

УДК 532.517.42.013:536.24+551.511.6

© 2001 г. А.Н. ВУЛЬФСОН

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ КОНВЕКТИВНОЙ ОБЛАСТИ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ТОЧЕЧНЫХ, ЛИНЕЙНЫХ И ПЛОСКИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА И ИМПУЛЬСА

Предложено соотношение, связывающее высоту подъема конвективного фронта в нестратифицированной среде с потоками импульса и тепла на подстилающей поверхности, произвольно изменяющимися со временем для случаев точечных, линейных и плоских однородных источников. Существование подобной зависимости позволяет определить интегральную мощность выброса по оптическим наблюдениям за высотой распространения конвективного фронта. Как частные решения получены три класса автомоделных режимов, связанных с источниками тепла и импульса, мощность которых изменяется в соответствии с мгновенно-постоянным, степенным и экспоненциальным временными законами. Построена одномерная интегральная модель напорно-конвективной струи. Описаны классы автомоделных струй, соответствующих степенным и экспоненциальным источникам тепла и импульса. Показано, что все автомоделные струи, соответствующие степенным источникам тепла и импульса с достаточно большим показателем степени, характеризуются одними и теми же профилями температуры и скорости.

При тепловом и импульсном воздействиях, локализованных на нижней границе неподвижного однородного газа или жидкости, происходит процесс формирования изолированных более теплых объемов (термиков), поднимающихся вверх в поле силы тяжести с конечной скоростью. В лабораторных исследованиях конвекцию, вызванную действием источников тепла (или отклонением плотности) и импульса в нестратифицированной среде, можно наблюдать при эжектировании в пресную воду раствора соли или подкрашенной жидкости. Согласно лабораторным и натурным наблюдениям [1–3], всплывающий конвективный элемент имеет четко выраженную зависящую от времени верхнюю границу, которая совпадает с поверхностью нулевого отклонения температуры (или плотности) от ее фонового значения. При этом процессы вовлечения и размывания не позволяют идентифицировать боковую и нижнюю границы термика как нулевую изотерму.

Существенно, что в области, расположенной выше конвективного элемента, среда слабо возмущена. Это обстоятельство позволяет ввести подвижную горизонтальную плоскость (конвективный фронт), отделяющую область развитой конвекции от области практически невозмущенной среды. Зависимость высоты подъема конвективного фронта в заданной среде полностью определяется заданием на подстилающей поверхности потоков импульса и тепла. Целесообразно рассмотреть источники простейшей геометрической структуры: точечные, линейные и плоские однородные источники тепла и импульса. Точечные источники реализуются при выбросах горячих газов в атмосферу из дымовых труб производственных коллекторов. Линейные источники могут реализоваться при некоторых типах повреждений подводных газопроводов. Плоские однородные источники реализуются на поверхности открытых водных водоемов, где ветровое волнение создает поток импульса, а испарение с поверхности – поток тепла.

В случае источников специального типа (например, чисто тепловых источников, функционирующих по степенным временным законам) весьма эффективным методом определения функциональной зависимости высоты границы термика от мощности источника является теория размерности [4]. На основе этой теории были исследованы случаи точечных [1, 5–8], линейных [9] и плоских однородных [10–12] источников тепла.

В случае источников, функционирующих по произвольным временным законам, эффективным методом определения распространения конвективного фронта является построение полуэмпирических дифференциальных соотношений, связывающих высоту подъема конвективного фронта с величиной потока тепла и импульса на подстилающей поверхности. Эти зависимости далее будут именоваться универсальными соотношениями развития конвективного фронта. Идея такого подхода для точечных и линейных источников тепла была впервые высказана в [5]. Универсальное соотношение для плоских однородных источников тепла, мощность которых принадлежит достаточно широкому классу функций, было приведено в [13, 14]. Несколько иное соотношение, справедливое для мощностей источников тепла более широкого класса, рассмотрено в [12].

В настоящей работе предложено обоснование универсальных соотношений, связывающих высоту подъема конвективного фронта с произвольно изменяющимися со временем потоками импульса и тепла на подстилающей поверхности, для случаев точечных, линейных и плоских однородных источников.

В рамках данного подхода получено три класса автомодельных режимов второго рода для распространения границ конвективных областей, когда мощность источников изменяется в соответствии с мгновенным, степенным и экспоненциальным временными законами.

Показано, что для чисто тепловых и чисто импульсных точечных и линейных источников, мощность которых изменяется со временем мгновенно, либо по степенному закону, предложенные автомодельные соотношения распространения верхней границы конвективных элементов включают в себя все известные автомодельные соотношения первого рода, выведенные ранее с помощью теории размерности.

Изложенный подход, сочетающий интегральные методы гидротермодинамики и теорию подобия, позволяет с единых позиций взглянуть на широкий спектр задач проникающей конвекции.

1. Постановка задачи о проникающей конвекции в однородной среде. Пусть t – время; x, y, z – декартовы координаты, ось z направлена вертикально вверх противоположно ускорению свободного падения g .

Для описания возмущений в однородной среде используем уравнения теории конвекции Буссинеска в форме [15]

$$\nabla \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial z} w = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -\nabla \Phi + \frac{\partial}{\partial x} v \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} v \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) w + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \Phi + g\theta + \frac{\partial}{\partial x} v \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} v \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \theta + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} v \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} v \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{u}, w – компоненты скорости в плоскости xy и оси z соответственно; ∇ – горизонтальный оператор Гамильтона; v – коэффициент горизонтальной турбулентной или молекулярной вязкости.

