

УДК 532.59 + 532.58

© 2001 г. И.В. СТУРОВА

КОЛЕБАНИЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В СЛОЕ ЛИНЕЙНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В линейной постановке в приближении Буссинеска решена плоская задача о движениях трехслойной жидкости, вызванных вибрациями кругового цилиндра. Цилиндр полностью помещен в среднем линейно стратифицированном слое, верхний и нижний слои являются однородными и ограничены жесткими горизонтальными стенками. Жидкость предполагается идеальной и несжимаемой. Выполнены расчеты коэффициентов присоединенных масс и демпфирования в зависимости от частоты колебания цилиндра и толщин слоев.

Задачи генерации движений периодически колеблющимся телом в однородной и стратифицированной жидкости интенсивно изучаются уже в течение длительного времени. Достаточно полно рассмотрен случай однородной жидкости со свободной поверхностью. Методы решения этих задач в значительной степени используют потенциальный характер движения жидкости и могут быть распространены на случай стратифицированной жидкости лишь при наличии слоя постоянной плотности и погружения тела полностью в этом слое. Так, например, решение плоской задачи о колебаниях кругового цилиндра, расположенного под пикноклином, дано в [1]. При этом резкий пикноклин моделируется двухслойной жидкостью, а плавный – трехслойной жидкостью с линейно стратифицированным слоем и однородными верхним и нижним слоями.

Значительно более сложным является решение задачи о колебаниях тела, частично или полностью расположенного в слое переменной плотности. В настоящее время имеется большое количество теоретических и экспериментальных исследований волновых картин, возникающих при колебаниях тел в стратифицированной жидкости (см., например, [2–4] и библиографию в них), однако теоретические решения, учитывающие условие непротекания на поверхности тела, очень немногочисленны [5–7]. Все они получены для безграничной однородно стратифицированной жидкости. Наиболее полным является решение [7] для колебаний эллиптического цилиндра под произвольным углом. Определены гидродинамические нагрузки, действующие на цилиндр. Экспериментальное подтверждение этих результатов для горизонтальных колебаний кругового цилиндра представлено в [8].

К задаче о генерации волн колеблющимся телом близко примыкает задача о рассеянии периодической внутренней волны на неподвижном теле. В настоящее время известны лишь две теоретические работы [9, 10], причем в обеих рассмотрено тело нулевого объема (вертикальный барьер) и слой линейно стратифицированной жидкости между жесткими горизонтальными стенками.

В данной работе предложен метод решения плоской задачи о малых колебаниях кругового горизонтального цилиндра, расположенного полностью в слое линейно стратифицированной жидкости.

1. Постановка задачи. Рассматривается идеальная несжимаемая жидкость, ограниченная сверху и снизу горизонтальными твердыми стенками. Жидкость состоит из

трех слоев: однородных верхнего и нижнего и стратифицированного среднего слоя. Волновые движения вызваны в первоначально покоящейся жидкости малыми колебаниями кругового цилиндра радиуса a с частотой ω и амплитудами $\eta_{1,2}$ соответственно для горизонтальных и вертикальных осцилляций.

Предполагается, что жидкость занимает область $|x| < \infty$, $-H < y < H_1$, где x и y – соответственно горизонтальная и вертикальная координаты. Начало координат расположено на невозмущенной границе раздела между верхним и средним слоями. В невозмущенном состоянии распределение плотности $\rho_0(y)$ имеет вид

$$\rho_0(y) = \begin{cases} \rho_1 & (0 < y < H_1) \\ \rho_1(1 - \varepsilon y / H_2) & (-H_2 < y < 0) \\ \rho_2 = \rho_1(1 + \varepsilon) & (-H < y < -H_2) \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ и $H_1, H_2, H_3 = H - H_2$ – глубины верхнего, среднего и нижнего слоев соответственно.

Считая возмущенное движение жидкости периодическим, давление в жидкости запишем в виде

$$P^{(s)}(x, y, t) = \rho_1 \operatorname{Re}[\exp(i\omega t) \sum_{j=1}^2 \eta_j p_j^{(s)}(x, y)]$$

где верхний индекс $s = 1, 2, 3$ соответствует верхнему, среднему и нижнему слоям. В среднем слое $p_j^{(2)}(x, y)$ в приближении Буссинеска удовлетворяет уравнению

$$\Delta p_j^{(2)} = \frac{N^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 p_j^{(2)}}{\partial x^2} \quad (-H_2 < y < 0), \quad N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_1} \frac{d\rho_0}{dy}} = \sqrt{\frac{\varepsilon g}{H_2}} \quad (1.1)$$

