

УДК 532.529:532.592

© 2001 г. И.К. ГИМАЛТДИНОВ, Р.И. НИГМАТУЛИН, В.Ш. ШАГАПОВ

**ЭВОЛЮЦИЯ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТИ,  
СОДЕРЖАЩЕЙ ЗОНУ ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ**

Рассмотрены особенности динамики волн давления в жидкости при наличии в ней области, занятой жидкостью с пузырьками. Установлено, что если в случае акустических волн завеса в основном оказывает экранирующее воздействие, то для нелинейных волн происходит некоторое ослабление такого свойства. А в некоторых случаях из-за проявления нелинейных эффектов и радиальной инерции пузырьковой жидкости [1] в завесе может происходить некоторое усиление амплитуды исходного сигнала. В работе показано, что, покрывая твердую стенку пузырьковой завесой, подбирая соответствующим образом радиус пузырьков и их объемное содержание, можно добиться, во-первых, отсутствия отраженного от стенки сигнала и, во-вторых, существенного снижения воздействия волны на стенку.

Введение в жидкость небольшого количества газа в виде распределенных по объему жидкости газовых пузырей кардинально меняет ее акустические свойства. В частности, происходит аномальное снижение величины скорости распространения звуковых возмущений и усиление диссипативных механизмов. Все это позволяет использовать пузырьковые завесы для гашения импульсов давления в жидкости.

В большинстве теоретических и экспериментальных работ [1–4], связанных с влиянием пузырьковых завес на эволюцию волн, в основном изучение проводилось применительно к ситуации, когда волна давления, сформировавшись в газовой фазе, входит в область пузырьковой жидкости, граничащую с областью "чистой" жидкости. Особенность динамики прохождения волн из газа в пузырьковую жидкость связана с тем, что пузырьковая жидкость акустически более мягкая, чем чистая жидкость, в то же время значительно более жесткая, чем газ. Когда волна давления, сформировавшаяся в чистой жидкости, проникает в пузырьковую жидкость, реализуется совершенно иная картина. Хотя некоторые качественные закономерности для такого случая следуют из общей теории акустики пузырьковых жидкостей, к настоящему времени в литературе практически отсутствуют работы с численным анализом. Именно такая ситуация в наиболее общем виде рассмотрена в данной работе для акустических и нелинейных волн. В частности, изучена эволюция сигнала в жидкости при прохождении его через пузырьковую завесу, находящуюся между двумя параллельными плоскостями, а также при отражении от жесткой стенки, покрытой слоем пузырьковой завесы. Для акустических волн рассмотрен случай, когда длина волны (и в том числе протяженность импульса конечной длительности) меньше толщины пузырьковой завесы.

**1. Основные уравнения.** Рассмотрим задачу об эволюции плоскоодномерных волн при прохождении через завесу с газовыми пузырьками одинакового радиуса, расположенную в исходном невозмущенном состоянии между двумя плоскостями с координатами  $x_{01}$  и  $x_{02}$  ( $x_{02} - x_{01} = l_0$  толщина завесы).

Для описания движения в завесе примем систему, состоящую из уравнений масс,

числа пузырьков, импульсов и давления в пузырьках в односкоростном приближении

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \rho_i)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(n\nu)}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial p_l}{\partial x} = 0$$

$$\frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma-1)}{a_0} q, \quad w = \frac{da}{dt} \quad (1.1)$$

$$\alpha_l + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = 4/3\pi a^3 n, \quad \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \rho = \rho_g + \rho_l \quad (1.2)$$

где  $a$  – радиус пузырьков,  $\gamma$  – показатель адиабаты для газа,  $p_i$  – давление фаз,  $\rho_i^0$  – истинные плотности фаз,  $\alpha_i$  – объемные содержания фаз,  $q$  – интенсивность теплообмена,  $n$  – число пузырьков в единице объема,  $w$  – радиальная скорость пузырьков. Нижними индексами  $i = l, g$  отмечены параметры жидкой и газовой фаз.

В соответствии с уточнением, предложенным в [5], будем полагать:  $w = w_R + w_A$ , где  $w_R$  описывается уравнением Рэлея – Ламба

$$a_0 \frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2} w_R^2 + 4\nu_l \frac{w_R}{a} = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0} \quad (1.3)$$

Здесь  $\nu_l$  – вязкость жидкости. Добавка  $w_A$  определяется из решения задачи о сферической разгрузке на сфере радиуса  $a$  в несущей жидкости в акустическом приближении

$$w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}} \quad (1.4)$$

Будем полагать, что жидкость является акустически сжимаемой, а газ калорически совершенным

$$p_l = p_0 + C_l^2 (\rho_l^0 - \rho_{l0}^0), \quad p_g = \rho_g^0 R T_g' \quad (1.5)$$

Здесь  $R$  – газовая постоянная, индексами 0 внизу снабжены параметры, относящиеся к начальному невозмущенному состоянию, а штрихами наверху микропараметры в газовой фазе, зависящие от расстояния от центра пузырька.