Величины θ и Φ зависят от модели, принятой для среды. Выберем в качестве среды изоэнтропическую атмосферу, т.е. нестратифицированный идеальный газ с постоянной фоновой потенциальной температурой $\bar{\Theta}_a = \text{const}$ и плотностью $\bar{\rho}_a(z)$.

Тогда в соответствии с [15]

$$\Phi = \frac{p'}{\bar{\rho}_a(z)}, \quad \theta = \frac{\Theta'}{\Theta_a}, \quad \Theta = T \left(\frac{p}{p_n} \right)^{-R_d / c_p} \quad (1.4)$$

где p' , Θ' – отклонение давления и потенциальной температуры от их фоновых значений; T – абсолютная температура; p – давление; $p_n = 1000$ мбар; R_d , c_p – газовая постоянная и теплоемкость газа при постоянном давлении соответственно. Если в качестве среды выбрана несжимаемая жидкость с постоянной фоновой плотностью ρ_0 и отклонением плотности ρ' , то $\Phi = p'/\rho_0$, $\theta = -\rho'/\rho_0$.

Уравнения (1.1) – (1.3) будут рассматриваться внутри полубесконечного вертикального цилиндра V с сечением σ : $V = \{x, y \in \sigma, 0 < z < \infty\}$, где площадь сечения σ считается бесконечной в случае точечных и линейных источников и конечной в случае плоского источника.

Существование кинетической, потенциальной, внутренней энергии и энтропии позволяет считать, что функции u^2 , w^2 , $g\theta z$, θ и Φ принадлежат функциональному пространству $L_1(V)$ (см. [16]). Интегрируемость функций по неограниченной области V приводит к условию их затухания на бесконечно удаленных границах.

На нижней неподвижной границе области V при $z = 0$ задаются поток тепла s_0 (или отклонения плотности от ее фонового значения) и поток импульса p_0 , при этом предполагается, что их интегральные поверхностные мощности $P(t)$ и $S(t)$ ограничены

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \mathbf{u}w &= 0 \\ \lim_{z \rightarrow 0} \mathbf{w}w &= p_0(x, y, t) > 0, \quad P(t) = \int_{\sigma} p_0(x, y, t) d\sigma < \infty \\ \lim_{z \rightarrow 0} \mathbf{w}\theta &= s_0(x, y, t) > 0, \quad S(t) = \int_{\sigma} s_0(x, y, t) d\sigma < \infty \end{aligned} \quad (1.5)$$

В частности, в случае точечного источника импульса и тепла $p_0(x, y, t) = P_0(t)\delta(x)\delta(y)$ и $s_0(x, y, t) = S_0(t)\delta(x)\delta(y)$, где $P_0(t)$, $S_0(t)$ – неотрицательные функции, характеризующие мощности точечного источника импульса и тепла; $\delta(x)$, $\delta(y)$ – дельта-функции Дирака.

При $z \rightarrow \infty$ потоки тепла и импульса отсутствуют, при этом в соответствии с условием непротекания предполагается равномерное затухание вертикальной скорости

$$\lim_{z \rightarrow \infty} w(x, y, z, t) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{\sigma} w(x, y, z, t) d\sigma = 0 \quad (1.6)$$

На боковых границах области среда предполагается неподвижной и теплоизолированной. Выбранные краевые условия необходимы для построения последующих интегральных соотношений и могут варьироваться в определенных рамках, обеспечивающих существование соответствующих интегральных равенств.

До включения источников при $t = t_0$ среда покоится, так что

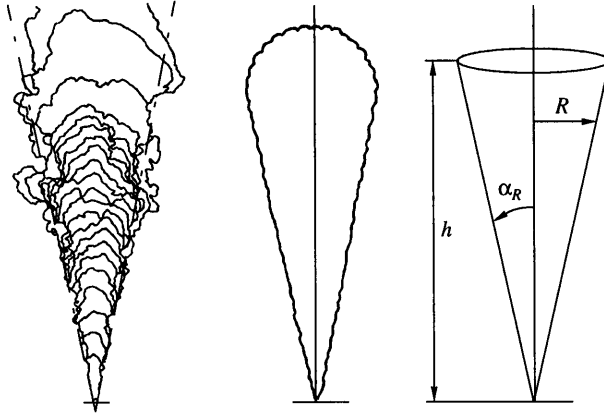
$$\mathbf{u}(x, y, z, t_0) = 0, \quad w(x, y, z, t_0) = 0, \quad \theta(x, y, z, t_0) = 0 \quad (1.7)$$

Уравнения (1.1)–(1.3), (1.5)–(1.7) образуют замкнутую систему уравнений для описания проникающей конвекции.

2. Интегральные уравнения теории конвекции и понятие конвективного фронта.

