right]-\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}\Bigg]+n_w^{(0)}+\tau(x)\left(\xi^2-\frac{3}{2}\right)$$

$$\varphi_e^{(0,0)}(y\to 0)\sim n_w^{(0)}+\tau(x)\left(\xi^2-\frac{3}{2}\right)+O(\varepsilon) \tag{1.8}$$

Макропараметры $p_e^{(0)}=n_e^{(0)}+T_e^{(0)}$, $T_e^{(0)}$, $p_e^{(1)}$ из условия разрешимости уравнений Гильберта удовлетворяют следующим уравнениям [2]:

$$\begin{gathered}\nabla p_e^{(0)}=0,\quad \nabla^2 T_e^{(0)}=0\\ T_e^{(0)}(y=0)=\tau(x)\\ \nabla p_e^{(1)}=0\end{gathered} \tag{1.9}$$

где $\tau(x)=\Delta TF(x)$ и $F(x)$ близка к функции Хевисайда. Из оценок (1.8) следует, что скорость, индуцированная неоднородностью температуры поверхности, отсутствует и для ее определения необходимо рассмотрение следующего приближения для φ. Функция $\varphi_{in}^{(1)}$ удовлетворяет линеаризированному уравнению Больцмана с однородными граничными условиями

$$\xi_x\frac{\partial\varphi_{in}^{(1)}}{\partial x}+\xi_Y\frac{\partial\varphi_{in}^{(1)}}{\partial Y}=\Lambda\varphi_{in} \tag{1.10}$$

$$H_+(\boldsymbol{\xi})\varphi_{in}^{(1)}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n})=H_+(\boldsymbol{\xi})\int H_-(\boldsymbol{\xi}')R(\boldsymbol{\xi}'\to\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi}'\mathbf{n})f_0(\boldsymbol{\xi}')\varphi_{in}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}')d\boldsymbol{\xi}' \tag{1.11}$$

Из условия сращивания с внешним решением φ_e следует

$$\varphi_{in}^{(1)}(Y\to\infty)=\varphi_e^{(0,1)}(y\to 0)+\varphi_e^{(1,0)}(y\to 0)$$

что с учетом переразложения ряда Чепмена – Энскога в развернутом виде дает

$$\varphi_{in}^{(1)}(Y\to\infty)=p_e^{(1)}(\varepsilon Y)+T_e^{(1)}(\varepsilon Y)\left(\xi^2-\frac{5}{2}\right)+u_{i_e}^{(1)}\xi_i(\varepsilon Y) \tag{1.12}$$

при $\varepsilon\to 0$.

2. Теорема Грина для двумерного кнудсеновского слоя. Имея в виду получение соотношения, определяющего скорость $u_{i_e}^{(1)}(0)$, обусловленную неоднородностью температуры поверхности, перейдя к координатам X, Y, рассмотрим прямоугольный контур S, охватывающий начало координат таким образом, что $-\omega<X<\omega$, $0<Y<\delta$, и воспользуемся теоремой Грина для линеаризированного уравнения Больцмана, причем в качестве функции φ_{in} будем рассматривать двучленное разложение $\varphi=\varphi_{in}^{(0)}+\varepsilon\varphi_{in}^{(1)}$.

Для произвольной функции $g(x,y,\boldsymbol{\xi})$ с учетом свойства самосопряженности оператора столкновения [2] имеет место

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\int_E\left(\xi_x\frac{\partial\varphi_{in}}{\partial X}+\xi_y\frac{\partial\varphi_{in}}{\partial Y}-\Lambda\varphi_{in}\right)gf_0d\boldsymbol{\xi}d\Omega=\\ &=-\int\int_{\Omega E}\left(\xi_x\frac{\partial g}{\partial X}+\xi_y\frac{\partial g}{\partial Y}+\Lambda g\right)\varphi f_0d\boldsymbol{\xi}d\Omega+\int\int_{SE}(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n})\varphi_{in}gf_0d\boldsymbol{\xi}dS\end{aligned} \tag{2.1}$$

где интегрирование по Ω означает интегрирование по пространству, ограниченному контуром S, интегрирование по E – интегрирование в пространстве скоростей.