где N – частота Вайсяля – Брента, g – ускорение силы тяжести. В однородных по плотности слоях функции $p_j^{(1)}$ и $p_j^{(3)}$ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta p_j^{(1)} = 0 \quad (0 < y < H_1), \quad \Delta p_j^{(3)} = 0 \quad (-H < y < -H_2) \quad (1.2)$$

На верхней и нижней границах жидкости ставятся условия непротекания, а на границах раздела слоев – условия согласования

$$\partial p_j^{(1)} / \partial y = 0 \quad (y = H_1), \quad \partial p_j^{(3)} / \partial y = 0 \quad (y = -H) \quad (1.3)$$

$$p_j^{(1)} = p_j^{(2)}, \quad \beta^2 \frac{\partial p_j^{(1)}}{\partial y} = -\frac{\partial p_j^{(2)}}{\partial y} \quad (y = 0) \quad (1.4)$$

$$p_j^{(2)} = p_j^{(3)}, \quad \beta^2 \frac{\partial p_j^{(3)}}{\partial y} = -\frac{\partial p_j^{(2)}}{\partial y} \quad (y = -H_2) \quad (1.5)$$

где $\beta^2 = N^2 / \omega^2 - 1$. В дальнейшем поле следует потребовать выполнения условия излучения.

На круговом контуре $S: x^2 + (y + h)^2 = a^2$, расположенном в среднем слое, ставится условие непротекания

$$\frac{n_1}{\omega^2} \frac{\partial p_j^{(2)}}{\partial x} + \frac{n_2}{\omega^2 - N^2} \frac{\partial p_j^{(2)}}{\partial y} = n_j \quad (x, y \in S) \quad (1.6)$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ – внутренняя нормаль к контуру S , h – отстояние центра цилиндра от верхней границы среднего слоя.

Гидродинамические силы $F_{1,2}$, действующие на колеблющийся цилиндр без учета гидростатического члена, определяются путем интегрирования давления по контуру S

$$F_k = \sum_{j=1}^2 \eta_j \tau_{kj} \quad (k = 1, 2)$$

$$\tau_{kj} = \omega^2 \mu_{kj} - i\omega \lambda_{kj} = \rho_1 \int_S p_j^{(2)} n_k ds \quad (1.7)$$

где μ_{kj} и λ_{kj} – коэффициенты присоединенных масс и демпфирования соответственно.

Для решения поставленной задачи используем метод особенностей. Вводя неизвестное распределение источников $\sigma_j(x)$ на контуре S , давление в среднем слое жидкости представим в виде

$$p_j^{(2)}(x) = \int_S \sigma_j(\xi) G^{(2)}(x, \xi) ds, \quad x = (x, y), \quad \xi = (\xi, \eta)$$

Здесь $G^{(2)}(x, \xi)$ – функция Грина в среднем слое, определяемая следующей системой:

$$\Delta G^{(1)} = 0 \quad (0 < y < H_1), \quad \Delta G^{(3)} = 0 \quad (-H < y < -H_2)$$

$$\frac{\partial^2 G^{(2)}}{\partial y^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 G^{(2)}}{\partial x^2} = 4\pi\beta^2 \delta(x - \xi) \quad (-H_2 < y < 0) \quad (1.8)$$

с граничными условиями, аналогичными (1.3)–(1.5), и условием излучения в дальнем поле, δ – дельта-функция Дирака.

Используя теорему Грина, условие непротекания на поверхности цилиндра (1.6) приводит к интегральному уравнению

$$2\pi\sigma_j(x) + \rho v \int_S \sigma_j(\xi) \left(n_1 \frac{\partial G^{(2)}}{\partial x} + \frac{\omega^2 n_2}{\omega^2 - N^2} \frac{\partial G^{(2)}}{\partial y} \right) ds = \omega^2 n_j \quad (1.9)$$

где символы ρv означают интеграл в смысле главного значения. Для однородно стратифицированной жидкости граничное интегральное уравнение было получено ранее в [11], а для произвольной устойчиво стратифицированной жидкости без учета приближения Буссинеска – в [12].

В данной задаче поведение решения существенно зависит от частоты колебания цилиндра. При $\omega < N$ ($\beta^2 > 0$) уравнения (1.1), (1.8) являются гиперболическими и колебания цилиндра возбуждают в жидкости внутренние волны. При $\omega > N$ ($\beta^2 < 0$) при всех вещественных значениях ω указанные уравнения являются эллиптическими и генерации волн не происходит. Далее рассмотрим эти случаи отдельно.

