

УДК 532.527

© 2001 г. А.М. ГАЙФУЛЛИН

УРАВНЕНИЯ НАРАСТАНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В СЛЕДЕ ЗА САМОЛЕТОМ

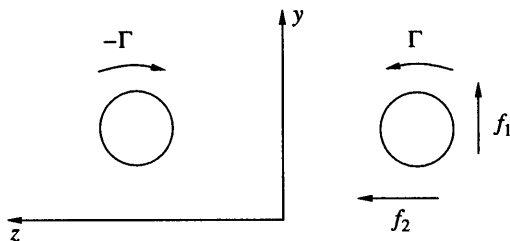
Получены уравнения для амплитуды возмущений в вихревом следе за летательным аппаратом с крылом большого удлинения. Исследовано влияние частоты возмущающих факторов, близости земли и характеристик турбулентной атмосферы на эволюцию следа.

Различают три формы разрушения вихревого следа. Первая связана с длинноволновой неустойчивостью и наблюдается в следе за самолетом с крылом большого удлинения [1]. Вторая форма – "взрыв" вихря; она присуща следу за крылом как малого [2], так и большого удлинения [3]. Третья форма – естественное затухание следа в вязкой или турбулентной среде [4, 5].

Вихревой след за летательным аппаратом с крылом большого удлинения живет достаточно длительное время – порядка нескольких минут. След становится видимым (см. фотографии в [1, 5]), если частицы жидкости, образующиеся благодаря эффекту конденсации, затягиваются в концевые вихри или если он специально визуализируется дымом. В дальней области за летательным аппаратом формируются две мощные противоположно закрученные вихревые структуры, которые сначала выглядят прямолинейными. Затем синусоидальные возмущения нарушают прямолинейность вихревого следа. Амплитуда возмущений растет. В следующей фазе вихри сталкиваются, образуя вихревые кольца. Разрушение вихревых колец завершает наблюдаемые фазы эволюции следа. Земной наблюдатель может либо сразу просмотреть все фазы развития, сканируя взглядом многокилометровую видимую часть следа, либо, сосредоточив свой взгляд на ограниченном участке следа, наблюдать за его эволюцией.

Постоянная тенденция к утяжелению веса самолета ведет к необходимости увеличения безопасного расстояния между самолетами на взлетно-посадочных режимах [5]. Чтобы повысить пропускную способность загруженных аэропортов, необходимо еще на стадии проектирования большого самолета предсказание времени жизни и интенсивности вихревого следа за ним.

Начало теоретическому исследованию неустойчивости следа положила работа [1]. В ней на основе простой модели двух бесконечных вихревых трубок прослежен механизм нарастания синусоидальных возмущений. В [6] в качестве причины возникновения синусоидальных возмущений указана турбулентность и дана оценка времени жизни следа в зависимости от интенсивности турбулентных пульсаций. Эволюция двух вихрей над экраном исследована в [7, 8]. Численному исследованию вихревых следов посвящена монография [4]. Задача о нарастании синусоидальной неустойчивости в [1, 7, 8] рассмотрена в упрощенной постановке. Считается, что в связи с удлиненностью вихревого следа пространственную эволюцию можно в главном приближении заменить временной. При этом некоторые величины, например расстояние между вихрями и их высота, полагаются не зависящими от времени. Возмущения развиваются в неизменных условиях. Предполагается экспоненциальный рост амплитуды. На самом деле, особенно при движении вихрей над экраном, расстояния между вихря-



Фиг. 1. Структура течения и система координат

ми и их высота непрерывно меняются. Этот факт оказывает существенное влияние на рост синусоидальных возмущений, вплоть до того, что возмущения заданной частоты имеют растущие и затухающие фазы своего развития по мере удаления следа от летательного аппарата.

В данной работе выводятся уравнения нарастания синусоидальных возмущений как при наличии экрана, так и без него. Исследуется эволюция двух вихрей в турбулентной атмосфере.

1. Предварительный анализ. Стационарные решения в системе координат, связанной с самолетом, для геликоидального отклонения траектории вихрей от тривиального прямолинейного движения получены в [9]. Рассматривался модельный случай движения двух полых вихревых трубок. Применение данной теории к расчетам вихревого следа за самолетами с крыльями большого удлинения показало, что в ее рамках проявляются только коротковолновые возмущения. Стационарность решения и коротковолновые возмущения присущи течениям со "взрывом" вихря.

Рассмотрим движение двух противоположно закрученных вихревых трубок под действием самоиндукции. Пусть известна траектория движения вихревых трубок в случае отсутствия нестационарных возмущений, действующих на них. Такую "невозмущенную" траекторию можно получить с помощью численного расчета. Введем ортогональную криволинейную систему координат (x, y, z) с началом на самолете так, чтобы ось x была направлена вдоль "невозмущенной" траектории движения вихрей. Расположение осей y и z при виде сзади показано на фиг. 1. Скорости (u, v, w) направим вдоль осей (x, y, z) . Расстояние между вихрями $b(x)$. Правый вихрь закручивает жидкость против часовой стрелки, поэтому условимся считать Γ – циркуляцию жидкости по контуру вокруг него – величиной положительной. Соответственно циркуляция левого вихря будет отрицательной. Пусть $f_1(t, x)$ и $f_2(t, x)$ – отклонения траектории вихря (для определенности правого) от невозмущенного движения в направлении осей y и z . При этом $f_i(t, x) \ll b(x)$. Индекс i здесь и далее в работе принимает значения 1 или 2. Тривиальное движение $f_i = 0$. Будем предполагать, что движения правого и левого вихрей симметричны. Скорость набегающего потока u_∞ .