Далее, в качестве сопряженной функции $g(x, y, \boldsymbol{\xi})$ выбираем функцию, которая удовлетворяет уравнению

$$\Lambda g = -\xi_x \frac{\partial g}{\partial X} - \xi_y \frac{\partial g}{\partial Y} \tag{2.2}$$

и граничным условиям

$$H_-(\boldsymbol{\xi}) g(\boldsymbol{\xi}) f_0(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n}) = -H_-(\boldsymbol{\xi}) \int\limits_{S_\infty} \int\limits_{E} (\boldsymbol{\xi}\mathbf{n}) H_+(\boldsymbol{\xi}) R(-\boldsymbol{\xi}' \to -\boldsymbol{\xi}) g(\boldsymbol{\xi}') f_0(\boldsymbol{\xi}') d\boldsymbol{\xi}' \tag{2.3}$$

Поскольку φ_{in} удовлетворяет линеаризированному уравнению Больцмана, а g – сопряженному уравнению (2.2), в (2.1) оба интеграла по пространству Ω равны нулю и имеет место соотношение

$$\int\limits_{S_L + S_W + S_R + S_\infty} (\boldsymbol{\xi}\mathbf{n}) \varphi_{in} g f_0 d\boldsymbol{\xi} dS = 0 \tag{2.4}$$

где S_L, S_R, S_∞, S_W обозначают соответственно левую, правую, верхнюю и нижнюю часть контура. Далее каждый из интегралов в левой части (2.4) будем обозначать как $I_{S_L}, I_{S_R}, I_{S_\infty}, I_{S_W}$.

Рассмотрим в качестве сопряженной функции решение задачи Крамерса [2], в котором аргумент Y заменен на $-Y$. Задача Крамерса – стандартная задача о кинетическом скольжении у твердой поверхности, обусловленном наличием сдвигового потока на бесконечном удалении от поверхности с единичным касательным напряжением. Таким образом, положим

$$g(X, Y, \boldsymbol{\xi}) = \Psi_k(-Y, \boldsymbol{\xi})$$

где $\Psi_k(Y, \boldsymbol{\xi})$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\xi_y \frac{\partial \Psi_k}{\partial Y} = \Lambda \Psi_k \tag{2.5}$$

$$Y = 0: \; H_+(\boldsymbol{\xi}) f_0(\boldsymbol{\xi}) \Psi_k(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n}) = -H_+(\boldsymbol{\xi}') \int H_-(\boldsymbol{\xi}') R(-\boldsymbol{\xi}' \to -\boldsymbol{\xi}) \times f_0(\boldsymbol{\xi}') \Psi_K(\boldsymbol{\xi}')(\boldsymbol{\xi}'\mathbf{n}) d\boldsymbol{\xi}'$$

$$Y \to \infty: \; \Psi_k(Y, \boldsymbol{\xi}) \to \xi_x (\xi_y B(\xi) \mu^{-1} + Y \varkappa_0 + \varkappa_1) \tag{2.6}$$

Значения $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ в дальнейшем несущественны, μ – коэффициент вязкости. Решением (2.5), (2.6), согласно [2], является

$$\Psi_k(Y, \xi) = \xi_x (\xi_y B(\xi) \mu^{-1} + Y \varkappa_0 + \varkappa_1 + \Psi_0(\xi_x^2, -\xi_y, \xi^2, -Y))$$