2. Случай $\omega < N$. Функцию Грина в среднем слое запишем в виде

$$G^{(2)} = 4i\pi\beta \sum_{l=1}^{\infty} \alpha(k_l) K(k_l, y) K(k_l, \eta) \exp(-ik_l |x - \xi|) \quad (2.1)$$

$$\alpha(k) = \frac{(1 + \beta^2 t_3^2)}{k(1 - \beta^2 t_1 t_3) D'(k)}, \quad K(k, \zeta) = \cos(k\beta\zeta) + \beta t_1 \sin(k\beta\zeta)$$

$$t_1 = \text{th } kH_1, \quad t_3 = \text{th } kH_3, \quad D(k) = (\beta^2 t_1 t_3 - 1) \text{tg}(k\beta H_2) - \beta(t_1 + t_3)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по k . Значения k_l ($k_1 < k_2 < \dots$) являются вещественными положительными корнями уравнения $D(k) = 0$ и представляют собой волновые числа внутренних волн. В рассматриваемой трехслойной жидкости дисперсионное соотношение для внутренних волн имеет вид

$$\text{tg}(k\beta H_2) = \frac{\beta(t_1 + t_3)}{\beta^2 t_1 t_3 - 1}$$

Явные зависимости волнового числа от частоты имеют место в двух частных случаях

$$H_1 = H_3 = 0: \quad k_l = \frac{l\pi\omega}{H_2\sqrt{N^2 - \omega^2}}$$

$$H_1, H_3 \rightarrow \infty:$$

$$k_l = \frac{1}{H_2} \begin{cases} \frac{\omega}{\sqrt{N^2 - \omega^2}} \left[(l-1)\pi + \arctg \left(\frac{2\omega\sqrt{N^2 - \omega^2}}{N^2 - 2\omega^2} \right) \right] & (\omega < N/\sqrt{2}) \\ \pi(l-1/2) & (\omega = N/\sqrt{2}) \\ \frac{\omega}{\sqrt{N^2 - \omega^2}} \left[l\pi + \arctg \left(\frac{2\omega\sqrt{N^2 - \omega^2}}{N^2 - 2\omega^2} \right) \right] & (\omega > N/\sqrt{2}) \end{cases}$$

В общем случае при $l \rightarrow \infty$ $k_l \rightarrow l\pi/(\beta H_2)$.

В виде, аналогичном (2.1), функция Грина представлена в [10] при исследовании рассеяния внутренних волн на вертикальном барьере, установленном в канале, который заполнен линейно стратифицированной жидкостью.

Распределение источников $\sigma_j(x)$ необходимо задавать в виде непрерывных функций, так как использование точечных особенностей приводит к парадоксу бесконечных энергетических потерь [13]. Вводя полярную систему координат r, θ с началом в центре контура S , функции σ_j представим для горизонтальных и вертикальных колебаний в виде

$$\sigma_1(a, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin m\theta; \quad \sigma_2(a, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos m\theta \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в уравнение (1.9), последовательно умножая его на $\sin n\theta(\cos n\theta)$ и интегрируя по контуру S с учетом того, что для кругового цилиндра $n_1 = -\sin \theta$, $n_2 = -\cos \theta$, получим бесконечную систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов $a_m(b_m)$

$$a_n - \frac{a}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m A_{mn} = -\frac{\omega^2}{2\pi} \delta_{1n}, \quad b_n - \frac{a}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} b_m B_{mn} = -\frac{\omega^2}{2\pi} \delta_{1n} \quad (2.3)$$

$$A_{mn} = \int_0^{2\pi} \sin m\tau \int_0^{2\pi} \sin n\theta \left(\sin \theta \frac{\partial G^{(2)}}{\partial x} - \frac{\cos \theta}{\beta^2} \frac{\partial G^{(2)}}{\partial y} \right) d\theta d\tau$$

$$B_{mn} = \int_0^{2\pi} \cos m\tau \int_0^{2\pi} \cos n\theta \left(\sin \theta \frac{\partial G^{(2)}}{\partial x} - \frac{\cos \theta}{\beta^2} \frac{\partial G^{(2)}}{\partial y} \right) d\theta d\tau$$

$$\tau = \arctg \frac{\xi}{\eta + h}$$

где δ_{1n} – символ Кронекера.