Интенсивность теплообмена  $q$  можно определить на основе дифференциального уравнения теплопроводности (см. ниже) или приближенной формулой, определяемой разностью средних температур газа и жидкости.

В случае линейных волн для учета теплообмена запишем уравнение теплопроводности внутри пузырьков и систему граничных условий в линейном приближении

$$\rho_{g0}^0 c_g \frac{\partial T_g'}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_g r^2 \frac{\partial T_g'}{\partial r} \right) + \frac{\partial p_g}{\partial t}, \quad (r < a_0) \quad (1.6)$$

$$T_g' = T_0 \quad (r = a_0) \quad \frac{\partial T_g'}{\partial r} = 0 \quad (r = 0) \quad q = -\lambda_g \left( \frac{\partial T_g'}{\partial r} \right)_{a_0}$$

где  $c_g$  – теплоемкость газовой фазы при постоянном давлении,  $\lambda_g$  – коэффициент теплопроводности газовой сферы.

При описании нелинейных волн в пузырьковой жидкости тепловой поток  $q$  задается приближенным конечным соотношением

$$q = \text{Nu} \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a} \quad (1.7)$$

Здесь  $T_0 = \text{const}$  – температура жидкости,  $\text{Nu}$  – число Нуссельта, зависящее в общем случае от истории деформации пузырьков. Для приближенного описания нелинейных

волн число Нуссельта зададим в виде [1]

$$\text{Nu} = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}}, & \text{Pe} \geq 100, \\ 10, & \text{Pe} < 100, \end{cases} \quad \text{Pe} = 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{\kappa_g}, \quad \kappa_g = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g} \quad (1.8)$$

С учетом уравнения состояния и неразрывности для температуры газа в пузырьках можно получить

$$\frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^3 \quad (1.9)$$

Принятая система уравнений позволяет адекватно описывать динамику волн с достаточно "крутыми" участками, когда сжатие пузырьков определяется не только эффектами радиальной инерции несущей жидкости, но и акустической разгрузкой на пузырьках и, следовательно, сжимаемостью жидкости. Кроме того, из этой математической модели в частном случае  $\alpha_g = 0$  следует волновое уравнение для акустически сжимаемой жидкости. Это обстоятельство позволяет использовать сквозные методы расчета.

**2. Акустические волны.** При рассмотрении акустических волн для описания движения в завесе, а также в области чистой жидкости используем линеаризованную систему, полученную на основе уравнений (1.1)–(1.9).

Пусть волновой импульс падает слева на завесу ( $x < 0$ ). При взаимодействии волны с завесой можно выделить три характерных этапа. Первый этап – прохождение волны через левую границу ( $x = 0$ ) из чистой жидкости в пузырьковую жидкость. Вторым этапом – распространение волны в завесе до правой ее границы ( $x = l_0$ ). И наконец, третий этап – прохождение волны через правую границу завесы. Полагая протяженность импульса значительно меньше ширины завесы, при прохождении волны через одну из границ влиянием другой границы будем пренебрегать. Следовательно, при нахождении коэффициентов отражения и прохождения через границы завесы область, занятую пузырьковой и чистой жидкостью ( $x < 0$ ,  $x > l_0$ ), будем рассматривать как полубесконечную. Поскольку произвольный волновой импульс в линейной теории может быть представлен как суперпозиция гармонических волн, выведем условия отражения для таких возмущений. Для волны, падающей на границу  $x = 0$ , в чистой жидкости будем полагать, что движение при  $x < 0$  определяется наложением двух волн: падающей и отраженной

$$p^{(0)} = A_p^{(0)} \exp[i(Kx - \omega t)], \quad v^{(0)} = A_v^{(0)} \exp[i(Kx - \omega t)] \quad (2.1)$$

$$p^R = A_p^R \exp[i(-Kx - \omega t)], \quad v^R = A_v^R \exp[i(-Kx - \omega t)] \quad (2.2)$$

где ( $K = \omega/C_l$ ) – волновое число в области чистой жидкости;  $p^j$  и  $v^j$  ( $j = 0, R$ ) – возмущения давления и скорости. В пузырьковой завесе ( $x > 0$ ) движение определяется лишь одной, прошедшей волной

$$p^G = A_p^G \exp[i(K_b x - \omega t)], \quad v^G = A_v^G \exp[i(K_b x - \omega t)] \quad (2.3)$$