где Ψ_0 – экспоненциально убывающая при $Y \to \infty$ функция. Используя данный выбор сопряженной функции, рассмотрим каждый из интегралов вдоль контура S. Считая, что S_∞ достаточно удалена от поверхности, и имея в виду дальнейший предельный переход $Y \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, для $\varphi_{in}(\boldsymbol{\xi})$ воспользуемся асимптотическим соотношением (1.12) и учитывая, что $\varphi_{in} = \varphi_{in}^{(0)} + \varepsilon \varphi_{in}^{(1)}$ и $(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n}) = \xi_y$ будем иметь

$$I_{S_\infty} = \int\limits_{S_\infty} dx \int\limits_{E} d\boldsymbol{\xi} \xi_y f_0 [\xi_x (\xi_y B(\xi) \mu^{-1} + \varkappa_0 Y + \varkappa_1 + \Psi_0(-Y, \xi_x^2, \xi_y, \xi^2))] \times$$

$$\times \left[p^{(0)}(\varepsilon Y) + T^{(0)}(\varepsilon Y) \left(\xi^2 - \frac{5}{2} \right) + \varepsilon p^{(1)}(\varepsilon Y) + \varepsilon T^{(1)}(\varepsilon Y) \left(\xi^2 - \frac{5}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon u_i^{(1)} \xi_i + \varepsilon A(\xi) \left(\xi_i \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial T^{(0)}}{\partial y} \right) \right] + o(\varepsilon)$$

В силу антисимметрии по ξ_x и ξ_y части слагаемых, и учитывая так же, что $\Psi_0(-Y,\xi_x^2,\xi_y,\xi^2)\to 0$ при $Y\to\infty$ экспоненциально, имеем

$$I_{S_\infty}\to\int\limits_{S_\infty}dx\int\limits_E d\xi\xi_x^2\xi_y^2 f_0(\xi)B(\xi)\mu^{-1}\left[u_x^{(1)}(Y\to\infty)+\frac{\partial T}{\partial x}A(\xi)\right]$$

Рассмотрим теперь интеграл вдоль твердой поверхности I_{S_w}, $(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n})=\xi_y$, используя (1.5), (1.11), (2.6) и полагая, что $\Psi_0(-Y,\xi_x^2,\xi_y,\xi^2)\equiv\Psi(Y,\boldsymbol{\xi})$, получаем

$$I_{S_w}=\int\limits_{S_w}dx\int\limits_E d\boldsymbol{\xi}\Big\{H_+(\boldsymbol{\xi})\Psi(0,\boldsymbol{\xi})\xi_y\int\limits_E d\boldsymbol{\xi}'H_-(\boldsymbol{\xi}')\times$$

$$\times R(\boldsymbol{\xi}'\to\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi}'\mathbf{n})f_0(\boldsymbol{\xi}')(\varphi_{in}^{(0)}(0,\boldsymbol{\xi}')+\varphi_{in}^{(1)}(0,\boldsymbol{\xi}'))+$$

$$+H_-(\boldsymbol{\xi})(\varphi_{in}^{(0)}(0,\boldsymbol{\xi})+\varphi_{in}^{(1)}(0,\boldsymbol{\xi}))\left[-\int\limits_E d\boldsymbol{\xi}'H_+(\boldsymbol{\xi}')R(-\boldsymbol{\xi}'\to-\boldsymbol{\xi})f_0(\boldsymbol{\xi}')\Psi(0,\boldsymbol{\xi}')\right]+$$

$$+H_+(\boldsymbol{\xi})\left[\tau(x)\left(\xi^2-\frac{3}{2}\right)\xi_y+\int\limits_E d\boldsymbol{\xi}'H_-(\boldsymbol{\xi}')R(\boldsymbol{\xi}'\to\boldsymbol{\xi})\xi_y' f_0(\boldsymbol{\xi}')\left(\xi^{2'}-\frac{3}{2}\right)\right]\Psi(0,\boldsymbol{\xi})\Big\}$$

Объединяя первое и второе слагаемое с учетом соотношения взаимности (1.6), имеем, меняя порядок интегрирования

$$\int\limits_E d\boldsymbol{\xi}\int\limits_E d\boldsymbol{\xi}'[H_+(\boldsymbol{\xi})H_-(\boldsymbol{\xi}')R(\boldsymbol{\xi}'\to\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n})f_0(\boldsymbol{\xi}')\varphi(\boldsymbol{\xi}')\Psi(0,\boldsymbol{\xi})]+$$

$$+H_+(\boldsymbol{\xi}')H_-(\boldsymbol{\xi})R(-\boldsymbol{\xi}'\to\boldsymbol{\xi})f_0(\boldsymbol{\xi}')\Psi(0,\boldsymbol{\xi}')(\varphi_{in}^{(0)}(\boldsymbol{\xi})+\varphi_{in}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}))=0$$