Ввиду громоздкости выражений для A_{mn}, B_{mn} опишем лишь основные приемы их вычисления. Двойные интегралы, входящие в выражения для мнимых частей A_{mn}, B_{mn} , определяются аналитически с использованием следующих табличных интегралов [14]:

$$\int_0^{2\pi} \cos mz \cos(\chi\beta \cos z) \cos(\chi \sin z) dz = \pi I_m^+ \cos m\phi J_m(q) \quad (2.4)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mz \sin(\chi\beta \cos z) \cos(\chi \sin z) dz = \pi I_m^- \sin m\phi J_m(q)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mz \cos(\chi\beta \cos z) \sin(\chi \sin z) dz = \pi I_m^- \cos m\phi J_m(q)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mz \sin(\chi\beta \cos z) \sin(\chi \sin z) dz = \pi I_m^+ \sin m\phi J_m(q)$$

$$\phi = \arctg \beta, \quad q = \frac{\chi}{\Omega}, \quad \chi = ak, \quad \Omega = \frac{\omega}{N}, \quad I_m^\pm = 1 \pm (-1)^m$$

где J_m – функции Бесселя первого рода порядка m .

Основные трудности возникают при вычислении двойных интегралов, входящих в выражения для действительных значений A_{mn} , B_{mn} . При их вычислении использованы разложения [14]

$$\cos[q \sin(\tau + \phi)] = J_0(q) + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} J_{2\nu}(q) \cos[2\nu(\tau + \phi)] \quad (2.5)$$

$$\sin[q \sin(\tau + \phi)] = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} J_{2\nu+1}(q) \sin[(2\nu+1)(\tau + \phi)]$$

При суммировании в (2.5) учитывалось такое количество членов ряда, которое позволяло обеспечить относительную погрешность вычисления двойных интегралов для каждой волновой моды в A_{mn} и B_{mn} порядка 10^{-5} .

При численном решении бесконечных систем линейных уравнений (2.3) используется метод редукции и учитывается только конечное число членов.

После определения a_m и b_m можно найти все характеристики движения жидкости. В дальнейшем поле течения представляет собой суперпозицию бесконечного числа волновых мод. Так, например, давление в среднем слое при $x \rightarrow \pm \infty$ имеет вид

$$p_1^{(2)} = \mp \sum_{l=1}^{\infty} E_1(k_l) K(k_l, y) \exp(\mp i k_l x)$$

$$p_2^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} E_2(k_l) K(k_l, y) \exp(\mp i k_l x)$$

$$E_1(k) = 4\pi^2 a \beta \alpha(k) \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_m(q) (I_m^- C_m + I_m^+ S_m)$$

$$E_2(k) = 4\pi^2 a \beta \alpha(k) \sum_{m=1}^{\infty} b_m J_m(q) (I_m^+ C_m + I_m^- S_m)$$

$$C_m = (h_c - \beta t_1 h_s) \cos m\phi, \quad S_m = (h_s + \beta t_1 h_c) \sin m\phi$$

$$h_c = \cos k\beta h, \quad h_s = \sin k\beta h$$

Давление в верхнем и нижнем слоях можно определить, используя вид собственных функций данной задачи, представленный, например, в [1].

Гидродинамическая нагрузка, согласно (1.7), равна

$$\omega^2 \mu_{11} - i\omega \lambda_{11} = -\rho_1 a^2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_0^{2\pi} \sin m\tau \int_0^{2\pi} \sin \theta G^{(2)} d\theta d\tau \quad (2.6)$$

$$\omega^2 \mu_{22} - i\omega \lambda_{22} = -\rho_1 a^2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_0^{2\pi} \cos m\tau \int_0^{2\pi} \cos \theta G^{(2)} d\theta d\tau$$

Недиагональные коэффициенты гидродинамической нагрузки для кругового цилиндра равны нулю.

Известно приближенное решение данной задачи, в котором коэффициенты a_m, b_m заимствуются из решения для безграничной однородной жидкости: $a_1 = b_1 = -\omega^2/(2\pi)$, $a_m = b_m = 0$ ($m \geq 2$). В этом случае для определения коэффициентов демпфирования используется только мнимая часть функции Грина (2.1) и с учетом (2.4) интегрирование двойных интегралов в (2.6) может быть выполнено аналитически. Для слоя линейно стратифицированной жидкости, заключенного между жесткими горизонтальными стенками, приближенное решение дано в [13]. Однако это приближение, хорошо зарекомендовавшее себя при исследовании поверхностных волн, не дает удовлетворительного результата при определении гидродинамических нагрузок на тело, колеблющееся в линейно стратифицированной жидкости. Наиболее наглядно это можно продемонстрировать на примере безграничной однородно стратифицированной жидкости. Полная гидродинамическая нагрузка, действующая в этом случае на круговой цилиндр, определена в [7]

$$\mu_{11} = \mu_{22} = 0, \quad \lambda_{11} = \lambda_{22} = \pi \rho_1 a^2 \sqrt{N^2 - \omega^2} \quad (\omega < N) \quad (2.7)$$

$$\mu_{11} = \mu_{22} = \pi \rho_1 a^2 \sqrt{\omega^2 - N^2} / \omega, \quad \lambda_{11} = \lambda_{22} = 0 \quad (\omega > N) \quad (2.8)$$