Перейдем к построению основных интегральных соотношений. Интегрируя первое уравнение (1.1) по произвольной горизонтальной площади σ с учетом боковых граничных условий и условия непротекания (1.6), получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} w(x, y, z, t) d\sigma = 0, \quad \int_{\sigma} w(x, y, z, t) d\sigma = 0 \quad (2.1)$$



Фиг. 1. Контур развивающейся конвективной струи, вызванной источником импульса, и его геометрическая аппроксимация

Пусть $z = h(t)$ – произвольная подвижная горизонтальная плоскость. Интегрируя (2.1) по высоте, получим соотношение для вертикального импульса

$$\int_0^{h(t)} \int_{\sigma} w(x, y, z, t) d\sigma dz = 0 \quad (2.2)$$

Интегрирование уравнений для вертикального импульса и тепла сначала по площади, а затем по высоте с учетом (2.2) и краевых условий (1.6) приводит к соотношениям

$$\int_{\sigma} \{w^2(x, y, h, t) + [\Phi(x, y, h, t) - \Phi(x, y, 0, t)]\} d\sigma = \int_{\sigma} p_0 d\sigma + g \int_0^{h(t)} \int_{\sigma} \theta(x, y, z, t) d\sigma dz \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h(t)} \int_{\sigma} \theta(x, y, z, t) d\sigma dz - \left\{ \frac{dh}{dt} \int_{\sigma} \theta(x, y, h, t) d\sigma - \int_{\sigma} w\theta(x, y, h, t) d\sigma \right\} = \int_{\sigma} s_0 d\sigma \quad (2.4)$$

Развитие проникающей конвекции сопровождается формированием четко выраженной верхней границы, поднимающейся вверх по мере развития конвективных элементов (фиг. 1). Далее, в соответствии с [14] определим конвективный фронт как горизонтальную плоскость $z = h(t)$, на поверхности которой

$$\frac{dh}{dt} \int_{\sigma} \theta(x, y, h, t) d\sigma - \int_{\sigma} w\theta(x, y, h, t) d\sigma = 0 \quad (2.5)$$

Из соотношения (2.4) с учетом (2.5) следует, что весь интегральный поток тепла $S(t)$, поступающий с подстилающей поверхности, расходуется только на нагревание слоя $z < h(t)$, расположенного под конвективным фронтом, и не затрагивает вышележащую среду. Физический смысл определения (2.5) состоит в том, что слой $z > h(t)$, расположенный выше конвективного фронта, не нагревается и, следовательно, остается невозмущенным.

Прямое экспериментальное определение высоты конвективного фронта по (2.5) довольно сложно. На практике прямым измерениям доступно лишь изменение верхней границы окрашенного конвективного термика, соответствующей нулевой безразмерной потенциальной температуре. Поэтому высоту конвективного фронта целесообразно связать с высотой какой-либо характерной точки верхней границы термика.

В последующих рассуждениях форма реального конвективного термика или систем термиков будет аппроксимироваться фигурой эквивалентного объема с плоским верх-

ним основанием, расположенным на высоте $h(t)$. Так, конвективный термик, возникающий от точечного источника тепла и импульса, будет аппроксимироваться конусом (фиг. 1). А система конвективных элементов, вызванных горизонтально-однородными потоками тепла и импульса, будет аппроксимироваться вертикальным цилиндром. Такое приближение делает верхнюю поверхность границы термика плоским, а боковую поверхность – конической. При этом функция $h = h(t)$ характеризует перемещение верхней границы термика и соответствует максимальной высоте границы боковой поверхности.

Интегрируя уравнение (2.4) по времени с учетом (2.5) и начальных условий (1.7) и подставляя полученный результат в (2.3), получим интегральное соотношение

$$\int_{\sigma} \{w^2(x, y, h, t) + [\Phi(x, y, h, t) - \Phi(x, y, 0, t)]\} d\sigma = \int_{\sigma} p_0 d\sigma + g \int_{t_0}^t \int_{\sigma} s_0 d\sigma dt \quad (2.6)$$

Далее рассмотрим приближенные формы уравнения (2.6). При описании распространения конвективных термиков над точечными источниками вместо системы уравнений (1.1)–(1.3) можно использовать приближение вертикального пограничного слоя. Это приближение игнорирует ускорение среды и турбулентный перенос в горизонтальной плоскости, так что второе уравнение (1.1) редуцируется к форме $\nabla\Phi = 0$, т.е. $\Phi = \Phi(z, t)$. Если $\Phi \in L_1(V)$, то на боковых границах области нет внешних возмущений, т.е. $\lim_{x, y \rightarrow \infty} \Phi = 0$. Таким образом, во втором уравнении (1.1) градиентом

давления можно пренебречь.

Пусть r, φ, z – цилиндрическая система координат, центр которой совпадает с расположением точечного источника. Тогда в приближении осесимметричного вертикального пограничного слоя аналогом (2.6) является соотношение, не содержащее Φ

$$2\pi \int_0^{\infty} w^2(r, h, t) r dr = P_0(t) + g \int_{t_0}^t S_0(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

В случае использования полных уравнений (1.1)–(1.3) соотношение типа (2.7) можно вывести, опираясь на следующие динамические соображения. Нестационарный термик, вызванный точечным источником тепла и импульса, перемещается в однородной несжимаемой среде, которая оказывает на него динамическое воздействие. При достаточно больших числах Рейнольдса сопротивление, которое испытывает тело, пропорционально квадрату скорости его движения [4]. Учитывая, что термик представляет собой изолированный конвективный элемент, можно считать, что

$$\int_{\sigma} \{\Phi(x, y, h, t) - \Phi(x, y, 0, t)\} d\sigma = (c - 1) \int_{\sigma} w^2(x, y, h, t) d\sigma \quad (2.8)$$

где $c > 1$ – некоторая постоянная.