Вследствие антисимметрии $\Psi(Y,\boldsymbol{\xi})$ по ξ_x вклад от последнего слагаемого в подынтегральном выражении также отсутствует, таким образом

$$I_{S_w}=0$$

Рассмотрим интеграл вдоль боковых поверхностей. Для этого заметим прежде, что температура в нулевом приближении по ε может быть определена с учетом (1.9) как

$$T^{(0)}=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau(s)ds}{(x-s)^2+y^2}$$

и вследствие того, что $\tau(s)$ отлична от H-функции Хевисайда только в ε-окрестности $x=0$, вне области $\Delta x\sim\varepsilon$ имеет место

$$T^{(0)}=\pi^{-1}\Delta T\left(\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)+O(\varepsilon)\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial x}=\pi^{-1}\Delta T\frac{y}{x^2+y^2}+O(\varepsilon)\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial y}=\pi^{-1}\Delta T\frac{x}{x^2+y^2}+O(\varepsilon)\frac{1}{x^2+y^2}$$

Скорость скольжения вне области $\Delta x\sim\varepsilon$

$$u_x\sim u_T\sim\varepsilon\frac{\partial T^{(0)}}{\partial x}(x,y\to\varepsilon Y)\sim\varepsilon^2\frac{Y^2}{x^2+\varepsilon Y^2}\sim O(\varepsilon^2)$$

где $u_y\sim\varepsilon u_x$ вследствие уравнения неразрывности.

Таким образом, скорость кинетического скольжения в первом приближении отлична от нуля только в ε-окрестности точки $x = 0$. Поэтому с точностью до малых первого порядка скорость в окрестности точки $x = 0$ определяется δ-образным потенциалом двойного слоя [7] и для составляющих скорости имеет место при $y \to 0$

$$u_x = U\frac{\sin 2\gamma \cos\gamma}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \quad u_y = U\frac{\sin 2\gamma \sin\gamma}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \quad \gamma = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \tag{2.7}$$

где U – константа, которая и должна быть определена из соотношений теоремы Грина для рассматриваемого контура внутри кнудсеновского слоя.

Вне $\Delta x \sim \varepsilon$ области при $y \sim \varepsilon$ функция распределения имеет вид, соответствующий решению задачи об одномерном кнудсеновском слое

$$\varphi_e(x\to\pm\infty) = p^{(0)}(x,0) + T^{(0)}(x,0)\left(\xi^2-\frac{5}{2}\right) + \varepsilon u_i\xi_i + \varepsilon G_1(\xi,Y)\left.\frac{\partial T^{(0)}}{\partial x}\right|_{y=0} + \varepsilon p^{(1)}(x,0) +$$

$$+\varepsilon G_2(\xi,Y)\left.\frac{\partial T^{(0)}}{\partial y}\right|_{y=0} + \varepsilon\left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial x}X + \frac{\partial T^{(0)}}{\partial y}Y\right)\left(\xi^2-\frac{5}{2}\right) + \varepsilon A(\xi)\left(\xi_x\frac{\partial T^{(0)}}{\partial x} + \xi_y\frac{\partial T^{(0)}}{\partial y}\right)$$

где G_1, G_2 – экспоненциально убывающие по Y функции. Для интеграла вдоль боковой поверхности I_L, $(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n}) = \xi_x$ получаем, переходя к внутренним переменным и учитывая, что при $X \to \infty$ $(X \sim 1/\varepsilon, \varepsilon \to 0)$

$$\varphi_i \to \varphi_e, \quad \frac{\partial T}{\partial x}\to 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y}\to 0, \quad u_x \to 0, \quad u_y \to 0, \quad \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x} = \frac{\partial p^{(0)}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial p^{(1)}}{\partial y} = 0$$