Выпишем уравнения для траектории левого вихря

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + u_\infty \frac{\partial f_i}{\partial x} = (-1)^{i+1} v_i \quad (1.1)$$

Скорости v_1 и v_2 , с которыми движется левый вихрь в направлении осей y и z , возникают из-за искривления вихревых трубок [10] (по немому индексу k здесь и далее производится суммирование от 1 до 2)

$$v_i \sim \left| \Gamma e_{ik} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2} \right|, \quad e_{ik} = \begin{cases} 0 & (i = k) \\ 1 & (i = 1, k = 2) \\ -1 & (i = 2, k = 1) \end{cases}$$

Пусть возмущения имеют вид волны, бегущей со скоростью u_1 (стоячая волна рассмотрена в [9])

$$f_i = A_i(x) \cos(v(x - u_1 t) + \delta_i) \quad (1.2)$$

где $A_i(x)$ – медленно растущие функции. Порядок изменения функций $A_i(x)$ легко получить из геометрических размеров следа. На масштабе длины X , на котором распространяется след за самолетом до разрушения, эти функции меняются на величину порядка расстояния между вихрями в сечении $x = 0$. Таким образом, функции $A_i(x)$ выражаются через функции F_i , зависящие от новой переменной $\eta = x/X$

$$A_i(x) = b(0)F_i(\eta) \quad (1.3)$$

Если $u_1 \neq u_\infty$, то левая часть уравнений (1.1) имеет порядок $A_i(u_\infty - u_1)v$, а правая часть – $e_{ik}A_k \Gamma v^2$. Это означает, что при малых $\Gamma/u_\infty b$ (что характерно для следа) величина vb будет большой, т.е. возмущения будут коротковолновыми. Длинноволновые возмущения будут наблюдаться, только если $u_1 \approx u_\infty$. Таким образом, уже качественные результаты указывают на то, что синусоидальная неустойчивость связана с волной, "убегающей" от самолета со скоростью u_∞ . Земной наблюдатель будет видеть квазистационарную эволюцию синусоидальной неустойчивости. Для него волна в фиксированном месте пространства будет, пока не разрушится, иметь одну и ту же фазу, но амплитуда волны будет меняться. В данной работе исследована только длинноволновая (синусоидальная) неустойчивость вихревого следа за самолетом.

2. Задача о самоиндуцированном движении двух вихрей в идеальной жидкости. Рассматриваются два симметричных противоположно закрученных вихревых образования, сошедших с поверхности самолета в сечении $x = 0$. Пусть поперечный размер вихря намного меньше расстояния между вихрями, высоты вихрей над землей и продольного радиуса кривизны вихревого образования. В этом случае, так же как и в [1, 7, 8], считается, что в дальнем следе течение внутри каждого вихря осесимметрично. Закон изменения завихренности по радиусу произволен. Система координат, обозначение компонент скоростей, возмущений, геометрических и аэродинамических характеристик течения описана в предыдущем пункте. Самолет совершает гармонические колебания. Возмущения сносятся вниз по потоку со скоростью u_∞ . Высота полета $h(0)$. Высота вихрей над землей $h(x)$. При этом $f_i(t, x) \ll h(x)$. Нужно найти, как растет амплитуда колебаний вихрей в следе с увеличением расстояния от самолета.

Для решения задачи необходимо ввести две асимптотические области: Ω_1 – область ближнего следа за самолетом с характерными размерами $x \sim y \sim z \sim b(0)$ и Ω_2 – область дальнего следа с характерными размерами $x \sim b(0)/\varepsilon$, $y \sim z \sim b(0)$. Здесь безразмерная величина $\varepsilon = \Gamma/u_\infty b(0) \ll 1$.

Исследуем сначала, что происходит в ближнем поле. Число Струхала $Sh = L_k/u_\infty T_k$ составим из характерных для колеблющегося крыла величин, например средней аэродинамической хорды крыла, скорости набегающего потока и периода колебаний. Для реальных летательных аппаратов число Струхала – малая величина. Это означает, что течение в ближнем следе за крылом можно рассматривать как квазистационарное. Возмущения в главном приближении передаются без изменения в пределах области Ω_1 . Их значения будут начальными условиями ($x = 0$) для распространяющихся в дальнем следе возмущений.

