

УДК 532.526.5

© 2001 г. ВИК.В. СЫЧЕВ

О ТЕЧЕНИИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА ОКОЛО ПЛАСТИНЫ, УСТАНОВЛЕННОЙ ПОД МАЛЫМ УГЛОМ АТАКИ

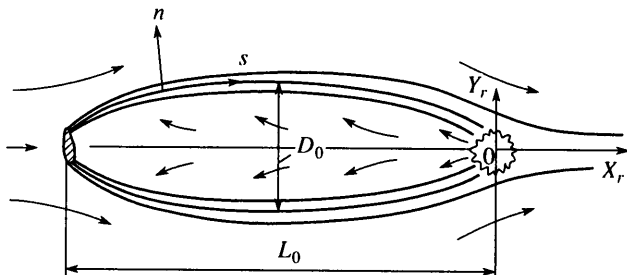
На основе асимптотического анализа системы уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса (Re) исследовано плоское течение несжимаемой жидкости около пластины, обтекаемой однородным потоком под малым углом атаки α^* . Детально изучена структура течения вблизи передней кромки. Установлено, что зарождение отрыва происходит в малой ее окрестности при $\alpha^* = O(Re^{-1/2})$, а при $\alpha^* = O(Re^{-1/4})$ длина области медленных возвратных токов становится величиной $O(1)$. Обнаружена неединственность решения при $\alpha^* = O(Re^{-1/4})$ и дано объяснение явлению гистерезиса. Показано, что полученные решения при определенных условиях справедливы и для течений около тел с малой толщиной.

Исследование асимптотической структуры отрывного течения при обтекании тел однородным потоком несжимаемой жидкости (т.е. при стационарных краевых условиях и больших числах Рейнольдса (Re)) относится к числу наиболее интересных и давно привлекающих внимание (см. [1]). К настоящему времени имеются по крайней мере две точки зрения относительно решения этой проблемы для плоских течений. В основе первой из них [2] лежит предположение о конечности величины сопротивления тела, конечной относительной толщины или установленного под конечным углом атаки, при $Re \rightarrow \infty$. При этом в масштабах тела в пределе при $Re \rightarrow \infty$ имеет место течение идеальной жидкости со свободными линиями тока по схеме Кирхгофа (см. [3]). Это означает, что вниз по потоку застойная зона расширяется по параболическому закону. Смыкание области медленного возрастного течения происходит далеко за телом на расстоянии порядка Re , так что эта область имеет длину и ширину порядка Re и $Re^{1/2}$ соответственно [2]. Дальнейший асимптотический анализ [4] показал, что отмеченное исходное предположение о конечности сопротивления с неизбежностью приводит к возникновению локальной зоны нестационарного течения в области смыкания слоев смешения.

Результаты [2] были использованы при изучении течений около тонких тел. Так, в [5] было рассмотрено симметричное обтекание клина, а в [6] (см. также [7, 8]) проведено важное исследование симметричного обтекания гладких тел различной формы. Наконец, в [9–12] результаты [6] были распространены на течения около тел, установленных под малыми (порядка толщины тела) углами атаки.

Согласно другому подходу к данной проблеме, развитому в [13, 14] (см. обзор [15]) и не использующему каких-либо исходных предположений, течение всюду является стационарным и при этом сопротивление затупленного тела стремится к нулю как Re^{-1} , а длина и ширина области возвратного течения величины порядка Re . Дальнейшие подробности, касающиеся обоих подходов, будут изложены ниже.

Данная работа, как и [5–12], основывается на результатах [2, 4] и посвящена исследованию обтекания пластины, находящейся в потоке под малым углом атаки.



Фиг. 1. Структура отрывного течения [2, 4] при больших числах Рейнольдса

Решение этой задачи представляет не только принципиальный интерес, но и, как будет показано, может быть использовано для изучения обтекания тел с учетом их толщины.

1. Рассмотрим плоское течение вязкой несжимаемой жидкости около пластины, имеющей длину l^* и установленной под углом атаки α^* к однородному набегающему потоку.