Подстановка (2.8) в уравнение (2.6) приводит к модифицированному уравнению, отличающемуся от (2.7) множителем c перед интегралом в левой части.

Уравнение (2.7) неявно содержит h , что позволяет использовать его при построении соотношения для распространения конвективного фронта.

3. Уравнение распространения конвективного фронта. Многочисленные измерения параметров турбулентных струй [17] надежно установили существование аппроксимаций, включающих разделение переменных и подобие по горизонтальным координатам. В соответствии с [17] можно считать, что в области восходящих движений

$$w(r, z, t) = \bar{w}(z, t) f_w\left(\frac{r}{R}\right), \quad \theta(r, z, t) = \bar{\theta}(z, t) f_{\theta}\left(\frac{r}{R}\right), \quad R(z, t) = \alpha_R z \quad (3.1)$$

Здесь $\bar{w}(z, t)$, $\bar{\theta}(z, t)$ – вертикальная скорость и безразмерная потенциальная температура на оси струи, $f_w(r/R)$ и $f_{\theta}(r/R)$ – известные функции; $R = R(z, t)$ – радиус струи; α_R – коэффициент углового расширения струи, величина которого варьируется в

диапазоне от 0,1 до 0,2 (см., например, [18]). В приближении (3.1) уравнение для распространения конвективного фронта может быть выведено абсолютно строго.

Подставляя (3.1) при $z = h(t)$ в (2.5), получим

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_w \bar{w}(h, t) \quad (3.2)$$

где α_w – числовая постоянная, величина которой определяется отношением интегралов от функций $f_\theta(r/R)f_w(r/R)$ и $f_\theta(r/R)$.

Соотношение (3.2) означает, что скорость конвективного фронта определяется только средней скоростью частиц на поверхности термика. Экспериментальное подтверждение соотношения (3.2) дано в [6].

Подстановка (3.1) при $z = h(t)$ и (3.2) в модифицированное соотношение (2.7) приводит к уравнению распространения конвективного фронта над точечным источником тепла и импульса

$$\lambda_0^2 h^2 \left(\frac{d}{dt} h \right)^2 = P_0(t) + g \int_{t_0}^t S_0(\tau) d\tau, \quad \lambda_0^2 = 2\pi\alpha_R^2 \alpha_h c \quad (3.3)$$

где α_h – числовая постоянная, величина которой определяется отношением интеграла от функции $f_w^2(r/R)$ и постоянной α_w^2 .

Для грубой оценки величины λ_0^2 воспользуемся ступенчатым профилем Тейлора [19]

$$f_w\left(\frac{r}{R}\right) = f_\theta\left(\frac{r}{R}\right) = \begin{cases} 1 & (0 \leq r/R < 1) \\ 0 & (1 < r/R < \infty) \end{cases} \quad (3.4)$$

В приближении пограничного слоя $c = 1$, для профилей (3.4) $\alpha_w = 1$, $\alpha_h = 1/2$ и $\lambda_0^2 = \pi\alpha_R^2$. При $\alpha_R = 0,15$ постоянная $\lambda_0^2 = 7,065 \cdot 10^{-2}$ достаточно хорошо согласуется с экспериментальным значением $\lambda_0^2 = 2,22-4,56 \cdot 10^{-2}$, полученным при эжектировании подкрашенной жидкости в пресную воду [6].

Уравнение (3.3) можно построить также, опираясь на теорию размерности [3], без использования приближения (3.1). Допустим, что распространение конвективного фронта определяется некоторым соотношением в классе функциональных зависимостей

$$F\left(h, \frac{dh}{dt}\right) = P_0(t) + g \int_{t_0}^t S_0(\tau) d\tau \quad (3.5)$$

где $F \geq 0$ – произвольная функция с размерностью $[F] = m^4/c^2$. На основании теории подобия можно утверждать, что

$$F\left(h, \frac{dh}{dt}\right) = \lambda_0^2 h^2 \left(\frac{d}{dt} h \right)^2 \quad (3.6)$$

где λ_0^2 – постоянная.

Аналогичные соотношения могут быть выведены для линейных и плоских источников тепла и импульса. В случае линейных источников тепла и импульса форма области конвекции аппроксимируется треугольной призмой. В случае плоских горизонтально-однородных источников тепла и импульса предполагается, что проникающая конвекция заключена в цилиндре с конечной площадью горизонтального сечения σ . Заметим, что плоский источник импульса можно реализовать в цилиндрическом сосуде, дно которого представляет собой либо колеблющуюся решетку, либо решетку, состоящую из системы подвижных стержней, способных совершать вертикальные колебания.

Введем индекс пространственной размерности источника: $n = 0, 1, 2$ для точечного, линейного и плоского источников соответственно. Пусть $S_n(t)$, $P_n(t)$ – амплитуды тепловых и импульсных источников с различной пространственной геометрией, а λ_n^2 – соответствующий числовой параметр.

Тогда по аналогии с (3.3) уравнение, описывающее точечные, линейные и плоские источники тепла и импульса, будет иметь вид

$$\lambda_n^2 h^{2-n} \left(\frac{d}{dt} h \right)^2 = P_n(t) + g \int_{t_0}^t S_n(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) допускает достаточно наглядную физическую интерпретацию. Поскольку эффективная площадь конвективного фронта пропорциональна h^{2-n} , правая часть (3.7) пропорциональна полной "кинетической энергии" материальных частиц, совпадающих с конвективным фронтом. Таким образом, согласно (3.7), "полная кинетическая" энергия конвективного фронта в любой момент времени пропорциональна сумме кинетической энергии и работы силы плавучести, поступающих в среду от источников на подстилающей поверхности.