В области Ω_2 введем новую систему координат (x, ρ, ϕ) , где ρ, ϕ – полярные координаты в сечении $x = \text{const}$ с центром на центральной линии левого вихря. Поперечное сечение вихря – окружность радиуса $\rho_0(x)$. Пусть в каждой точке левого вихря индуцируются скорости $u_i(x, \rho, \phi)$. Разные слои вихря перемещаются с различными скоростями, что приводит к разрушению осесимметричности течения. Пренебрежем деформацией поперечного сечения вихря, т.е. будем считать, что поперечное сечение вихря сохраняет форму окружности. Средняя скорость u_m перемещения сече-

ния вихря как единого целого определяется из условия отсутствия силы, действующей на вихрь

$$v_{mi}(x) = \frac{1}{2\pi\Gamma(\rho_0)} \int_0^{\Gamma(\rho_0)} \int_0^{2\pi} v_i(x, \rho, \varphi) d\varphi d\Gamma(\rho) \quad (2.1)$$

Для определения значения самоиндуцированной скорости, с которой левый вихрь перемещает сам себя, разобьем его на искривленные вихревые трубки с циркуляцией $-d\Gamma$. Радиус каждой трубки может меняться в зависимости от расстояния до самолета $\rho = \rho(x, \Gamma)$. Из формулы Био – Савара следует, что осредненные по углу компоненты скорости на расстоянии $\sigma \geq \rho(x, \Gamma)$ при $\sigma \ll 2\pi/\nu$ в главном приближении равны

$$dv_{*i}(x, \sigma) = |e_{ik}| \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2} \ln \sigma - R(f_k(x)) \right) \frac{d\Gamma}{4\pi}$$

$$R(f_k(x_0)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2 f_k(x_0)}{\partial x^2} \ln 2\delta + \frac{1}{2} \int_{x_0+\delta}^x \frac{\partial^2 f_k / \partial x^2}{x-x_0} dx - \frac{1}{2} \int_0^{x_0-\delta} \frac{\partial^2 f_k / \partial x^2}{x-x_0} dx \right)$$

Суммируя вклады в скорость от всех вихревых трубок, получим, что осредненная по углу самоиндуцированная скорость является функцией от радиуса

$$v_{*i}(\rho, x) = |e_{ik}| \left[\frac{\Gamma(\rho)}{4\pi} \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2} \ln \rho - R(f_k) \right) + \int_{\rho}^{\rho_0(x)} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2} \ln \rho - R(f_k) \right) d\Gamma(\rho) \right]$$

Средняя скорость переноса вихря, согласно (2.1), равна

$$v_{mi}(x) = \frac{1}{\Gamma(\rho_0)} \int_0^{\rho_0(x)} v_{*i} d\Gamma(\rho) = \frac{\Gamma(\rho_0)}{4\pi} |e_{ik}| \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2} (\ln \rho_0 - J) - R(f_k) \right) \quad (2.2)$$

$$J = \int_0^1 \frac{\gamma^2}{r} dr, \quad r = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \gamma = \frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho_0)}$$

Так как скорость движения волны равна u_∞ , соотношение (1.2) принимает вид

$$f_i = A_i(x) \cos(v(x - u_\infty t) + \delta_i) \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.2), имеем

$$v_{mi}(x) = -\frac{\Gamma(\rho_0)}{4\pi} v^2 |e_{ik}| f_k \left(\ln \frac{v\rho_0}{2} + C - J \right) \quad (2.4)$$

где C – постоянная Эйлера – Маскерони, $C \approx 0,577216$.

Скорость, вызванная правым вихрем в центре левого вихря, вычисляется с помощью формулы Био – Савара. Из (1.3) следует, что величины A_i на масштабах порядка нескольких длин волн изменяются незначительно. При вычислении интеграла по формуле Био – Савара, как это обычно делается в методе многих масштабов [11], в главном приближении величины A_i считаются постоянными, зависящими от переменной x как от параметра. Скорости имеют вид

$$v_1(x) = -\frac{\Gamma(\rho_0)}{4\pi} f_2 \left(\frac{2}{b^2} + \frac{2\nu K_1(vb)}{b} \right) \quad (2.5)$$

$$v_2(x) = -\frac{\Gamma(\rho_0)}{4\pi} f_1 \left(-\frac{2}{b^2} + 2\nu^2 K_0(vb) + \frac{2\nu K_1(vb)}{b} \right)$$

где $K_0(vb)$ и $K_1(vb)$ – модифицированные функции Ганкеля.

Эволюция вихрей над землей учитывается с помощью метода зеркального отражения. Скорость, которую индуцирует левый отраженный вихрь на левый вихрь, в главном приближении выглядит следующим образом:

$$v_1(x) = -\frac{\Gamma(\rho_0)}{4\pi} f_2 \left(-\frac{1}{2h^2} + 2v^2 K_0(2vh) + \frac{vK_1(2vh)}{h} \right) \quad (2.6)$$

$$v_2(x) = -\frac{\Gamma(\rho_0)}{4\pi} f_1 \left(\frac{1}{2h^2} + \frac{vK_1(2vh)}{h} \right)$$