Введем следующие обозначения: l^*x, l^*y – оси прямоугольной системы координат, связанной с поверхностью пластины ($y = \pm 0$) и началом в ее передней кромке, $u_\infty u$ и $u_\infty v$ – соответствующие проекции вектора скорости, $p_\infty + \rho u_\infty^2 p$ – давление, $Re = u_\infty l^* / \nu$ – число Рейнольдса. Здесь u_∞, p_∞ – скорость и давление в набегающем потоке, ρ – плотность и ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости. Через C_d и C_l будем обозначать коэффициенты силы сопротивления и подъемной силы, получаемые путем отнесения последних к $\rho u_\infty^2 l^* / 2$.

При конечных значениях угла атаки α^* течение в масштабах тела ($x = O(1)$, $y = O(1)$) при $Re \rightarrow \infty$ описывается решением по схеме Кирхгофа. В целом же (фиг. 1) область медленного возвратного течения, обусловленного эжектирующим действием слоев смешения, развивающихся вдоль свободных линий тока, согласно [2], имеет в первом приближении форму эллипса. Его главная ось совпадает с направлением набегающего потока, а длина L_0 и максимальная ширина D_0 суть

$$\begin{aligned} L_0 &= L_0^* Re, \quad D_0 = D_0^* Re^{1/2} \\ L_0^* &= 0,392 C_d^{\circ 2}, \quad D_0^* = 0,500 C_d^{\circ 1/2} \\ p &= Re^{-1/2} P_0 + O(Re^{-1}), \quad P_0 = -1,274 C_d^{\circ 1/2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где C_d° – коэффициент сопротивления в решении по схеме Кирхгофа. Для рассматриваемого течения согласно Рэлею (см. [3]) $C_d^{\circ} = 2\pi \sin^2 \alpha^* / (4 + \pi \sin \alpha^*)$. В (1.1) также приведено асимптотическое представление для давления в области возвратного течения.

Прежде чем переходить к задаче для малых значений α^* , остановимся на одном вопросе, касающемся течения вблизи точки смыкания зоны отрыва (фиг. 1). Здесь, согласно [4] (см. также гл. 6 в [1]), неизбежно существование локальной области нестационарного хаотического вихревого течения. Изменения (безразмерных) составляющих вектора скорости и давления в этой области суть величины порядка единицы, а ее размеры – порядка характерного размера тела [2]. Краевые условия, обеспечивающие сращивание с разложениями в соседних областях, в [4] стационарны. В то же время существует [16] стационарное решение, описывающее течение в окрестности точки смыкания. Может создаться впечатление (см. [15]), что результаты работ [2, 4] и [16] противоречат друг другу. Покажем, что это не так.

Введем прямоугольную систему координат l^*X_r, l^*Y_r , начало которой находится на расстоянии l^*L_0 от тела, а ось X_r параллельна вектору скорости набегающего потока (фиг. 1). Свобод-

ные линии тока при приближении к области смыкания имеют параболическую форму. Поэтому для них, согласно [2, 4] (см. (1.1)), при $X_r \rightarrow -\infty$

$$Y_r = Y_r^\circ(X_r) \rightarrow \pm K^\circ (-X_r)^{1/2} \quad (1.2)$$

$$K^\circ = \left(\frac{2C_d^\circ}{\pi} \right)^{1/2} = 1,008 L_0^{*1/4}, \quad C_d^\circ = 2I_0$$

Здесь $2I_0$ – безразмерный поток количества движения внутренних частей ($n < 0$, фиг. 1) автомодельных слоев смешения при подходе к области смыкания (или если внутренняя переменная $X_r \rightarrow -\infty$). Это соответствует вкладу $-2I_0$ в общий поток количества движения через контрольную поверхность, которая охватывает рассматриваемую область на достаточно большом расстоянии. Толщина потери импульса внешних частей слоев смешения при подходе к области смыкания также равна $2I_0$ (гл. 6 в [1]). В то же время $C_d^\circ/2$ должно быть равно толщине потери импульса в следе за областью смыкания. Поэтому, а также вследствие того, что $C_d^\circ - 2I_0 = 0$ (см. (1.2)), суммарный поток количества движения вместе с интегралом нормального давления по контрольной поверхности в проекции на ось X_r равен нулю.