Приближенное решение [13] для диагональных коэффициентов демпфирования имеет вид

$$\lambda_{11} = 4\pi \rho_1 a^2 \omega^2 \sqrt{N^2 - \omega^2} / N^2 \quad (2.9)$$

$$\lambda_{22} = 4\pi \rho_1 a^2 (N^2 - \omega^2)^{3/2} / N^2 \quad (\omega < N)$$

Как видно, имеется существенное расхождение между (2.7) и (2.9).

3. Случай $\omega > N$. Для решения этой задачи можно также использовать интегральное уравнение (1.9) с функцией Грина

$$G^{(2)} = -2\gamma \left[\ln R - \int_0^\infty \frac{\cos k(x - \xi)}{kT(k)} Q(k) dk \right]$$

$$R^2 = (x - \xi)^2 + \gamma^2(y - \eta)^2, \quad \gamma^2 = -\beta^2$$

$$Q(k) = \text{ch}[k\gamma(y + \eta + H_2)](1 - \gamma^2 t_1 t_3) + \gamma \text{sh}[k\gamma(y + \eta + H_2)](t_3 - t_1) + \exp(-k\gamma H_2) \text{ch}[k\gamma(y - \eta)](1 - \gamma t_1)(1 - \gamma t_3)$$

$$T(k) = (1 + \gamma^2 t_1 t_3) \text{sh}(k\gamma H_2) + \gamma(t_1 + t_3) \text{ch}(k\gamma H_2)$$

Однако для кругового цилиндра более эффективно использование аналога метода мультипольных разложений. Применение этого метода в обычном виде представлено, например, в [1]. Ввиду громоздкости решения рассмотрим только случай горизонтальных колебаний цилиндра. В этом случае давление жидкости является нечетной функцией x , тогда как при вертикальных колебаниях цилиндра – четной функцией.

Решение задачи (1.1)–(1.5) ищем в виде

$$p_1^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} s_m a^m F_m \quad (0 < y < H_1)$$

$$p_1^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} s_m a^m (D_m + Q_m) \quad (-H_2 < y < 0) \quad (3.1)$$

$$p_1^{(3)} = \sum_{m=1}^{\infty} s_m a^m T_m \quad (-H < y < H_2)$$

N_1	10						20						30					
	100			100			100			200			300			300		
	M_{11}	L_{11}	$\text{Im } \alpha_m$	M_{11}	L_{11}	$\text{Im } \alpha_m$	M_{11}	L_{11}	$\text{Im } \alpha_m$	M_{11}	L_{11}	$\text{Im } \alpha_m$	M_{11}	L_{11}	$\text{Im } \alpha_m$	M_{11}	L_{11}	$\text{Im } \alpha_m$
N_2	100			100			100			200			300			300		
Ω	M_{11}	L_{11}	$\text{Im } \alpha_m$	M_{11}	L_{11}	$\text{Im } \alpha_m$	M_{11}	L_{11}	$\text{Im } \alpha_m$	M_{11}	L_{11}	$\text{Im } \alpha_m$	M_{11}	L_{11}	$\text{Im } \alpha_m$	M_{11}	L_{11}	$\text{Im } \alpha_m$
0,3	0,626	0,465	0,463	0,630	0,463	0,467	0,626	0,467	0,468	0,624	0,468	0,467	0,624	0,468	0,467	0,624	0,468	0,467
0,6	-0,036	0,452	0,453	-0,034	0,453	0,453	-0,034	0,453	0,453	-0,034	0,453	0,453	-0,034	0,453	0,454	-0,034	0,454	0,454
0,9	-0,079	0,141	0,142	-0,079	0,142	0,143	-0,079	0,143	0,143	-0,079	0,143	0,143	-0,079	0,143	0,143	-0,079	0,143	0,143
Ω	$\text{Re } \alpha_m$	$\text{Im } \alpha_m$	$\text{Re } \alpha_m$	$\text{Re } \alpha_m$	$\text{Im } \alpha_m$	$\text{Re } \alpha_m$	$\text{Re } \alpha_m$	$\text{Im } \alpha_m$	$\text{Re } \alpha_m$	$\text{Re } \alpha_m$	$\text{Im } \alpha_m$	$\text{Re } \alpha_m$	$\text{Re } \alpha_m$	$\text{Im } \alpha_m$	$\text{Re } \alpha_m$	$\text{Re } \alpha_m$	$\text{Im } \alpha_m$	$\text{Im } \alpha_m$
0,3	0,981	-0,929	-0,920	0,983	-0,920	-0,927	0,978	-0,927	-0,928	0,977	-0,927	-0,927	0,976	-0,928	0,976	0,976	-0,926	-0,926
	0,005	-0,002	-0,002	0,005	-0,002	-0,001	0,005	-0,001	-0,001	0,005	-0,001	-0,001	0,005	-0,001	0,005	0,005	-0,001	-0,001
	0,037	-0,118	-0,106	0,041	-0,106	-0,122	0,031	-0,122	-0,126	0,028	-0,122	-0,126	0,027	-0,126	0,027	0,027	-0,122	-0,122
0,6	0,581	-0,456	-0,455	0,585	-0,455	-0,453	0,581	-0,453	-0,452	0,580	-0,453	-0,452	0,581	-0,452	0,581	0,581	-0,452	-0,452
	0,004	0,002	0,002	0,004	0,002	0,002	0,004	0,002	0,003	0,004	0,002	0,003	0,004	0,003	0,004	0,004	0,003	0,003
	0,065	-0,018	-0,014	0,068	-0,014	-0,021	0,063	-0,021	-0,023	0,061	-0,021	-0,023	0,062	-0,023	0,062	0,062	-0,023	-0,023
0,9	0,547	-0,042	-0,043	0,551	-0,043	-0,040	0,550	-0,040	-0,039	0,549	-0,040	-0,039	0,549	-0,039	0,549	0,549	-0,039	-0,039
	0,014	0,075	0,077	0,017	0,077	0,079	0,014	0,079	0,079	0,013	0,079	0,079	0,013	0,079	0,013	0,013	0,079	0,079
	0,015	-0,156	-0,154	0,015	-0,154	-0,157	0,014	-0,157	-0,158	0,014	-0,157	-0,158	0,013	-0,158	0,013	0,013	-0,158	-0,158