Скорость от правого отраженного вихря на левый вихрь

$$v_1(x) = \frac{\Gamma(\rho_0)}{4\pi} f_2 \left(-\frac{8v^2 h^2}{H^2} K_0(vH) + Q \right) + \frac{\Gamma(\rho_0)}{4\pi} f_1 L_3 \quad (2.7)$$

$$v_2(x) = \frac{\Gamma(\rho_0)}{4\pi} f_1 \left(-\frac{2v^2 b^2}{H^2} K_0(vH) - Q \right) + \frac{\Gamma(\rho_0)}{4\pi} f_2 L_3$$

$$H = \sqrt{b^2 + 4h^2}, \quad Q = \frac{2v(b^2 - 4h^2)}{H^3} K_1(vH) + \frac{2(b^2 - 4h^2)}{H^4}$$

$$L_3 = -\frac{4hb}{H^2} \left(v^2 K_0(vH) + \frac{2v}{H} K_1(vH) + \frac{2}{H^2} \right)$$

Скорость, с которой движется левый вихрь, равна сумме скоростей, определенных в соотношениях (2.4)–(2.7). Подставляя значения суммарных компонент скорости в уравнение для траектории вихря (1.1), получим, что δ_2 равно либо δ_1 , либо $\pi + \delta_1$. Так как случай $\delta_2 = \pi + \delta_1$ сводится к случаю $\delta_2 = \delta_1$ с помощью формальной замены A_2 на $-A_2$ в соотношении (2.3), ограничимся изучением решения задачи при $\delta_2 = \delta_1$. Из (1.1) также следует закон нарастания амплитуды возмущения

$$\frac{dA_1}{dx} = b\Gamma_*(A_2 L_1 + A_1 L_3), \quad \frac{dA_2}{dx} = -b\Gamma_*(A_1 L_2 + A_2 L_3) \quad (2.8)$$

$$L_1 = L_y + \frac{1}{2h^2} - 2v^2 K_0(2vh) - \frac{v}{h} K_1(2vh) - \frac{8v^2 h^2}{H^2} K_0(vH) + Q$$

$$L_2 = L_z - \frac{1}{2h^2} - \frac{v}{h} K_1(2vh) - \frac{2v^2 b^2}{H^2} K_0(vH) - Q$$

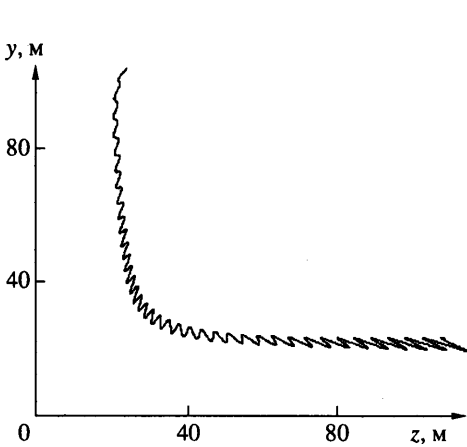
$$L_y = -v^2 \left(\ln \frac{v\rho_0}{2} + C - J \right) - \frac{2}{b^2} - \frac{2vK_1(vb)}{b}$$

$$L_z = -v^2 \left(\ln \frac{v\rho_0}{2} + C - J \right) + \frac{2}{b^2} - 2v^2 K_0(vb) - \frac{2vK_1(vb)}{b}$$

$$\Gamma_* = \Gamma(\rho_0) / 4\pi u_\infty b$$

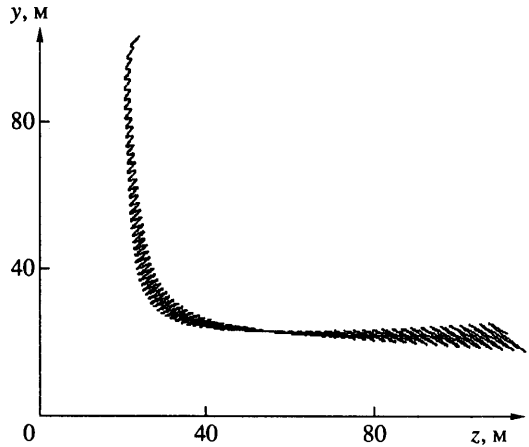
Математически задачу, описанную в данном разделе, можно сформулировать следующим образом: решить уравнение (2.8) совместно с уравнениями, определяющими движение вихрей в отсутствие возмущений, при заданных начальных условиях для местоположений вихрей $h(0)$ и $b(0)$ и амплитуд соответствующих гармоник $A_i(0)$.

Такая система уравнений решалась численно применительно к характеристикам следа за самолетом В-747. Оказалось, что амплитуда синусоидальных возмущений зависит от многих параметров. Более того, при изменении параметров может меняться не только амплитуда возмущений, но и сценарий развития неустойчивости в вихревом следе. На фиг. 2 и 3 представлены сценарии эволюции вихревого следа



Фиг. 2

Фиг. 2. Сценарии эволюции вихревого следа (вид сзади) при $v = 0,01 \text{ м}^{-1}$



Фиг. 3

Фиг. 3. Сценарии эволюции вихревого следа (вид сзади) при $v = 0,02 \text{ м}^{-1}$

(вид сзади) при различных частотах внешних возмущающих факторов. Высота полета самолета 100 м, начальная амплитуда равна 0,5 м вдоль оси y и 0,5 м вдоль оси z . При $v = 0,01 \text{ м}^{-1}$ амплитуда возмущений непрерывно растет (фиг. 2), при $v = 0,02$ (фиг. 3) и $0,03 \text{ м}^{-1}$ амплитуда возмущений сначала растет, затем падает, затем опять растет. При $v = 0,04 \text{ м}^{-1}$ наблюдается уже несколько фаз увеличения и уменьшения амплитуды. На фиг. 2 и 3 видно изменение плоскости колебаний по мере приближения следа к земле.