Здесь  $K_b$  – волновое число в пузырьковой жидкости, зависящее от частоты возмущений, которое определяется из дисперсионного соотношения для системы уравнений (1.1)–(1.9)

$$\left( \frac{K_b}{\omega} \right)^2 = C^{-2} + 3\alpha_{g0}\alpha_{l0}\rho_{l0}^0\Psi^{-1}, \quad \Psi = \frac{3\gamma p_{g0}}{Q} - \frac{\rho_{l0}^0\omega^2 a_0^2}{\chi}$$

$$Q = 1 + \frac{3(\gamma - 1)(y \text{chth } y - 1)}{y^2}, \quad y = \left( \frac{-i\omega a_0^2}{\kappa_g} \right)^{1/2}, \quad \chi = 1 - i\omega t_A, \quad C = \frac{C_l}{1 - \alpha_{g0}}, \quad t_A = \frac{a_0}{\alpha_{g0}^{1/3} C_l}$$

При этом амплитуды возмущений давлений и скорости на основании уравнения движения связаны соотношениями

$$A_p^{(0)} = \rho_{l0}^0 C_l A_v^{(0)}, \quad A_p^R = -\rho_{l0}^0 C_l A_v^R \quad (x < 0) \quad (2.4)$$

$$A_p^G = \rho_0 \frac{\omega}{K_b} A_v^G \quad (x > 0)$$

При прохождении волны через границы завесы ( $x = 0$ ,  $x = l_0$ ) будем полагать давления и скорости по обеим сторонам границы равными. Из этих условий получим

$$A_p^{(0)} + A_p^R = A_p^G, \quad A_v^{(0)} + A_v^R = A_v^G \quad (2.5)$$

Для коэффициентов отражения  $N_{lb}$  и прохождения  $M_{lb}$  получим

$$N_{lb} = \left( 1 - \frac{\rho_{l0}^0 C_l}{\rho_0} \frac{K_b}{\omega} \right) \left( 1 + \frac{\rho_{l0}^0 C_l}{\rho_0} \frac{K_b}{\omega} \right)^{-1}$$

$$M_{lb} = N_{lb} + 1 \quad (2.6)$$

$$N_{lb} = \frac{A_p^R}{A_p^{(0)}}, \quad M_{lb} = \frac{A_p^G}{A_p^{(0)}} \quad (2.7)$$

Здесь индексы ( $lb$ ) у коэффициентов означают, что они соответствуют границе чистая жидкость – пузырьковая жидкость.

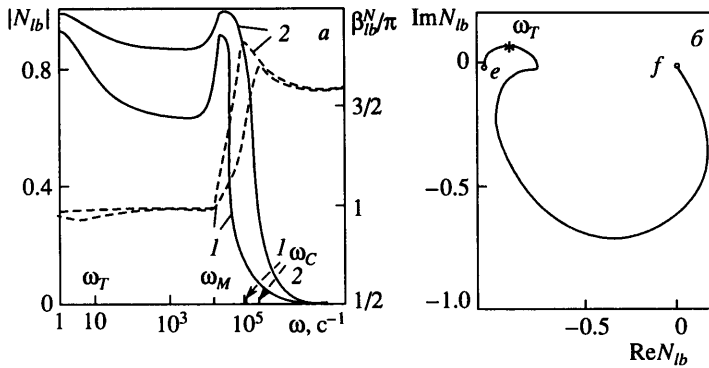
На фиг. 1 представлены рассчитанные по (2.6) зависимости модуля и аргумента коэффициента отражения  $N_{lb}$ ,  $\beta_{lb}^N = \arg N_{lb}$  от величины круговой частоты  $\omega$ , а также его годограф. Здесь и далее все расчеты проводились для водовоздушной смеси  $p_0 = 0,1$  МПа,  $T_0 = 300$  К, ( $\rho_{l0}^0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $C_l = 1500$  м/с,  $\gamma = 1,4$ ,  $\lambda_g = 2,6 \cdot 10^{-2}$  кг · м/(с<sup>2</sup> · град),  $c_g = 10^3$  м<sup>2</sup>/(с<sup>2</sup> · град),  $a_0 = 10^{-3}$  м. На графиках отмечены характерные частоты:  $\omega_M$  – собственная частота радиального колебания пузырьков,  $\omega_C$  – частота, определяющая правую границу полосы непрозрачности,  $\omega_T$  – характерная частота, разделяющая изотермический ( $\omega \ll \omega_T$ ) и адиабатический ( $\omega \gg \omega_T$ ) режимы поведения пузырьков. Эти частоты определяются выражениями

$$\omega_R = a_0^{-1} \left( \frac{3\gamma p_0}{\rho_{l0}^0} \right)^{1/2}, \quad \omega_T = \frac{x_g}{a_0^2}, \quad \omega_C = \omega_R \left( 1 + \left( \frac{\rho_{l0}^0 \alpha_{g0} C_l^2}{\gamma p_0} \right) \right)^{1/2}$$