$$F_m(x, y) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty k^{m-1} \operatorname{ch} k(y - H_1) \sin kx A(k) dk$$

$$D_m(x, y) = \frac{1}{(m-1)!} \begin{cases} \int_0^\infty k^{m-1} e^{-\gamma k(y+h)} \sin kx dk & (y+h > 0) \\ (-1)^{m+1} \int_0^\infty k^{m-1} e^{\gamma k(y+h)} \sin kx dk & (y+h < 0) \end{cases}$$

$$Q_m(x, y) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty k^{m-1} [B(k)e^{\gamma k(y+h)} + C(k)e^{-\gamma k(y+h)}] \sin kx dk$$

$$T_m(x, y) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty k^{m-1} \operatorname{ch} k(y + H) \sin kx W(k) dk$$

Функции $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $W(k)$ определяются из условий согласования давления на границах слоев (1.4), (1.5) и равны

$$A(k) = \frac{Z_1(k)}{\operatorname{ch} kH_1 Z_2(k)}, \quad B(k) = \frac{(1 - \gamma t_1)}{2Z_2(k)} Z_1(k) e^{-\gamma kh}$$

$$C(k) = \frac{(1 - \gamma t_3)}{2Z_2(k)} Z_3(k) e^{\gamma k(h - H_2)}, \quad W(k) = \frac{Z_3(k)}{\operatorname{ch} kH_3 Z_2(k)}$$

$$Z_1(k) = (1 + \gamma t_3) e^{\gamma k(H_2 - h)} - (-1)^m (1 - \gamma t_3) e^{\gamma k(h - H_2)}$$

$$Z_2(k) = \gamma(t_1 + t_3) \operatorname{ch}(\gamma kH_2) + (1 + \gamma^2 t_1 t_3) \operatorname{sh}(\gamma kH_2)$$

$$Z_3(k) = (1 - \gamma t_1) e^{-\gamma kh} - (-1)^m (1 + \gamma t_1) e^{\gamma kh}$$

Неизвестные постоянные s_m определяются из граничного условия (1.6) на контуре S . Это условие сводится к системе линейных уравнений после последовательного умножения на $\sin n\theta$ и интегрирования по θ от 0 до 2π . Те однократные интегралы, которые не удается проинтегрировать аналитически, вычисляются численно.