Численные значения параметра λ_n^2 должны определяться из численного или лабораторного эксперимента. Так, с приемлемой точностью можно считать [13], что для атмосферного воздуха и однородного плоского источника $\lambda_2^2 = 125$, тогда как для воды и точечного источника $\lambda_0^2 = (2,22-4,56) \cdot 10^{-2}$ [6].

4. Автомодельные режимы проникающей конвекции как частные решения уравнения распространения конвективного фронта. Для ряда специально заданных амплитуд теплового и импульсного источника соответствующие режимы распространения конвективного фронта можно получить, опираясь на теорию размерности, без использования соотношения (3.7). Покажем, что уравнение (3.7) не только включает в себя как частные решения все уже известные ранее зависимости, но также позволяет построить новые автомодельные режимы.

Рассмотрим конвекцию, вызванную мгновенным источником тепла и постоянным источником импульса. Тогда из (3.7) следует

$$t_0 = 0, \quad P_n(t) = R_0, \quad S_n(t) = Q_0 \delta(t), \quad R_0 = \text{const}, \quad Q_0 = \text{const}$$

$$h(t) = \left\{ \left(\frac{4-n}{2\lambda_n} \right)^2 (R_0 + gQ_0) t^2 \right\}^{1/(4-n)} \quad (4.1)$$

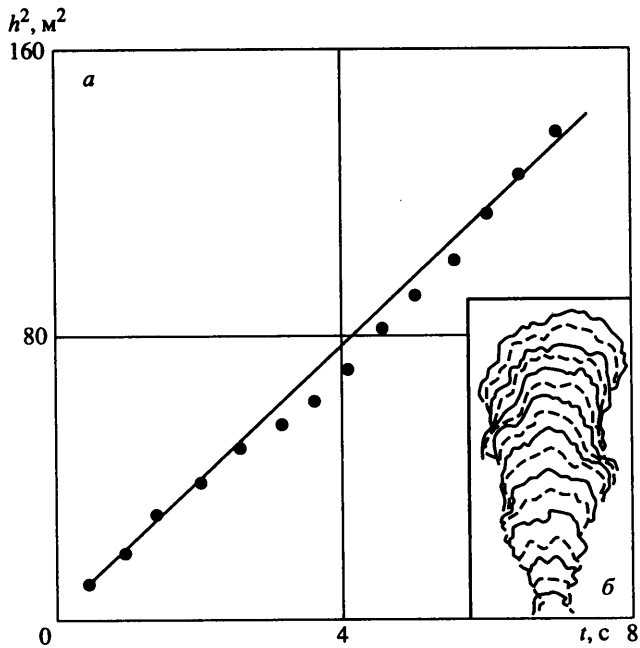
В случае движения, вызванного только тепловыми источниками ($R_0 = 0$), соответствующие соотношения были получены методом теории подобия и размерности и проверены экспериментально для точечного ($n = 0$) и линейного ($n = 1$) мгновенных источников тепла в [1, 9] (фиг. 2), а для плоского ($n = 2$) – в [10, 3] (фиг. 3).

В случае движения, вызванного только источниками импульса ($Q_0 = 0$), соответствующие соотношения были получены методом теории подобия и размерности и проверены экспериментально для точечного ($n = 0$) и линейного ($n = 1$) постоянных источников импульса в [6], а для плоского – в [19, 20].

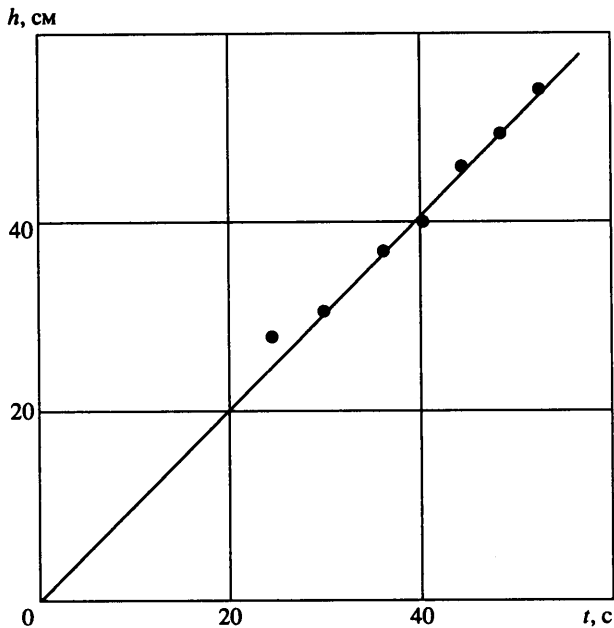
Рассмотрим конвекцию, вызванную степенным источником тепла и импульса. Тогда из (3.7) следует

$$t_0 = 0, \quad P_n(t) = R_q t^q, \quad S_n(t) = Q_q q t^{q-1}, \quad q > 0, \quad R_q = \text{const}, \quad Q_q = \text{const}$$

$$h(t) = \left\{ \left(\frac{4-n}{2\lambda_n} \right)^2 \frac{(R_q + gQ_q)}{(q/2 + 1)^2} t^{(q+2)} \right\}^{1/(4-n)} \quad (4.2)$$