Если предположить, что течение в рассматриваемой области стационарно, то вследствие справедливости интеграла Бернулли возникает возвратная струя, начальный профиль скорости которой ($X_r \rightarrow -\infty$, $Y_r = O(1)$) состоит из перевернутых профилей внутренних частей проходящих слоев смешения [2]. Поэтому поток количества движения через контрольную поверхность за счет струи равен $-2I_0$, а с учетом внутренних частей слоев смешения его величина равна $-4I_0$. Следовательно, коэффициент K° из (1.2), который в задаче [16] (в отличие от [2,4]) является искомым параметром, должен быть здесь в $\sqrt{2}$ раз больше, т.е. (см. (1.2)) $K^\circ = 1,426 L_0^{*1/4}$. Решение, соответствующее такому локальному стационарному течению и не связанное с решением задачи в целом, и было получено в [16], где K° было найдено численно равным $1,30 L_0^{*1/4}$.

Краевые условия в [4] отличаются от внешних условий в [16] не только различием постоянных K° и соответственно отсутствием и существованием возвратной струи, но и тем, что профиль скорости в ближнем следе ($X_r \rightarrow \infty$, $Y_r = O(1)$) для нестационарного течения [4] будет выработаться отличным от имеющихся во внешних частях проходящих автомодельных слоев смешения, хотя и обладающим той же толщиной потери импульса.

По существу все сказанное является также более сложным, чем в [4], обоснованием невозможности образования струи, а следовательно, и локальной нестационарности, не влияющей на структуру течения в целом.

Перейдем теперь к рассмотрению течения при малых значениях угла атаки α^* . Пусть $\alpha^* = \varepsilon\alpha$, где $\varepsilon = \varepsilon(\text{Re}) \rightarrow 0$ и $\alpha = O(1)$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$. Найдем область изменения параметра ε , в которой оставались бы в силе описанные выше результаты [2]. Для этого необходимо, чтобы размер L_0 в (1.1) был велик и в масштабах тела было справедливо решение Кирхгофа. Последнее может быть получено или на основании теории малых возмущений для течений со свободными линиями тока, развитой Тулиным (см. обзоры [17, 18]), или в данном случае из самого решения Кирхгофа (см. [19])

$$u = 1 + \varepsilon U(x, y) + o(\varepsilon), \quad v = \varepsilon V(x, y) + o(\varepsilon)$$

$$p = \varepsilon P(x, y) + o(\varepsilon), \quad y_s^\pm = \varepsilon S_\pm(x) + o(\varepsilon) \quad (1.3)$$

$$U - iV = \omega(z), \quad U = -P, \quad z = x + iy$$

$$\omega = -i\alpha \left(\frac{1+z^{1/2}}{z^{1/2}} \right)^{1/2}, \quad \frac{dS_\pm}{dx} = V(x, \pm 0)$$

$$C_d^\circ = \varepsilon^2 \frac{\pi\alpha^2}{2} + O(\varepsilon^3), \quad C_l^\circ = \varepsilon \frac{\pi\alpha}{2} + O(\varepsilon^2) \quad (1.4)$$

$$x \rightarrow \infty: S_{\pm} - \alpha x = \pm \alpha x^{1/2} - \frac{\alpha}{8} \ln x + O(1)$$

Это решение удовлетворяет условиям: $\omega(\infty) = -i\alpha$, непротекания ($V = 0$) на нижней стороне пластины ($y = -0$, $0 < x < 1$) и постоянства скорости ($U = 0$) вдоль свободных линий тока, форма которых определяется функциями $S_{\pm}(x)$. Знаки плюс и минус всюду относятся соответственно к верхней и нижней из них.

Вблизи передней кромки решение (1.4) имеет особенность вида

$$\begin{aligned} z \rightarrow 0: \omega &= -i\kappa_0 z^{-1/4} + O(z^{1/4}), \quad \kappa_0 = \alpha \\ x \rightarrow +0: S_{+} &= \frac{4}{3} \kappa_0 x^{3/4} + O(x^{5/4}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Поэтому асимптотическое разложение (1.3) теряет свою равномерную пригодность при $z = O(\varepsilon^4)$. В этой области изменения скорости и давления суть величины порядка единицы и решение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon^4 x', \quad y = \varepsilon^4 y' \\ u &= u'(x', y') + o(1), \quad v = v'(x', y') + o(1) \\ p &= p'(x', y') + o(1) \end{aligned} \quad (1.6)$$