Из приведенных графиков видно, что при  $\omega \ll \omega_T$  имеем  $|N_{(lb)}| \approx 1$ ,  $\beta_{(lb)}^N \approx \pi$  ( $N_{(lb)} \approx -1$ ). Следовательно, для низкочастотных гармонических волн, когда поведение газа в пузырьках изотермическое, для волн, падающих со стороны чистой жидкости, граница между чистой и пузырьковой жидкостью практически эквивалентна свободной поверхности. В случае малых объемных содержаний ( $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ ) в диапазоне частот  $\omega_T \leq \omega \leq \omega_M$  наблюдается значительная дисперсия для коэффициентов отражения и прохождения. Для достаточно больших частот ( $\omega > \omega_C$ ) следует  $N_{lb} \approx 0$ , т.е. падающая волна не терпит значительных изменений при переходе границы между чистой и пузырьковыми жидкостями.

При переходе волной границы между пузырьковой и чистой жидкостью коэффициенты отражения и прохождения имеют вид

$$N_{bl} = \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho_{l0}^0} \frac{\omega}{C_l K_b} \right) / \left( 1 + \frac{\rho_0}{\rho_{l0}^0} \frac{\omega}{C_l K_b} \right), \quad M_{bl} = N_{bl} + 1, \quad (x = l_0) \quad (2.8)$$



Фиг. 1. Зависимость модуля коэффициента отражения (сплошные) и его аргумента (штриховые) ( $|N_{lb}|$ ,  $|\beta_{lb}^N/\pi$ ) от круговой частоты  $\omega$  на границе между чистой и пузырьковой жидкостями при объемных содержаниях газа в завесе  $\alpha_{g0} = 10^{-3}$  и  $10^{-2}$  (кривые 1 и 2) (а). Годограф коэффициента отражения при  $\alpha_{g0} = 10^{-3}$  (б). Отметки *e* и *f* на годографе соответствуют равному ( $\omega \rightarrow 0$ ) и замороженному ( $\omega \rightarrow \infty$ ) значениям коэффициента отражения

На основе выражений (2.7), (2.8) рассмотрим динамику волны конечной длины, падающей на завесу с левой стороны ( $x < 0$ ). Тогда для проходящего через границу ( $x = 0$ ) и отраженного сигналов, используя преобразование Фурье, можем записать

$$p^R(0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty p^{(0)}(0, \tau) N_{lb} \exp[i\omega(t - \tau)] d\omega d\tau \quad (2.9)$$

$$p^G(0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty p^{(0)}(0, \tau) M_{lb} \exp[i\omega(t - \tau)] d\omega d\tau \quad (2.10)$$

Для волны, распространяющейся в пузырьковой завесе, эволюция сигнала описывается выражением

$$p_b(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty p^G(0, \tau) \exp[i\omega(t - \tau)] \exp(iK_b x) d\omega d\tau \quad (2.11)$$

При переходе через правую границу ( $x = l_0$ ) пузырьковой завесы для отраженной и проходящей волн имеем

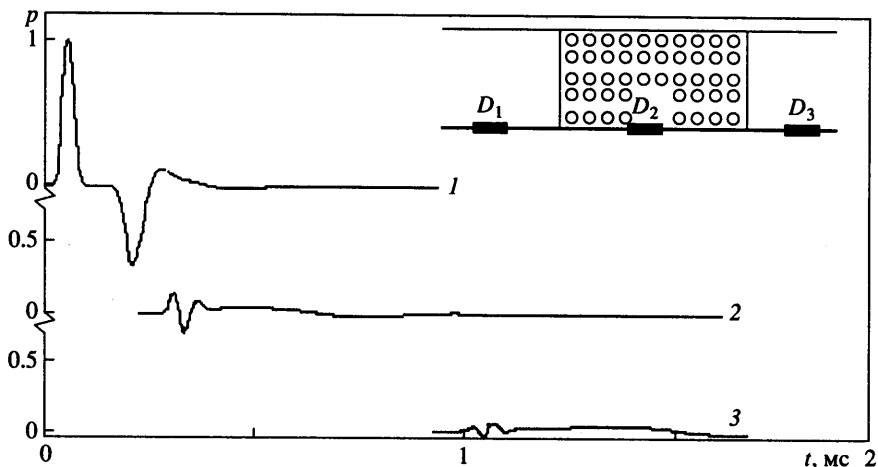
$$p^R(l_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty p_b(l_0, \tau) N_{bl} \exp[i\omega(t - \tau)] d\omega d\tau \quad (2.12)$$

$$p^G(l_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty p_b(l_0, \tau) M_{bl} \exp[i\omega(t - \tau)] d\omega d\tau \quad (2.13)$$