Фиг. 2. Зависимость $h^2(t)$ в случае точечного мгновенного источника тепла, где h – средняя глубина проникновения конвективных элементов (точки – экспериментальные данные, прямая линия – автомодельное решение) (а) границы термика в последовательные моменты времени (б)



Фиг. 3. Зависимость $h(t)$ при плоском мгновенном источнике отклонения плотности от фонового значения (точки – экспериментальные данные, прямая линия – автомодельное решение)

Если движения вызваны только тепловыми источниками ($R_q = 0$), то для точечного источника тепла ($n = 0$) постоянной мощности $q = 1$ соответствующее соотношение подобия было получено в [5, 6] и проверено экспериментально в [6]. Общий случай степенной автомодельности неявно следует из [8] и численно исследован при $q = 2, 3$ и 11 в [8], а при $q = 3$ и 4 экспериментально проверен в [8, 21].

Для линейного источника тепла ($n = 1$) постоянной мощности $q = 1$ соотношение подобия было получено и проверено экспериментально в [9]. Общий класс линейных степенных тепловых режимов представлен соответствующей формой уравнения (4.2), выведенной из (3.7).

Для плоского источника тепла ($n = 2$) общий случай степенной автомодельности получен в [10, 11]. Случай $q = 2$ проверен методом численного интегрирования в [13].

Если движения вызваны только источниками импульса ($Q_q = 0$), то для точечного ($n = 0$) степенного источника импульса соответствующие соотношения были получены методом теории подобия и размерности и проверены экспериментально в [22]. Для плоского ($n = 2$) степенного источника импульса вывод соответствующих соотношений неявно содержится в [20].

Рассмотрим конвекцию, вызванную экспоненциальными источниками тепла и импульса. Тогда из (3.7) следует

$$t_0 = -\infty, P_n(t) = R_\infty \exp(qt), S_n(t) = Q_\infty q \exp(qt) \quad R_\infty = \text{const}, Q_\infty = \text{const}$$

$$h(t) = \left\{ \left(\frac{4-n}{2\lambda_n} \right)^2 \frac{(R_\infty + gQ_\infty)}{(q/2)^2} \exp(qt) \right\}^{1/(4-n)} \quad (4.3)$$

Формы (4.1)–(4.3) предложены впервые и являются автомодельными соотношениями второго рода, так как не могут быть получены из соображений теории размерности. Соотношения (4.3) следует интерпретировать как огибающую семейства степенных решений (4.2) при $t_0 \rightarrow -\infty$ и $q \rightarrow +\infty$.

5. Автомодельная струя над точечным источником тепла и импульса. Уравнение распространения конвективного фронта (3.7) позволяет построить одномерную интегральную модель нестационарной напорно-конвективной струи, альтернативную конвективным моделям [8, 21]. Опираясь на приближение (3.1), используем для упрощения ступенчатые профили Тейлора (3.4) для вертикальной скорости и безразмерной потенциальной температуры. Тогда в соответствии с методом Кармана – Польгаузена интегрирование уравнений (1.2), (1.3) по площади приводит к соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{w}R^2 + \frac{\partial}{\partial z} \bar{w}\bar{w}R^2 = g\bar{\theta}R^2, \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\theta}R^2 + \frac{\partial}{\partial z} \bar{w}\bar{\theta}R^2 = 0 \quad (5.1)$$

Краевыми условиями для (5.1) служат проинтегрированные по площади условия (1.5)

$$\lim_{z \rightarrow 0} \{\bar{w}\bar{w}R^2\} = \frac{1}{\pi} P_0(t), \quad \lim_{z \rightarrow 0} \{\bar{w}\bar{\theta}R^2\} = \frac{1}{\pi} S_0(t) \quad (5.2)$$

Для замыкания систем уравнений (5.1), (5.2) необходимо включить уравнение для радиуса струи R . Будем предполагать далее, что конвективный термик аппроксимируется конической поверхностью и горизонтальной головной частью, при этом в любой момент времени форма термика остается подобной (фиг. 1).

В соответствии с гипотезой Прандтля о линейном расширении струи, принятой в [17, 18], для радиуса плюмажа над точечным источником используем соотношение

$$R(z, t) = \alpha_R z \quad (0 \leq z \leq h(t)), \quad R = 0 \quad (h(t) \leq z \leq \infty) \quad (5.3)$$

где α_R – коэффициент углового расширения струи, величина которого варьируется в диапазоне от 0,1 до 0,2 (см. [18]), $h(t)$ – высота верхней границы конической поверхности струи, заданная соотношением (3.7).

Соотношения (5.1)–(5.3) образуют замкнутую систему уравнений одномерной интегральной модели вертикальной напорно-конвективной струи. При этом замыкающее уравнение (5.3) отличается от эвристического уравнения, принятого в моделях [8, 21].

Покажем, что автомодельные режимы (4.1)–(4.3) порождают соответствующие классы автомодельных движений. Рассмотрим для конкретности случай точечного источника для модели (5.1)–(5.3).

Пусть $z_* = z/h(t)$ – безразмерный параметр. При $0 < z < h(t)$ автомодельное решение системы (5.1)–(5.3) можно искать в виде

$$\bar{w}(z, t) = \frac{dh}{dt} w^*(z_*), \quad \bar{\theta}(z, t) = \frac{1}{gh} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \theta^*(z_*) \quad (5.4)$$

$$R(z, t) = hR_* = h\alpha_R z_*$$

где w^* , θ^* , R_* – безразмерные функции.