В результате подстановки этого разложения в исходную систему уравнений Навье–Стокса приходим (при условии, что $\varepsilon^4 \text{Re} \rightarrow \infty$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$) к следующей задаче для потенциального течения идеальной жидкости около полубесконечной пластины:

$$\begin{aligned} u' - iv' &= \tau'(z'), \quad z' = x' + iy', \quad u'^2 + v'^2 + 2p' = 1 \\ y' &= -0, \quad x' > 0: \text{Im } \tau' = 0; \quad y' = S'(x'): \quad p' = 0 \\ z' \rightarrow \infty: \tau' &= 1 - i\kappa_0 z'^{-1/4} + O(z'^{-1/2}), \quad \kappa_0 = \alpha \end{aligned} \quad (1.7)$$

Краевые условия в (1.7) обеспечивают (фиг. 2) непротекание на нижней стороне пластины ($y' = -0$), постоянство скорости на свободной линии тока OA , форма которой определяется неизвестной заранее функцией $S'(x')$, а также (при $z' \rightarrow \infty$) возможность сращивания с разложением (1.3), (1.5).

Решение задачи (1.7) было найдено Сарантонелло [20, 3] в качестве одного из возможных решений задачи об обтекании пластины однородным потоком. Оно имеет вид

$$\frac{48}{17\kappa_0^4} z' - 1 = \frac{16}{17} \left[\frac{3\tau'}{(1-\tau')^4} + \frac{1}{(1-\tau')^3} - 1 \right], \quad \kappa_0 = \alpha \quad (1.8)$$

В точке торможения K (фиг. 2) $x' = 17\kappa_0^4 / 48$, $y' = -0$.

Если ввести в рассмотрение локальное число Рейнольдса $\text{Re}^* = \varepsilon^4 \text{Re}$, то (1.6), (1.8) играет роль предельного решения при $\text{Re}^* \rightarrow \infty$ в области $z' = \varepsilon^4 z = O(1)$. Поэтому здесь для описания течения в слое смещения вдоль линии OA и в пограничном слое на нижней стороне пластины, а также в области возвратных токов между линиями OA и OB (фиг. 2), где $u = O(\text{Re}^{*-1/2})$, в полной мере применимы результаты асимптотической теории отрыва от угловых точек [21, 22]. В частности, решение (1.8) имеет особенность в точке схода свободной линии тока

$$\tau' = -1 - 2k_0 z'^{1/2} + O(z'), \quad z' \rightarrow 0, \quad k_0 = 2\sqrt{2} / \kappa_0^2$$

Поэтому пограничный слой на нижней стороне пластины при $x' \rightarrow +0$ находится под действием сингулярного благоприятного градиента давления. В малой окрестности точки $z' = 0$ лежит область взаимодействия этого пограничного слоя с внешним потоком. Ее размер, согласно [21], $z' = O(\text{Re}^{-4/9})$.

Таким образом, решение Сарантонелло (1.8) имеет смысл локального решения в области неприменимости теории малых возмущений для течений со свободными линиями тока при обтекании тел с острой передней кромкой.

Вернемся к рассмотрению течения в масштабах тела. В слое смешения, который развивается вдоль верхней свободной линии тока, оно описывается известным (см. [23]) решением

$$\begin{aligned} s &= O(1), \quad n = \text{Re}^{-1/2} N \\ \psi &= \text{Re}^{-1/2} s^{1/2} f(\eta) + o(\text{Re}^{-1/2}), \quad \eta = N / s^{1/2} \\ 2f''' + ff'' &= 0, \quad f'(\infty) = 1, \quad f(0) = f'(-\infty) = 0 \\ f''(0) &= 0, \quad 1996, \quad f(-\infty) = -d_0 = -1,2386 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Его автомодельность обусловлена тем, что в масштабах области $z' = \varepsilon^4 z = O(1)$ при $x' \rightarrow \infty$ слой смешения вдоль линии тока $O A$ имеет автомодельную асимптотику. В (1.9) и ниже ψ – функция тока и s, n – ортогональные криволинейные координаты, связанные со свободной линией тока.