Уравнения (2.8) были получены в предположении малости амплитуды возмущения по сравнению с расстоянием между вихрями и высотой вихрей над землей. Уравнения (2.8) линейные, поэтому полное их решение составляет из суперпозиции решений, полученных для различных длин волн.

Во Введении уже указывались различия подходов к решению задачи о динамике вихревых структур в дальнем следе за крылом. Кроме того, решение уравнений (2.8) зависит от функции распределения циркуляции внутри вихря. Соотношения, полученные в [1, 7, 8], зависят только от величины безразмерного расстояния среза (определение этой величины дано в [1]) и не зависят от внутренней структуры вихря.

Если самолет совершает полет на большой высоте ($h \rightarrow \infty$), то

$$\frac{dA_1}{dx} = b\Gamma_* A_2 L_y, \quad \frac{dA_2}{dx} = -b\Gamma_* A_1 L_z \quad (2.9)$$

В этом случае амплитуда возмущений нарастает по мере увеличения координаты x , только если L_y и L_z разного знака. Из этого условия следует, что диапазон длин волн, соответствующих растущим возмущениям, будет ограниченным.

Уравнения (2.9) допускают аналитическое решение, если величина ρ_0 и функция распределения завихренности $\Gamma(\rho)$ не зависят от x . Представляет интерес случай $L_y L_z < 0$. Это самый важный случай, поскольку при таком условии возмущения экспоненциально нарастают. Решение

$$A_i(x) = A_i(0) \operatorname{ch} \mu x - \frac{\sqrt{-L_y L_z}}{L_y} e_{ik} A_k(0) \operatorname{sh} \mu x, \quad \mu = b\Gamma_* \sqrt{-L_y L_z}$$

В [1] приведен рассчитанный аналитически, а в [12] выведенный эмпирически закон нарастания амплитуды. По формулам, приведенным в этих работах, амплитуда колебаний синусоидальных возмущений за В-747, летящим на большой высоте, воз-

растает в e раз за 36,3 с в [1] и за 30,0 с в [12]. В данной работе это время составляет 37,2 с. Однако сравнивать эту величину с эмпирически полученной затруднительно, поскольку уравнения (2.9) описывают рост амплитуды возмущений без учета турбулентности атмосферы.

Возмущению с частотой ν соответствует длина волны $\lambda = 2\pi/\nu$. Временной период колебания самолета как твердого тела $T = 2\pi/\nu_{\infty} = \lambda/\nu_{\infty}$. Подставляя в последнюю формулу известные данные о длине волны $\lambda \sim 400$ м и скорости самолета $\nu_{\infty} \sim 200$ м/с, получим $T \sim 2$ с. Колебание самолета с периодом $T \sim 1-5$ с называется короткопериодическим. Такими движениями могут быть, например, малое продольное движение, когда происходит изменение угла атаки относительно равновесного состояния, или малое боковое движение, когда происходит изменение угла скольжения относительно равновесного состояния [13]. Вместе с тем анализ величины амплитуды колебаний самолета показал, что она достаточно мала и поэтому не может обеспечить необходимого развития возмущений за время, равное известному из летных экспериментов времени жизни вихревого следа. При этом в течение всего этого времени амплитуды $A_i(x)$ намного меньше расстояния между вихрями и, следовательно, не нарушается основное условие линейной постановки задачи.

3. Задача о движении двух вихрей в турбулентной атмосфере. Вихри в следе за самолетом эволюционируют не в спокойной, а в турбулентной атмосфере [6]. Учет величины турбулентных возмущений проводится согласно [14, 15]. В качестве модели турбулентности атмосферы принимается спектр энергии пульсаций Кармана

$$E(k) = \frac{55}{27\pi} q^2 L \frac{(\alpha L k)^4}{[1 + (\alpha L k)^2]^{7/6}}$$

$$q^2 = \langle v_x'^2 \rangle + \langle v_y'^2 \rangle + \langle v_z'^2 \rangle, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}, \quad \alpha = \frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt{\pi}\Gamma(5/6)} = 1,339$$

где $E(k)$ – спектр энергии, k – волновое число, q – среднеквадратичная скорость турбулентных пульсаций, L – масштаб турбулентности. Этот спектр реализуется в изотропной среде. Перейдем к одномерному распределению по спектру. Для симметричных возмущений [14]

$$S_i(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(k)(k_x^2 + k_z^2)}{4\pi k^4} 2[1 - (-1)^{i+1} \cos(k_y b)] dk_y dk_z$$