Для степенных источников (4.2) подстановка (5.4) в уравнения (5.1)–(5.3) приводит при $0 < z_* < 1$ к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left[3 + \frac{q-2}{q+2} \right] w^* R_*^2 - \frac{d}{dz_*} (w^* R_*^2 z_*) + \frac{d}{dz_*} w^* w^* R_*^2 = \theta^* R_*^2 \quad (5.5)$$

$$2 \left[1 + \frac{q-2}{q+2} \right] \theta^* R_*^2 - \frac{d}{dz_*} (\theta^* R_*^2 z_*) + \frac{d}{dz_*} w^* \theta^* R_*^2 = 0, \quad R_* = \alpha_R z_*$$

Подстановка (5.4) в систему (5.2) приводит к краевым условиям

$$\lim_{z_* \rightarrow 0} \{w^* w^* R_*^2\} = \frac{\lambda_0^2}{\pi} \frac{R_q}{R_q + gQ_q}, \quad \lim_{z_* \rightarrow 0} \{w^* \theta^* R_*^2\} = \frac{\lambda_0^2}{\pi} \frac{4q}{q+2} \frac{gQ_q}{R_q + gQ_q} \quad (5.6)$$

Аналогичные соотношения могут быть получены и для экспоненциального источника (4.3). При этом коэффициенты в соответствующих уравнениях (5.5), (5.6) могут быть получены предельным переходом при $q \rightarrow \infty$. В случае экспоненциального источника (4.3) решение представляет собой автомодельное решение второго рода.

В области достаточно больших показателей степени источников $20 < q < \infty$ коэффициенты (5.6) можно считать постоянными и не зависящими от q . Таким образом, все автомодельные струи с достаточно большими показателями степени источников имеют практически идентичные профили скорости и температуры, соответствующие экспоненциальному источнику.

В качестве примера рассмотрим численное решение автомодельных уравнений в конвективном режиме (4.2) при $R_q = 0$. Следуя [8, 21], введем вспомогательные функции $w_*^s(z_*)$, $\theta_*^s(z_*)$ и $z_1(z_*)$

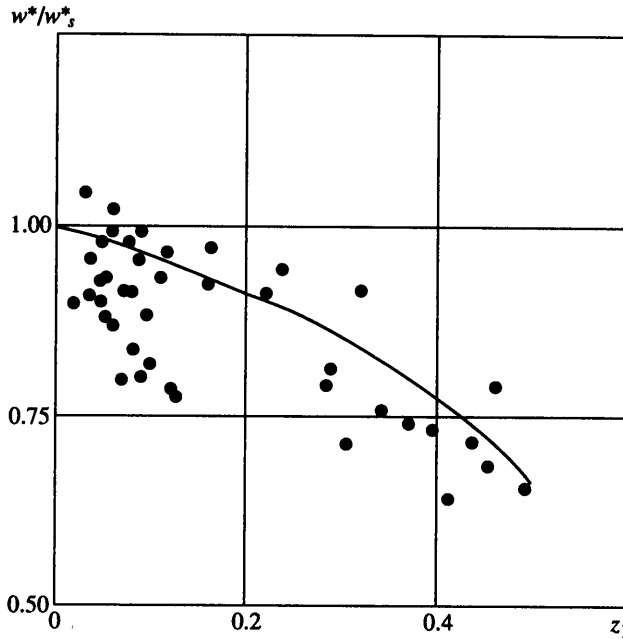
$$\frac{d}{dz_*} w_*^s w_*^s R_*^2 = \theta_*^s R_*^2, \quad \frac{d}{dz_*} w_*^s \theta_*^s R_*^2 = 0, \quad R_* = \alpha_R z_* \quad (5.7)$$

$$z_1 = \frac{h}{S_0} \frac{(dS_0/dt)}{(dh/dt)} \frac{z_*}{w_*^s(z_*)} = \frac{4(q-1)}{q+2} \left(\frac{q+2}{3q} \right)^{1/3} \frac{z_*}{w_*^s(z_*)}$$

Вычисления выполняются для случая $q = 4$ и коэффициенте вовлечения $\alpha_R = 0,1$. Результаты расчета нормированной скорости w_*/w_*^s как функции z_1 и их сопоставление с экспериментальными данными [21] представлены на фиг. 4.

Аналогичные результаты имеют место и для случая линейных источников. При этом в соответствующих автомодельных уравнениях движения и притока тепла (5.5) функцию R_*^2 следует заменить на R_* , а в краевых условиях (5.6) коэффициент $1/\pi$ следует заменить на $1/2$.

Детальное наблюдение конвекции в случае плоских горизонтально-однородных источников указывает на формирование статистического ансамбля конвективных струй с заданной функ-



Фиг. 4. Сравнение экспериментальных данных [21] (точки) и модельных расчетов (сплошная линия) для конвективной струи над точечным источником тепла, мощность которого изменяется во времени по кубическому закону

цией распределения [3, 23, 24]. При этом распространение конвективного фронта можно связать с параметрами статистически усредненной струи, уравнения которой аналогичны (5.5). Предложенный подход вполне согласуется с описанием конвективного слоя методами турбулентности, изложенными в [10, 20].