имеем, опуская внепорядковые $o(\varepsilon)$ члены в подынтегральном выражении

$$I_{S_L} = \int_0^\delta dY \int_E \left[p(x\to -0,0) + T^{(0)}(x\to -0,0)\left(\xi^2-\frac{5}{2}\right)\right]\xi_x^2[\varkappa_0 + \varkappa_1 Y +$$

$$+\xi_Y B(\xi)\mu^{-1} + \Psi_0(-Y,\xi_x^2,\xi_y,\xi^2)]f_0(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}, \quad p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)}$$

С учетом антисимметрии по ξ_x и ξ_y, а также равенства нулю интеграла $\int_E (\xi^2 - 5/2)\xi_x^2 f_0 d\boldsymbol{\xi}$ получаем

$$I_{S_L} =$$

$$= \int_0^\delta dY \int_E d\boldsymbol{\xi} f_0(\xi)\left[(\varkappa_0 + \varkappa_1 Y + \Psi_0(-Y,\xi_y,\xi^2))p^{(0)}\xi_x^2 + T^{(0)}\left(\xi^2-\frac{5}{2}\right)\xi_x^2\Psi_0(-Y,\xi_x^2,\xi_y,\xi^2)\right]$$

Аналогичное выражение, но с обратным знаком ($(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n}) = -\xi_x$) имеет место для I_R. Суммируя I_R и I_L и учитывая, что

$$p^{(0)}(x\to +0) - p^{(0)}(x\to -0) = 0, \quad T^{(0)}(x\to +0) - T^{(0)}(x\to -0) = \Delta T^{(0)}$$

$$p^{(1)}(x\to +0) - p^{(1)}(x\to -0) = 0$$

получаем для полного интеграла по контуру (2.2)

$$I_{S_\infty}+I_{S_W}+I_{S_R}+I_{S_L}=\int\limits_{-\omega}^{\omega}dx\int\limits_E d\xi\xi_x^2\xi_y^2 f_0(\xi)B(\xi)\mu^{-1}\left[\varepsilon u_x^{(1)}+\varepsilon\frac{\partial T^{(0)}}{\partial x}A(\xi)\right]+$$

$$+\int\limits_0^{\delta}dY\int\limits_E d\xi f_0(\xi)\xi_x^2\left(\xi^2-\frac{5}{2}\right)\Psi_0(-Y,\xi_x^2,\xi_y,\xi^2)\Delta T^{(0)}$$

Переходя в первых двух слагаемых к внутренним переменным и используя для $u_x^{(1)}$ (2.7)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{U\sin 2\gamma X}{(X^2+Y^2)}dX=\pi U,\quad \gamma=\operatorname{arctg}\frac{Y}{X},\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial X}dX=\Delta T^{(0)}$$

имеем в пределе $\omega\to\infty$, $\delta\to\infty$, $\delta/\omega\to 0$ следующее соотношение:

$$\pi U\int\limits_E d\xi f_0(\xi)\xi_x^2\xi_y^2 B(\xi)\mu^{-1}=-\Delta T^{(0)}\left\{\int\limits_E d\xi\xi_x^2\xi_y^2 f_0(\xi)A(\xi)B(\xi)\mu^{-1}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{\infty}dY\int\limits_E d\xi\xi_x^2\left(\xi^2-\frac{5}{2}\right)\Psi_0(-Y,\xi_x^2,\xi_y,\xi^2)f_0(\xi)\right\}$$

Для интерпретации полученного результата рассмотрим обычную задачу о температурном скольжении

$$f(x,Y\to\infty,\xi)=f_0(\xi)\left(1+\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}X\left(\xi^2-\frac{5}{2}\right)+\varepsilon u_x^{(1)}\xi_x+A(\xi)\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}\xi_x\right)$$

$$\xi_y\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial Y}=\Lambda\varphi^{(1)}-\varepsilon\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}\left(\xi^2-\frac{5}{2}\right)\xi_x$$

$$\varphi^{(1)}(Y\to\infty)=u_x^{(1)}\xi_x+A(\xi)\xi_x\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$H_+(\xi)\varphi^{(1)}(\xi)(\xi\mathbf{n})=H_+(\xi)\int H_-(\xi')R(\xi'\to\xi)f_0(\xi')\varphi^{(1)}(\xi')(\xi'\mathbf{n})d\xi'$$