После определения s_m можно вычислить давление на контуре S и выполнить интегрирование (1.7). При $\omega > N$ гидродинамическая нагрузка состоит только из присоединенной массы

$$\mu_{11} = \frac{a\rho_1}{\omega^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{s_m}{(m-1)!} (X_m + Y_m), \quad \mu_{21} = 0$$

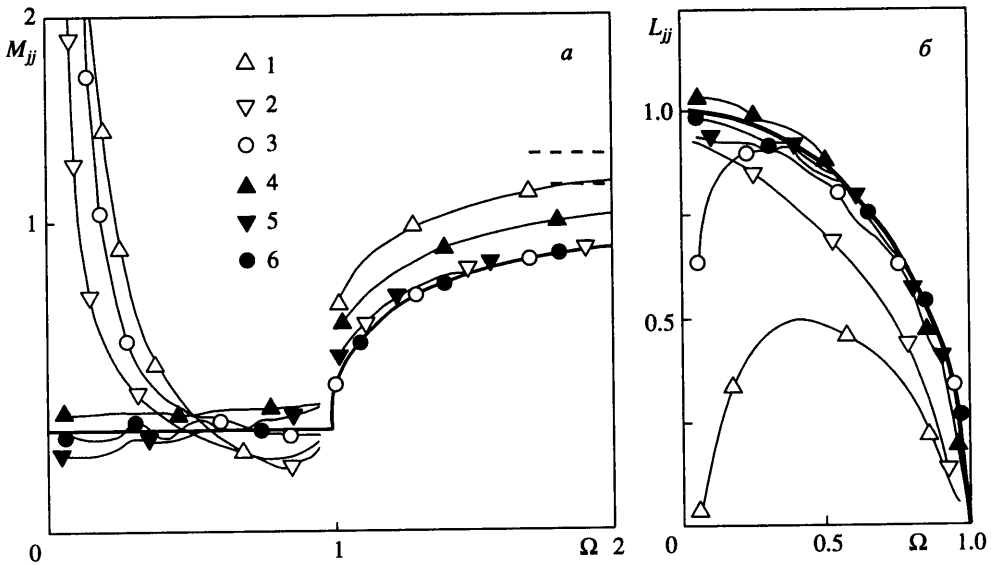
$$X_m = 2\Gamma(m) J_m^- \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta}{(\gamma^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^{m/2}} \sin \left(m \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \theta}{\gamma} \right) d\theta$$

$$Y_m = \frac{\pi}{\Omega^m} \left[\frac{1}{(1 - \gamma)^m} + \frac{1}{(1 + \gamma)^m} \right] \int_0^\infty \chi^{m-1} J_m(q) [B(\chi) + C(\chi)] d\chi$$

где $\Gamma(m)$ – гамма-функция.

В предельном случае высокочастотных колебаний цилиндра исходная задача сводится к движению цилиндра в слое постоянной плотности полной толщины $H_1 + H$ благодаря приближению Буссинеска. При $\omega \rightarrow \infty$ ($\gamma \rightarrow 1$) используемый метод сводится к обычному методу мультипольных разложений.

4. Численные результаты. При $\omega < N$ значительный интерес представляет исследование влияния на точность результатов числа учитываемых членов N_1 в разложениях (2.2) и количество мод внутренних волн N_2 в функции Грина (2.1). В таблице пред-



Зависимость коэффициентов присоединенной массы M_{jj} (а) и демпфирования L_{jj} (б) от Ω : $(H_1/a, h_2, H_3/a, d) = (0, 5, 0, 2)$ – кривые 1, 4; $(100, 5, 100, 2)$ – кривые 2, 5; $(0, 50, 0, 25)$ – кривые 3, 6. Кривые 1, 2, 3 соответствуют $j = 1$, кривые 4, 5, 6 – $j = 2$, сплошные кривые – решениям (2.7), (2.8)

ставлены безразмерные коэффициенты присоединенной массы M_{11} и демпфирования L_{11} для горизонтальных колебаний при $H_1 = H_3 = 0$, $h_2 \equiv H_2/a = 5$, $d \equiv h/a = 2$ и трех значениях безразмерной частоты $\Omega = 0,3; 0,6; 0,9$. Введены следующие обозначения:

$$M_{jj} = \frac{\mu_{jj}}{\pi \rho_1 a^2}, \quad L_{jj} = \frac{\lambda_{jj}}{\pi \rho_1 a^2 N} \quad (j = 1, 2)$$

В таблице представлены также комплексные значения первых трех коэффициентов $\alpha_m = -2\pi a_m / \omega^2$. Видно, что имеется достаточно хорошая сходимость результатов с ростом N_1 и N_2 . Анализ величин α_1 показывает их существенное отличие от используемого в приближенном решении (разд. 2). Как вещественная, так и мнимая части α_1 зависят от частоты и при некоторых частотах эти величины близки по абсолютной величине. Модули двух следующих коэффициентов разложения $|\alpha_2|$ и $|\alpha_3|$ по порядку величины близки к $|\alpha_1|$.