В турбулентной атмосфере левый и правый вихри приобретают дополнительную скорость, в результате которой они движутся в горизонтальной плоскости либо навстречу друг другу, либо друг от друга (среднеквадратичное значение этой скорости зависит от величины S_1), а также скорость, в результате которой два вихря перемещаются как единое целое в вертикальной плоскости (среднеквадратичное значение этой скорости зависит от величины S_2). В линейном приближении значения S_i не зависят от искривления вихрей, а зависят только от расстояния между вихрями. На самом деле вихри в турбулентной атмосфере приобретают также скорость, с которой они перемещаются как единое целое в горизонтальной плоскости, и скорость, с которой они движутся в разных направлениях в вертикальной плоскости. Такие скорости дают вклад в асимметричное возмущенное движение вихрей. Так как в данной работе исследуются только симметричное возмущенное движение вихрей, то ограничимся величинами S_1 и S_2 , которые могут быть получены в явном виде [14]

$$I_1 = \frac{5}{9} \frac{q^2 L}{\pi} (\alpha L)^{-5/3} \left[\frac{8}{5(k_x^2 + \alpha^{-2} L^{-2})^{5/6}} - \frac{\alpha^{-2} L^{-2}}{(k_x^2 + \alpha^{-2} L^{-2})^{11/6}} \right]$$

$$I_2 = 3a_1 a_2 + 5 \left(\frac{\beta}{\beta_w} \right)^2 a_1 a_3, \quad I_3 = 8a_1 a_2 - 5 \left(\frac{b}{\alpha L \beta_w} \right)^2 a_1 a_3$$

$$\beta = bk_x, \quad \beta_w = b\sqrt{k_x^2 + \alpha^{-2}L^{-2}}, \quad a_1 = \frac{2q^2}{9\pi\alpha} b\left(\frac{b}{\alpha L}\right)^{2/3} \beta_w^{-5/3}$$

$$a_2 = \left(\frac{\beta_w}{2}\right)^{5/6} \frac{K_{5/6}(\beta_w)}{\Gamma(5/6)}, \quad a_3 = \left(\frac{\beta_w}{2}\right)^{11/6} \frac{K_{11/6}(\beta_w)}{\Gamma(11/6)}$$

$$S_1 = I_1 - I_2, \quad S_2 = I_1 + I_3$$

Скорости турбулентных пульсаций раскладываются в ряд Фурье [15]

$$\Delta v_i = \sum_{j=1}^n C_{ji} \cos(k_x(x - u_\infty t) + \delta_{ji}), \quad \langle C_{ji}^2 \rangle = S_i \Delta k_x$$

Здесь скобки $\langle \rangle$ означают осреднение, которое производится по различным реализациям (полетам). Даже при одинаковых интегральных характеристиках турбулентности, таких, как среднеквадратичная скорость турбулентных пульсаций, масштаб турбулентности и спектральная плотность энергии, распределение скорости по длине вихря будет зависеть от конкретного состояния турбулентной атмосферы.

Турбулентное движение сплошной среды представляет собой набор энергосодержащих вихрей. Скорость нарастания возмущений в следе за самолетом в основном зависит от интенсивности вихрей, линейный размер l которых сравним с размером порядка $10b$. Именно такую длину волны имеют наиболее быстро растущие возмущения [1]. При заданной среднеквадратичной скорости турбулентных пульсаций характерное время вырождения вихрей $t \sim l/q$ [16] намного больше времени жизни следа. Этот факт позволяет приближенно рассматривать эволюцию вихревого следа в "замороженном" турбулентном поле, т.е. считать, что C_{ij} – константы на протяжении времени жизни следа. Для выбранной частоты $\nu \equiv k_x$ и выбранного $\Delta v \equiv \Delta k_x$

$$\Delta v_i = C_{vi} \cos[\nu(x - u_\infty t) + \delta_{vi}]$$

Величины δ_{vi} должны быть согласованы с фазами в выражениях для возмущений (2.3), так как именно турбулентность является причиной возмущений вихрей. Кроме того, по этой же причине, если выбрать δ_{vi} так, чтобы амплитуды имели знак $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, необходимо положить $C_{v1} < 0$, $C_{v2} > 0$. Ветры Δv_1 и Δv_2 независимы друг от друга, поэтому и возмущения, вызванные ими, в линейной постановке будут независимы друг от друга. Будем возмущения, вызванные ветром Δv_1 , отмечать знаком градус, а возмущения, вызванные ветром Δv_2 – звездочкой. Уравнение нарастания амплитуды возмущений двух вихрей при отсутствии экрана на заданной частоте

$$\frac{dA_{v1}^\circ}{dx} = b\Gamma_* A_{v2}^\circ L_{vy} + \frac{C_{v1}}{u_\infty}, \quad \frac{dA_{v2}^\circ}{dx} = -b\Gamma_* A_{v1}^\circ L_{vz} \quad (3.1)$$

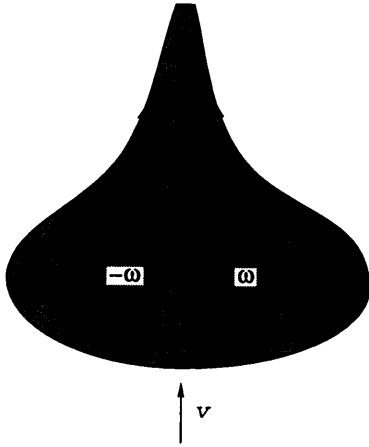
$$\frac{dA_{v1}^*}{dx} = b\Gamma_* A_{v2}^* L_{vy}, \quad \frac{dA_{v2}^*}{dx} = -b\Gamma_* A_{v1}^* L_{vz} + \frac{C_{v2}}{u_\infty}$$