На основе (2.9)–(2.13) проведены численные расчеты. На фиг. 2 представлена эволюция волны конечной длительности, имеющей колоколообразную форму

$$p^{(0)}(0, t) = \Delta p_0 \exp\left(-\left(\frac{t - t_*/2}{t_*/2}\right)^2\right) \quad (2.14)$$

где  $t_*$  определяет характерную протяженность импульса при взаимодействии с завесой. Расчетные осциллограммы 1, 2 и 3 соответствуют показаниям датчиков *D1*, *D2* и *D3*, расположенных в чистой жидкости перед завесой ( $x < 0$ ), в середине завесы ( $x = l_0/2$ ) и в чистой жидкости за завесой ( $x > l_0$ ). На фиг. 2 и далее показания датчиков *D1*–*D3* – это значения давления в выбранных точках. Параметры следующие:



Фиг. 2. Динамика акустических волн в жидкости в случае наличия в жидкости завесы, 1–3 – соответствуют показаниям датчиков  $D_1$ – $D_3$

$\alpha_{g0} = 10^{-3}$ ,  $a_0 = 10^{-3}$  м,  $l_0 = 0,1$  м,  $t_* = 10^{-4}$  с, пространственная протяженность импульса ( $\lambda = Ct_*$ ) составляет  $\lambda_l = 1,5 \cdot 10^{-1}$  м,  $\lambda_b \approx 4 \cdot 10^{-2}$  м.

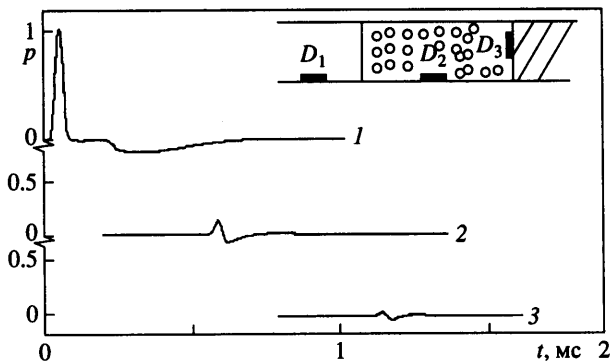
Здесь первый всплеск (обращенный вверх) для первой осциллограммы соответствует первоначальному импульсу, второй всплеск, обращенный вниз (волна разгрузки), – сигналу, отразившемуся от границы ( $x = 0$ ). Здесь и далее единичный масштаб для величины возмущения давления соответствует амплитуде первоначального импульса. Вторая осциллограмма показывает эволюцию прошедшего в завесу сигнала при его распространении в завесе. Третья осциллограмма иллюстрирует импульс, прошедший через завесу. На всех остальных осциллограммах всплески давления из-за повторных отражений от границ также незаметны. Из приведенных осциллограмм видно, что амплитуда импульса давления при прохождении через завесу сильно угасает и, значит, завеса почти непроницаема для данного импульса.

Пусть правая граница завесы – абсолютно жесткая стенка. Тогда для первых двух этапов описание эволюции волнового импульса совершенно аналогично приведенному случаю. На третьем этапе – при взаимодействии волны с абсолютно жесткой стенкой – имеет место  $N_{bs} = 1$ ,  $M_{bs} = 2$ , и, следовательно, для возмущения давления на стенке можно записать

$$p_s = 2p_b(l_0, t) \quad (2.15)$$

На фиг. 3 представлены расчетные осциллограммы, которые описывают эволюцию волны конечной длительности с  $t_* = 0,5 \cdot 10^{-4}$  с для завесы с параметрами  $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ ,  $a_0 = 10^{-2}$  м,  $l_0 = 0,5$  м ( $\lambda_l = 7,5 \cdot 10^{-2}$  м,  $\lambda_b \approx 0,5 \cdot 10^{-2}$  м). Как следует из представленных расчетных кривых, для датчика  $D_1$  практически не заметен сигнал, отраженный от твердой стенки. Вторая осциллограмма показывает эволюцию сигнала после прохождения из чистой жидкости в пузырьковую завесу и распространяющегося в завесе. Третья осциллограмма показывает воздействие импульса на стенку. При прохождении через завесу до твердой стенки амплитуда первоначального импульса почти полностью угасает и реакция сигнала на стенку незначительна. В этом случае особо следует отметить, что амплитуда отраженного от системы пузырьковая завеса – твердая стенка сигнала также очень слабая (осциллограмма 1) и поэтому практически отсутствует "эхо".