Аналогично вдоль нижней стороны пластины справедливо решение Блазиуса (см. [23])

$$\begin{aligned} x &= O(1), \quad y = -\text{Re}^{-1/2} Y, \quad 0 < x < 1, \quad Y \leq 0 \\ \psi &= -\text{Re}^{-1/2} x^{1/2} F(\xi) + o(\text{Re}^{-1/2}), \quad \xi = Y / x^{1/2} \\ -F''(0) &= a_0 = 0,3321 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Вблизи задней кромки решение (1.3), (1.4) имеет особенность того же типа, что и (1.8) при $z' \rightarrow 0$. Так

$$\varepsilon^{-1} p = P(x, -0) = 2^{-1/2} \alpha (1-x)^{1/2} + O((1-x)^{3/2}), \quad x \rightarrow 1-0$$

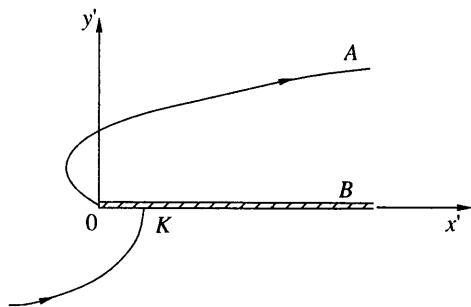
Структура и решение для возникающей здесь области взаимодействия были также детально изучены А.И. Рубаном (гл. 2 в [1], см. также [24]). Минуя область взаимодействия, пограничный слой Блазиуса переходит в слой смешения. Численное решение краевой задачи для последнего было получено в [25]. При $x \rightarrow \infty$ этот слой имеет автомодельную асимптотику вида (1.9). Наконец, в области возвратных токов, имеющей при $x = O(1)$ поперечный размер $y = O(\varepsilon)$, в соответствии с (1.9)

$$\psi = O(\text{Re}^{-1/2}), \quad u = O(\text{Re}^{-1/2} \varepsilon^{-1}) \quad \text{и} \quad p - \text{Re}^{-1/2} P_0 = O(\text{Re}^{-1} \varepsilon^{-2})$$

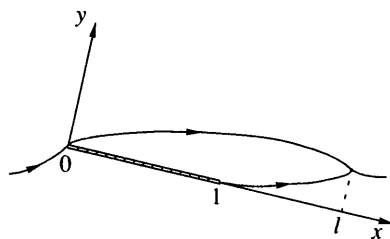
Пограничный слой внутри этой области на верхней стороне пластины имеет толщину $O(\text{Re}^{-1/4} \varepsilon^{1/2})$.

Обратимся к рассмотрению течения в целом. Длина L_0 области медленного возвратного течения (см. (1.1)) должна расти при $\text{Re} \rightarrow \infty$. Вспоминая выражение для C_d^0 в (1.4), находим, что это так, если $\varepsilon^4 \text{Re} \rightarrow \infty$, т.е. $\alpha^* \gg \text{Re}^{-1/4}$. Такое условие было необходимо также при получении (1.7). Как только ε становится равным $\text{Re}^{-1/4}$, значение $L_0 = O(1)$.

Итак, течение по схеме Кирхгофа в масштабах тела имеет место при углах атаки $\alpha^* = \varepsilon \alpha \gg \text{Re}^{-1/4}$. Переход к течению с $L_0 = O(1)$ происходит при $\varepsilon = \text{Re}^{-1/4}$. Точно так



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Схема течения в окрестности передней кромки пластины, иллюстрирующая решение Сарантонелло

Фиг. 3. Схема течения около пластины при $l > 1$

же обстоит дело при обтекании клина [5], где вместо α^* фигурирует его безразмерная толщина h^* . В то же время при обтекании гладких тел [6] переход к течениям с $L_0 = O(1)$ происходит при толщинах $h^* = O(\text{Re}^{-1/6})$. Это связано с различием механизмов отрыва пограничного слоя от гладкой поверхности и угловых точек тела (см. [1]).

2. Перейдем к рассмотрению течения при углах атаки $\alpha^* = \text{Re}^{-1/4} \alpha$. Поскольку $L_0 = O(1)$, а давление в области медленных возвратных токов в главном члене постоянно и порядка $\text{Re}^{-1/4}$ (см. (1.1), (1.3), (1.4)), решение задачи в масштабах тела, согласно [5,6], должно основываться на теории малых возмущений для течений идеальной жидкости с застойными зонами конечных размеров. Пусть длина такой зоны $L_0 = l > 1$, т.е. точка ее смыкания находится за задней кромкой пластины (фиг. 3). Рассмотрим сначала этот случай.