Уравнение нарастания амплитуды возмущений двух вихрей в присутствии экрана на заданной частоте

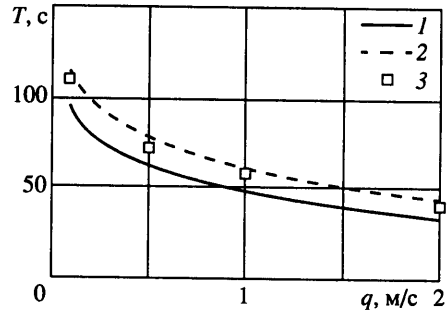
$$\frac{dA_{v1}^\circ}{dx} = b\Gamma_* (A_{v2}^\circ L_{v1} + A_{v1}^\circ L_{v3}) + \frac{C_{v1}}{u_\infty}, \quad \frac{dA_{v2}^\circ}{dx} = -b\Gamma_* (A_{v1}^\circ L_{v2} + A_{v2}^\circ L_{v3}) \quad (3.2)$$

$$\frac{dA_{v1}^*}{dx} = b\Gamma_* (A_{v2}^* L_{v1} + A_{v1}^* L_{v3}), \quad \frac{dA_{v2}^*}{dx} = -b\Gamma_* (A_{v1}^* L_{v2} + A_{v2}^* L_{v3}) + \frac{C_{v2}}{u_\infty}$$

Добавление в величины нижнего индекса ν означает, что уравнения (3.1) или (3.2) следует решать при заданном постоянном значении частоты возмущения.



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Схема потери вихрями циркуляции

Фиг. 5. Зависимость времени жизни вихревого следа от среднеквадратичной скорости турбулентных пульсаций. Кривые 1–3 соответствуют зависимостям [6], [19], расчету [18]

Разобьем весь диапазон частот ν на части с постоянным или переменным шагом $\Delta\nu$. После решения задачи для каждой гармоники ν с выбранным $\Delta\nu$ необходимо сложить эти решения. Сделать это напрямую не представляется возможным, так как фазы волн $\delta_{\nu i}$ произвольны. Решения можно сложить только в смысле среднего

$$\langle f_i^2(x) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \langle A_{\nu i}^{*2}(x) + A_{\nu i}^2(x) \rangle \quad (3.3)$$

Ряд (3.3) можно ограничить только диапазоном частот с растущей амплитудой возмущений. Остается невыясненным вопрос, как определить $\langle A_{\nu i}^2 \rangle$ при заданном x ? При расчете следа за самолетом начальной амплитудой возмущений можно в главном приближении пренебречь. Рассчитаем рост амплитуды возмущений $A_{\nu i}(x)$ по формулам (3.1) или (3.2) при средних значениях $C_{\nu i} = \sqrt{S_i(\nu)\Delta\nu}$. При таком расчете $A_{\nu i}^2(x)$ будут численно равны $\langle A_{\nu i}^2(x) \rangle$.

Время жизни вихревого следа определяется с помощью одного из условий [6]

$$\langle f_2^2 \rangle = b^2/4, \quad \langle f_1^2(x) \rangle = h^2 \quad (3.4)$$

Второе из них может быть использовано при полете на низкой высоте.

Турбулентность атмосферы приводит не только к появлению дополнительных по сравнению с идеальной жидкостью скоростей, но и к изменению циркуляции вихрей [17]. Предложим гипотезу для объяснения этого явления. Вихревая система крыла в дальнем поле является двухъядерной. Она опускается со временем вниз вместе с воздухом в эллиптической капсуле. Внутри капсулы газ завихрен, вне капсулы – незавихрен. Нестационарные турбулентные возмущения выбрасывают часть завихренного газа из капсулы. Она подхватывается внешним потоком и уносится вверх. Таким образом, вихри теряют свою циркуляцию. Схематическая картина такого течения в системе координат, опускающейся вместе с вихрями, показана на фиг. 4. Серым цветом обозначен завихренный газ. Определение скорости потери вихрями циркуляции не является целью данной статьи. Эмпирические соотношения для этой величины в зависимости от состояния турбулентной атмосферы можно найти в [17].

Математически задачу о движении двух вихрей в турбулентной атмосфере можно сформулировать следующим образом: решить уравнение (3.1) или (3.2) совместно с

уравнениями, определяющими потерю циркуляции вихрей, и уравнениями движения вихрей в отсутствие возмущений, но с учетом изменения их циркуляции. Следовательно, задачу о нарастании возмущений в следе за самолетом можно рассматривать не как задачу об устойчивости двух вихрей, а как задачу об их эволюционном движении. Начальные условия: местоположения вихрей $h(0)$ и $b(0)$ и амплитуды соответствующих гармоник $A_{vi}^{\circ}(0)$ и $A_{vi}^*(0)$.