Для реализации такой неотражающей завесы необходимо, чтобы периоды  $t_M$  ( $t_M = 2\pi/\omega_M$ ) собственных колебаний пузырьков в завесе значительно превышали длительность импульсных сигналов ( $t_M \gg t_*$ ), что возможно при использовании



Фиг. 3. Воздействие звукового сигнала на твердую стенку, расположенную за завесой. Обозначения те же, что и на фиг. 2

пузырьков более крупных размеров. При этом такие сигналы в завесе будут угасать в основном за счет акустической разгрузки пузырьков.

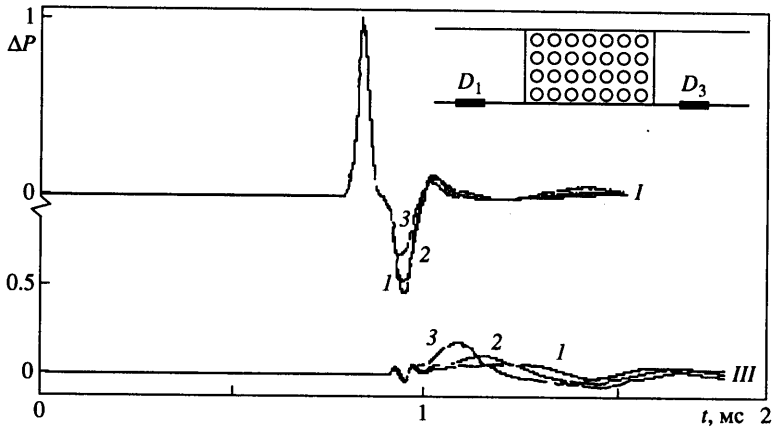
Таким образом, когда твердая стенка покрыта слоем толстой завесы, подбором дисперсности пузырьков и объемного содержания газа в завесе можно добиться отсутствия отражения сигнала. Кроме того, за счет выбора толщины завесы можно значительно ослабить воздействие волны на стенку.

**3. Нелинейные волны.** Для численного анализа задачи об эволюции нелинейных волн в жидкости при наличии пузырьковой завесы удобнее пользоваться системой уравнений (1.1)–(1.9), записанных в лагранжевых переменных. Это, в частности, связано с тем, что в лагранжевых координатах завеса "неподвижна". После некоторых преобразований получим систему

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p_l}{\partial s}, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = v \\ \frac{1 - \alpha_g}{C_l^2 \rho_l^0} \frac{\partial p_l}{\partial t} &= \frac{3\alpha_g}{a} w + \left( \frac{(1 - \alpha_g)^2}{(1 - \alpha_{g0})} + \alpha_g \right) \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= \frac{3\alpha_g}{a} w - \frac{n\alpha_g}{n_0} \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial p_g}{\partial t} &= -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma - 1)}{a_0} q \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= w = w_R + w_A \\ \frac{\partial w_R}{\partial t} &= \left[ \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0} - \frac{3}{2} w_R^2 - 4v_l \frac{w_R}{a} \right] \frac{1}{a_0} \\ w_A &= \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $s$  – лагранжева переменная, в качестве которой берется начальная эйлера координата ( $s = x_0$ ).

Система (3.1) решается численно по явной схеме. Причем не потребовалось вводить искусственную вязкость, поскольку приведенные уравнения из-за учета межфазного теплообмена и акустической разгрузки являются системой с естественной диссипацией.



Фиг. 4. Влияние эффектов нелинейности на эволюцию волн конечной длительности. Осциллограммы I и III – показания датчиков  $D_1$  и  $D_3$ , линии 1, 2 и 3 – значения начальной амплитуды  $\Delta p_0 = 10^3, 5 \cdot 10^5, 13 \cdot 10^5$  Па

Приведем принцип построения разностной схемы, которая принята для решения данной задачи. Для аппроксимации дифференциальных уравнений используем равномерную шахматную сетку

$$(s_i, t_i), (s_{i+1/2}, t_{i+1/2})$$

$$s_{i+1} = s_i + h, \quad s_{i+1/2} = s_i + 0,5h, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$s_0 = 0, \quad s_N = M, \quad t_{j+1} = t_j + \tau, \quad t_{j+1/2} = t_j + 0,5\tau$$