Необходимость учитывать большое число мод внутренних волн при исследовании распространения их в слое линейно стратифицированной жидкости отмечается также в [9]. Это можно объяснить отсутствием вязкости в рассматриваемой жидкости. Введение вязкости при анализе волновых движений должно привести к значительно более быстрой сходимости решения с ростом N_2 .

Гидродинамические нагрузки для горизонтальных и вертикальных колебаний цилиндра представлены на фигуре. В расчетах при $\omega < N$ использованы значения $N_1 = 20$ и $N_2 = 200$, при $\omega > N$ учитывалось 15 членов в разложении (3.1). Гидродинамические нагрузки существенно зависят от типа колебания, особенно при малых частотах. Значительный рост присоединенной массы цилиндра при низкочастотных горизонтальных колебаниях можно объяснить явлением блокировки. С увеличением толщины стратифицированного слоя полученные численные решения приближаются к зависимостям (2.7), (2.8). Это особенно заметно при вертикальных колебаниях ци-

линдра. Существенно сказывается на гидродинамических характеристиках наличие достаточно протяженных по высоте однородных слоев (ср. кривые 1, 4 и 2, 5).

При наличии однородных слоев и $\omega > N$ присоединенные массы для горизонтальных и вертикальных колебаний цилиндра в представленных случаях практически совпадают. Предельные значения M_{jj} при $\omega \rightarrow \infty$ существенно отличаются от единицы только для параметров $H_1 = H_3 = 0$, $h_2 = 5$, $d = 2$. Эти значения $M_{11} = 1,332$ и $M_{22} = 1,165$ показаны на фигуре штриховыми прямыми.

Заключение. Для трехслойной жидкости с линейно стратифицированным средним слоем предложен метод расчета волновых движений, возникающих при малых гармонических колебаниях кругового цилиндра в среднем слое. Определены гидродинамические нагрузки, действующие на тело. Показана существенная зависимость этих величин от частоты и типа колебаний, а также от толщин слоев. Аналогичная методика может быть применена и для исследования колебаний сферы в стратифицированной жидкости.

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта № 1-2000 СО РАН и гранта № 00-15-96162 программы "Ведущие научные школы" РФФИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стурова И.В. Задачи радиации и дифракции для кругового цилиндра в стратифицированной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 4. С. 81–94.
2. Nicolaou D., Liu R., Stevenson T.N. The evolution of thermocline waves from an oscillatory disturbance // J. Fluid Mech. 1993. V. 254. P. 401–416.
3. Ильиных Ю.С., Смирнов С.А., Чашечкин Ю.Д. Возбуждение гармонических внутренних волн в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 6. С. 141–148.
4. Sutherland B.R., Dalziel S.B., Hughes G.O., Linden P.F. Visualization and measurement of internal waves by 'synthetic schlieren'. Pt 1. Vertically oscillating cylinder // J. Fluid Mech. 1999. V. 390. P. 93–126.
5. Larsen L.H. Oscillations of a neutrally buoyant sphere in a stratified fluid // Deep-Sea Res. 1969. V. 16. № 6. P. 587–603.
6. Lai R.Y.S., Lee C.-M. Added mass of a spheroid oscillating in a linearly stratified fluid // Intern. J. Eng. Sci. 1981. V. 19. № 11. P. 1411–1420.
7. Hurley D.G. The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Pt. 1. Inviscid solution // J. Fluid Mech. 1997. V. 351. P. 105–118.
8. Ermanyuk E.V. The use of impulse response functions for evaluation of added mass and damping coefficient of a circular cylinder oscillating in linearly stratified fluid // Experiments in Fluids. 2000. V. 28. № 2. P. 152–159.
9. Larsen L.H. Internal waves incident upon a knife edge barrier // Deep-Sea Res. 1969. V. 16. № 5. P. 411–419.
10. Robinson R.M. The effects of a vertical barrier on internal waves // Deep-Sea Res. 1969. V. 16. № 5. P. 421–429.
11. Городцов В.А., Теодорович Э.В. Излучение внутренних волн при быстром горизонтальном движении цилиндров и шаров // Изв. РАН. МЖГ. 1982. № 6. С. 94–100.
12. Wu J.-h., Wu X.-h., Li S.-m. A theory of wave diffraction and radiation by a large body in stratified ocean. III: Boundary element method // J. Hydrodyn. Ser. A. 1990. V. 5. № 1. P. 74–80.
13. Городцов В.А., Теодорович Э.В. Энергетика генераторов гармонических внутренних волн // ПМТФ. 1986. № 4. С. 53–59.
14. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред.: М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.