Уравнения (3.1)–(3.4) были положены в основу численного расчета нарастания амплитуды синусоидального возмущения вихревого следа [18]. В [6] приведена эмпирическая зависимость времени жизни вихревого следа от интенсивности турбулентности атмосферы. Модификация этой зависимости была сделана в [19]. Экспериментально определенные времена жизни вихревого следа при одинаковой интенсивности турбулентности имеют довольно сильный разброс. Модифицированная модель точнее, чем ее исходная версия, предсказывает среднее время жизни следа. На фиг. 5 показано сравнение результатов, полученных с помощью этих зависимостей для посадочной конфигурации самолета В-747, с данными, рассчитанными по комплексу программ [18]. Хорошее согласование результатов указывает на то, что среднее время жизни вихревого следа за самолетом, рассчитанное по формулам (3.1)–(3.4) при заданной интенсивности турбулентных пульсаций, будет близко к экспериментально определенному времени жизни следа. Так как решение задачи в [6, 19] проводилось без учета влияния земли, то для корректного сравнения результатов расчет по комплексу программ [18] также проводился без учета влияния земли.

Заключение. Создана линейная теория развития длинноволновой неустойчивости вихревого следа за летательным аппаратом с учетом особенностей, присущих данному следу. Теория учитывает такие факторы, как распределение циркуляции в вихре и ее потерю в следе, изменение размера вихревого образования и расстояния между вихрями. Линейность теории предполагает малость амплитуды возмущения по сравнению с расстоянием между вихрями. Однако формулы (3.1)–(3.4) хорошо описывают характеристики следа вплоть до его разрушения. Это связано с тем, что учет нелинейности возмущения важен только в последней фазе жизни следа, в которой рост амплитуды возмущения можно считать экспоненциальным. Продолжительность нелинейной фазы жизни следа намного короче его линейной фазы.

Использование модели "замороженного" турбулентного поля является априорным. Возможность ее использования требует подтверждения в дальнейших исследованиях. Модель "замороженного" поля необходима только в длинноволновой части турбулентного спектра, соответствующего диапазону частот, на которых возмущения растут.

Ограничение рассмотрения симметричным случаем не является принципиальным и было сделано из условия неувеличения объема, а следовательно, и сложности чтения статьи.

Работа выполнена при поддержке Международного научно-технического центра (МНТЦ, грант № 1018-98).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Crow S.C. Stability theory for a pair of trailing vortices // AIAA Journal. 1970. V. 8. № 12. P. 2172–2179.
2. Lambourne N.C., Bryer D.W. The bursting of leading-edge vortices – some observations and discussion of the phenomenon // Aeronaut. Res. Council. Rept. and Mem. 1962. № 3282. 36 p.
3. Сарпкая Т., Дэйл Дж. Effect of ambient turbulence on trailing vortices // AIAA Paper. 1987. № 42. P. 1–8.
4. Аубакиров Т.О., Желанников А.И., Иванов П.Е., Ништ М.И. Спутные следы и их воздействие на летательные аппараты. Моделирование на ЭВМ. Алматы, 1999. 280 с.
5. Rossow V.J. Lift-generated vortex wakes of subsonic transport aircraft // Progr. Aerospace Sci. 1999. V. 35. № 6. P. 507–660.

6. Crow S.C., Bate E.R. Lifespan of trailing vortices in a turbulent atmosphere // *J. Aircraft*. 1976. V. 13. № 7. P. 476–482.
7. Корнев Н.В. Неустойчивость и нелинейная динамика концевых вихрей над твердой поверхностью в идеальной жидкости // *Изв. РАН. МЖГ*. 1997. № 2. С. 103–109.
8. Kornev N.V., Reichert G. Three-dimensional instability of a pair of trailing vortices near the ground // *AIAA Journal*. 1997. V. 35. № 10. P. 1667–1669.
9. Gaifullin A.M., Soudakov G.G. Aircraft vortex wake dynamics // *AIAA Paper*. 1996. № 965547. 7 p.
10. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
11. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
12. Stuever R.A., Green G.C. An analysis of relative wake-vortex hazards for typical transport aircraft // *AIAA Paper*. 1994. № 940810. 15 p.
13. Брага В.Г., Лысенко Н.М., Микиртумов Э.Б. и др. Практическая аэродинамика самолетов с турбореактивными двигателями. М.: Воениздат, 1969. 408 с.
14. Kuzmin V.P. Estimation of wake-vortex separation distances for approaching aircraft // *Trudy TsAGI*. 1997. V. 2627. P. 209–224.
15. Bobylev A.V., Kuzmin V.P., Yaroshevsky V.A. Mathematical simulation of the wake vortices effect on aircraft motion during automatic landing // *Trudy TsAGI*. 1997. V. 2627. P. 198–208.
16. Турбулентность. Принципы и применения / Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. М.: Мир, 1980. 535 с.
17. Greene G.C. An approximate model of vortex decay in the atmosphere // *J. Aircraft*. 1986. V. 23. № 7. P. 566–573.
18. Gaifullin A.M., Soudakov G.G., Voyevodin A.V. et al. Computation of flow in the wake behind a high-aspect-ratio wing // *Trudy TsAGI*. 1997. V. 2627. P. 33–42.
19. Sarpkaya T. Decay of wake vortices of large aircraft // *AIAA Journal*. 1998. V. 36. № 9. P. 1671–1679.

Москва

Поступила в редакцию
3.III.2000