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

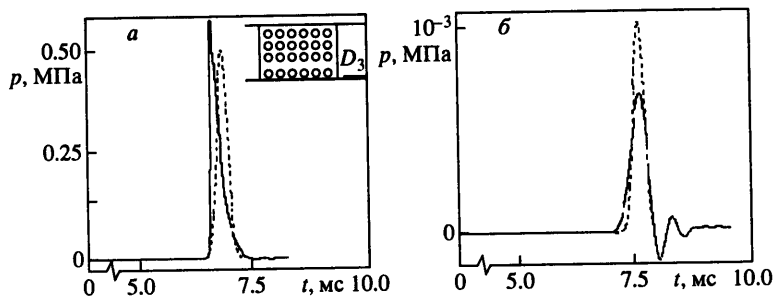
где  $h$  и  $\tau$  – соответственно шаги по координате и по времени. К узлам сетки  $(s_i, t_j)$  будем относить сеточные функции скорости  $v_i^j$  и эйлеровой переменной  $x_i^j$ , к "полуцелым" точкам  $(s_{i+1/2}, t_{j+1/2})$  сеточные функции всех остальных параметров. Такая аппроксимация обеспечивает устойчивость решения волновых задач в однофазных системах (жидкостях и газах) конечно-разностным методом [6].

Результаты расчетов для достаточно слабых импульсных возмущений ( $\Delta p_m < p_0$ ,  $\Delta p_m = p_m - p_0$ ,  $p_m$  – максимальное значение давления в волне), полученных на основе конечно-разностных уравнений, совпадают с решениями, следующими из линейной теории, изложенной в разд. 2. По мере нарастания исходной амплитуды можно наблюдать некоторые количественные и качественные особенности проявления нелинейных эффектов.

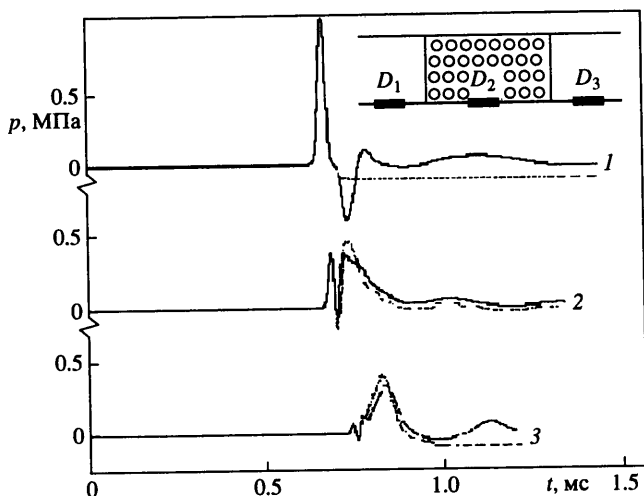
На фиг. 4 иллюстрируется влияние нелинейных эффектов при возрастании величины амплитуды исходного импульса конечной длительности, взятой в виде (2.14) ( $t_* = 10^{-4}$  с), на его динамику при взаимодействии с завесой с параметрами:  $l_0 = 0,1$  м,  $a_0 = 10^{-3}$  м,  $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ . Величины возмущений давлений в расчетных осциллограммах приведены в безразмерной форме, определяемой выражением  $\Delta P = \Delta p / \Delta p_0$  ( $\Delta p = p - p_0$ ). По мере роста амплитуды исходного импульса растет относительная амплитуда прошедшего сигнала, т.е. по мере усиления исходного сигнала снижается экранирующая способность завесы. При этом линейная теория для достаточно сильных волн дает заниженные результаты для амплитуд прошедших сигналов. Для отраженного сигнала учет нелинейных слагаемых в уравнениях движения приводит к уменьшению относительной амплитуды волны разгрузки.

На фиг. 5 приведены расчетные осциллограммы, иллюстрирующие трансформацию импульсного сигнала (сплошные линии), проходившего через завесу с





Фиг. 5. Нарастание амплитуды сигнала из-за эффектов нелинейности при прохождении завесы с достаточно малым объемным содержанием газа *a* и *б* –  $\Delta p_0 = 5 \cdot 10^5$  Па и  $10^3$  Па



Фиг. 6. Динамика импульсных волн с учетом возможного вскипания (сплошная линия без учета вскипания, штриховая – с учетом)