Рассматривая в качестве сопряженной функции ту же функцию, что и в предыдущей задаче, получим следующее соотношение:

$$u_x^{(1)}\int\limits_E\xi_x^2\xi_y^2 f_0(\xi)B(\xi)\mu^{-1}d\xi=-\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}\left[\int\limits_E B(\xi)\mu^{-1}A(\xi)\xi_x^2\xi_y^2 f_0(\xi)d\xi+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{\infty}dy\int\limits_E d\xi f_0(\xi)\left(\xi^2-\frac{5}{2}\right)\xi_x^2\Psi_0(-Y,\xi_x^2,\xi_y,\xi^2)\right]$$

или, разрешая это соотношение относительно $u_x^{(1)}$, получим соотношение вида $u_x^{(1)}=\beta^*\partial T/\partial x$, где $u_x^{(1)}$ по определению есть скорость температурного скольжения, а β^* – безразмерный коэффициент обычного (одномерного) температурного скольжения. Из сопоставления полученного соотношения для скорости скольжения в одномерной задаче с соотношением для U получаем, таким образом, что в исходной задаче для скорости скольжения при неоднородности температуры на расстояниях порядка длины свободного пробега молекул имеем с учетом того, что $\Delta T^{(0)} = \Delta T + o(\varepsilon)$

$$u_x^{(1)} = \beta^* \Delta T \delta(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_x^{(1)} dx = \beta^* \Delta T \tag{2.8}$$

где ΔT – полное изменение температуры поверхности при переходе через зону неоднородности, β^* – безразмерный коэффициент температурного скольжения, совпадающий с соответствующим коэффициентом в стандартной задаче. Поскольку соотношения (2.7) удовлетворяют системе уравнений Стокса с δ-образным граничным условием

$$u_x = \beta^* \delta(x) \Delta T$$

то соотношение (2.8) определяет следующую асимптотику скорости газа при $y \to 0$:

$$u_x = \beta^* \Delta T \frac{\sin 2\gamma \cos\gamma}{R}, \quad u_y = \beta^* \Delta T \frac{\sin 2\gamma \sin\gamma}{R}$$

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{Y}{X}, \quad R = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

Заключение. С помощью интегральной теоремы Грина получено обобщение граничного условия температурного скольжения для слабого скачка температуры вдоль поверхности тела. Скорость кинетического скольжения газа имеет δ-образную особенность в области резкого изменения температуры размером порядка длины свободного пробега молекул газа, интенсивность которой пропорциональна величине скачка температуры с обычным (одномерным) коэффициентом температурного скольжения. Это условие скольжения не зависит от конкретного закона, по которому происходит резкое изменение температуры вдоль поверхности тела. Указана также асимптотика скорости двумерного течения газа вблизи поверхности, вызванного данным температурным скольжением.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-01-01805, 99-01-00154).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. *Cercignani C.* Mathematical methods in kinetic theory. New York: Macmillan, 1969. = *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.
3. *Cercignani C.* Theory and application of the Boltzman equation. Edinburg: Scottish Acad. Press, 1975. = *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
4. *Ohwada T., Sone Y., Aoki K.* Numerical analysis of the shear and thermal creep flows of a rarefied gas over a plane wall on the basis of the linearized Boltzmann equation for hard-sphere molecules // Phys. Fluids A. 1989. V. 1. № 9. P. 1588–1599.
5. *Боголепов В.В., Липатов И.И., Соколов Л.А.* Структура химически неравновесных течений при скачкообразном изменении температуры и каталитических свойств поверхности // ПМТФ. 1990. № 3. С. 30–41.
6. *Freedlender O.G.* Relation of symmetry and reciprocity in linear kinetic theory of gases // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 13 Intern. Symp. / Ed. O. Belotserkovskii et al. N.Y.; L.: Plenum Press, 1985. V. 1. P. 91–98.
7. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.VII.1999