Заключение. Предложено обоснование соотношения, связывающего высоту подъема конвективного фронта в нестратифицированной среде с потоками импульса и тепла на подстилающей поверхности, произвольно изменяющимися со временем, для случаев точечных, линейных и плоских однородных источников. Так как в достаточно тонком слое стратифицированную среду можно рассматривать как однородную, полученное соотношение представляет асимптотику закономерностей распространения конвективного фронта в устойчиво стратифицированной среде на малых временах.

Предложенное соотношение позволяет по оптическим наблюдениям за высотой распространения конвективного фронта определить интегральную мощность выброса. Полученные результаты могут найти широкое приложение при описании промышленных тепловых выбросов в атмосферу, разрывов подводных газопроводов, горения нефти на поверхности воды и т.д.

Вывод уравнения для распространения конвективного фронта существенно опирается на интегральные уравнения Буссинеска, которые могут нарушаться в случае, если на подстилающей поверхности действуют мощные нестационарные околосвуковые потоки импульса. Этот тип задач требует специального исследования.

Автор выражает признательность М.Г. Хубляряну и В.Н. Зырянову за конструктивное обсуждение и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Scorer R.S.* Experiments on convection of isolated masses of buoyant fluid // *J. Fluid. Mech.* 1957. V. 2. Pt 6. P. 583–594.
2. *Willis G.E., Deardorff J.W.* A laboratory model of the unstable planetary boundary layer // *J. Atmosph. Sci.* 1974. V. 31. № 5. P. 1297–1307.
3. *Дикарев С.Н., Зацепин А.Г.* Развитие конвекции в двухслойной неустойчивой стратифицированной жидкости // *Океанология.* 1983. Т. 23. Вып. 6. С. 950–953.
4. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 447 с.
5. *Turner J.S.* The "starting plume" in neutral surroundings // *J. Fluid. Mech.* 1962. V. 13. Pt 3. P. 356–368.
6. *Scorer R.S.* *Environmental Aerodynamics.* N.Y., etc.: Wiley, 1978. = *Скорер Р.С.* *Аэродинамика окружающей среды.* М.: Мир, 1980. 549 с.
7. *Middleton J.H.* The asymptotic behaviour of starting plume // *J. Fluid. Mech.* 1975. V. 72. Pt 4. P. 753–771.
8. *Delichatsios M.A.* Time similarity analysis of unsteady buoyant plumes in neutral surroundings // *J. Fluid. Mech.* 1979. V. 93. Pt 2. P. 241–250.
9. *Richards J.M.* Experiments on the motions of isolated cylindrical thermals through unstratified surroundings // *Intern. J. Air and Water Pollut.* 1963. V. 7. № 1. P. 17–34.
10. *Вульфсон А.Н., Ингель Л.Х.* Нелинейные тепловые волны от горизонтальных источников в нейтрально стратифицированной среде // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1982. Т. 18. № 3. С. 233–239.
11. *Баренблатт Г.И., Бенилов А.Ю.* Закономерности проникающей турбулентной конвекции в стратифицированной жидкости // *Океанология.* 1983. Т. 23. Вып. 5. С. 743–752.
12. *Вульфсон А.Н.* Автомодельность и распространение верхней границы конвективных термиков в нейтральной стратифицированной атмосфере, вызванное точечными, линейными и плоскими источниками тепла // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 1998. Т. 34. № 4. С. 557–564.
13. *Deardorff J.W.* Three-dimensional numerical study of the height and mean structure of a heated planetary boundary layer // *Boundary-Layer. Meteorol.* 1974. V. 7. № 1. P. 81–106.
14. *Tennekes H.* Model for dynamic of inversion above a convective boundary layer // *J. Atmosph. Sci.* 1973. V. 30. № 4. P. 558–567.
15. *Ogura Y., Phillips N.A.* Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere // *J. Atmosph. Sci.* 1962. V. 19. № 2. P. 173–179.
16. *Rudin W.* *Principles of Mathematical Analysis* // McGraw-Hill, 1964. = *Рудин У.* *Основы математического анализа.* М.: Мир, 1976. 319 с.
17. *Абрамович Г.Н., Гиринович Т.А., Крашенинников С.Ю. и др.* *Теория турбулентных струй.* М.: Наука, 1984. 715 с.
18. *Schmidt F.H.* On the diffusion of heated jets // *Tellus.* 1957. V. 9. № 3. P. 378–383.
19. *Turner J.S.* *Buoyancy Effects in Fluids.* Cambridge Univ. Press, 1973. = *Тернер Дж.* *Эффекты плавучести в жидкостях.* М.: Мир, 1977. 431 с.
20. *Баренблатт Г.И.* Сильное взаимодействие гравитационных волн и турбулентности // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1977. Т. 13. № 8. С. 845–849.
21. *Yu Hong-Zeng.* Transient plume influence in measurement of convective heat release rates of fast-growing fires using a large-scale fire products collector // *Trans. ASME. J. Heat Transfer.* 1990. V. 112. № 1. P. 186–191.
22. *Chen C.J., Rody W.* *Vertical turbulent buoyant jets: A review of experimental data.* N.Y.: Pergamon Press, 1980. 83 p.
23. *Vulfson N.I.* *Convective motions in a free atmosphere.* Jerusalem; Washington, 1964. 188 p.
24. *Вульфсон А.Н.* Приложение методов теории подобия и статистики Больцмана к построению функции распределения конвективных термиков по размерам в пограничном слое атмосферы // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 1997. Т. 33. № 6. С. 771–778.