параметрами  $l_0 = 1$  м,  $a_0 = 10^{-3}$  м при достаточно малом объемном содержании газа  $\alpha_{g0} = 10^{-4}$ . При этом величина скорости волны в завесе сильно зависит от сжимаемости жидкости, определяемой значением  $C_b$ , а также от присутствия газовых пузырьков. Штриховые линии соответствуют исходному импульсу с характерной протяженностью  $t_* = 10^{-3}$  с. Для импульса с большой исходной амплитудой наличие пузырьков завесы в жидкости из-за увеличения скорости волны при возрастании давления приводит к укручению переднего участка волны (фиг. 5, *a*). А это в свою очередь приводит к проявлению радиальной инерции [1] жидкости при сжатии завесы. В результате происходит даже некоторое нарастание амплитуды сигнала (примерно на  $\sim 10^5$  Па) при прохождении через завесу и некоторое сужение временной протяженности импульса. Для сравнения приведены соответствующие кривые для волн слабой амплитуды ( $\Delta p_0 = 10^3$  Па), здесь наблюдается значительное ослабление сигнала той же длительности (фиг. 5, *б*).

При отражении на границе между чистой и пузырьковой жидкостями сильных импульсных сигналов могут возникать волны разгрузки с отрицательной амплитудой. Если временная протяженность этой отраженной волны разгрузки достаточно велика в зависимости от сорта жидкости и от ее чистоты, за отраженной волной в области чистой жидкости может наблюдаться вскипание (или кавитация).

Это явление возможного вскипания жидкости при снижении давления до значений кавитационной прочности жидкости качественно может быть описано введением аномально сильной сжимаемости по сравнению со сжимаемостью жидкости в исходном состоянии при низких давлениях. А это количественно может быть учтено с помощью уравнения состояния жидкости при предположении, что значение скорости звука сильно снижается при низких давлениях.

На фиг. 6 проиллюстрирована эволюция волны конечной длительности ( $t_* = 10^{-4}$  с,  $\Delta p_0 = 10^6$  Па) при прохождении завесы ( $l_0 = 0,1$  м,  $a_0 = 10^{-3}$  м,  $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ ) с учетом возможного вскипания (пунктирная линия). Учет аномальной сжимаемости (возможного вскипания) при низких давлениях проводился на основе следующей формулы для скорости звука:

$$C_{l_*}^2 = C_*^2 + C_l^2 \operatorname{th}^2(p_l / p_*) \quad (3.2)$$

Здесь  $p_*$  и  $C_*$  – некоторые модельные параметры, выражающие давление начала вскипания (или кавитационной прочности) и скорость звука при состоянии вскипания. При расчетах приняты значения  $C_* = 5$  м/с,  $p_* = 10^4$  Па. При этом, поскольку  $C_*^2 \ll C_l^2$ , из (3.2) следует, что  $C_{l_*} \approx C_*$  при  $p \leq p_*$  и  $C_{l_*} \approx C_l$  при  $p > p_*$ . Из представленных результатов видно, что возможное вскипание в области чистой жидкости, примыкающей к завесе, приводит к некоторому росту амплитуды прошедшего через завесу импульса и снижению амплитуды отраженной волны разгрузки по сравнению со случаем, когда такое вскипание отсутствует.

**Заключение.** Для слабых гармонических волн получены аналитические выражения коэффициентов отражения и прохождения при наличии границ, разделяющих области чистой и пузырьковой жидкостей. На основе численного исследования динамики волн в жидкости при наличии в ней пузырьковой завесы установлены следующие факты.

В случае акустических волн завеса оказывает экранирующее воздействие, а для нелинейных волн происходит некоторое ослабление этого свойства. Из-за проявления нелинейных эффектов наличие пузырьковой завесы при некоторых ситуациях приводит к усилению амплитуды исходного сигнала.

Наличие на твердой стенке пузырьковой завесы при определенных значениях радиуса пузырьков и их объемного содержания приводит к отсутствию отраженного от стенки сигнала и существенному снижению давления волны на стенку.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 2. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. Малых Н.В., Огородников И.А. Скорость и затухание импульсов большой амплитуды в слое жидкости с пузырьками газа // Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Двухфазные потоки. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1978. С. 38–51.
3. Губайдуллин А.А., Кутрунов А.В., Рустюмова О.Ш., Яковлева Т.К. Некоторые вопросы волновой динамики жидкости с пузырьками газа // Итоги исследований Ин-та механики многофазных систем СО РАН. Тюмень: Уфимск. науч. центр. 1994. Вып. 5. С. 23–31.
4. Губайдуллин А.А., Румянцев О.П. Гашение ударных импульсов в жидкости пузырьковыми завесами с переменным газосодержанием // Акустика неоднородных сред. Новосибирск: Ин-т гидродинам. СО АН СССР. 1991. Вып. 100. С. 100–104.
5. Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К. Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волн в пузырьковой среде // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304. № 5. С. 1077–1081.
6. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975. 351 с.

Стерлитамак

Поступила в редакцию  
15.II.2000