Асимптотическое представление имеет вид (1.3) (см. [17]) с $\varepsilon = \text{Re}^{-1/4}$ и соответствующее решение есть [26]

$$U - iV = \omega(z), \quad U = -P, \quad z = x + iy$$

$$\omega = \Omega(\zeta) = i \left(\frac{\zeta + b}{\zeta} \right)^{1/2} (A\zeta + B) - p_0$$

$$\zeta = \left(\frac{z}{l-z} \right)^{1/2}, \quad b = (l-1)^{-1/2}, \quad l = \left(\cos \frac{\gamma}{2} \right)^{-2} \quad (2.1)$$

$$A = \left(\sin \frac{\gamma}{2} \right)^{1/2} (\alpha S - p_0 C), \quad S = \sin \left(\frac{\gamma - \pi}{4} \right)$$

$$B = - \left(\sin \frac{\gamma}{2} \right)^{1/2} (\alpha C + p_0 S), \quad C = \cos \left(\frac{\gamma - \pi}{4} \right)$$

$$p_0 = -\alpha(l-1)^{-1/2}$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \omega = -i\alpha + i\beta^* z^{-1} + O(z^{-2})$$

$$\beta^* = \frac{c_l}{4\pi}, \quad c_l = \frac{\alpha\pi}{\sin(\gamma/2)(1 + \sin(\gamma/2))}$$

$$C_l = \text{Re}^{-1/4} c_l + o(\text{Re}^{-1/4})$$

Это решение удовлетворяет тем же краевым условиям, что и (1.4), а также условию замкнутости зоны постоянного давления, в которой $P = p_0$. Вблизи передней кромки главный член разложения решения (2.1) имеет вид (1.5) с $\kappa_0 = -b^{1/2}l^{1/4}B > 0$. Поэтому, как и раньше, в области неприменимости теории малых возмущений $z = O(\varepsilon^4) = O(\text{Re}^{-1})$ справедливо разложение (1.6). Точки торможения и отрыва находятся внутри этой области. Искомые функции из (1.6) удовлетворяют системе полных уравнений Навье – Стокса с локальным числом Рейнольдса $\text{Re}^* = \varepsilon^4 \text{Re} = 1$ при следующих краевых условиях:

$$y = \pm 0, \quad x > 0: \quad u = v = 0; \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \theta = \text{arctg}(y/x)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi: \quad u \rightarrow 1 - r^{-1/4} \kappa_0 \sin(\theta/4)$$

$$v \rightarrow r^{-1/4} \kappa_0 \cos(\theta/4), \quad p \rightarrow r^{-1/4} \kappa_0 \sin(\theta/4)$$

$$x \rightarrow \infty, \quad \eta = (y - 4/3 \kappa_0 x^{3/4}) / x^{1/2} = O(1): \quad \psi \rightarrow x^{1/2} f(\eta) \quad (2.2)$$

$$x \rightarrow \infty, \quad \chi = y / x^{3/4} = O(1): \quad \psi \rightarrow -d^0 x^{1/2} \chi$$

$$u \rightarrow -d^0 x^{-1/4}, \quad p \rightarrow -\frac{d^{0^2}}{2} x^{-1/2}, \quad d^0 = \frac{3d_0}{4\kappa_0}$$

$$x \rightarrow \infty, \quad t = y / x^{3/8} = O(1): \quad \psi \rightarrow x^{3/8} \varphi(t)$$

$$\varphi''' + \frac{3}{8} \varphi \varphi'' + \frac{1}{4} \varphi'^2 = \frac{d^{0^2}}{4}, \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(\infty) = -d^0$$

$$x \rightarrow \infty, \quad y \leq 0, \quad \xi = -y / x^{1/2} = O(1): \quad \psi \rightarrow -x^{1/2} F(\xi)$$

(Штрихи в обозначениях для переменных из (1.6) здесь опущены.) Эти условия обеспечивают прилипание на поверхности, сращивание с разложением (1.3), (1.5), а также (при $\eta = O(1)$) с разложением (1.9) для слоя смещения вдоль верхней свободной линии тока. Значения $\chi = O(1)$ соответствуют области возвратного течения. Наконец, для удовлетворения условию прилипания при $x \rightarrow \infty$ введены подслои: внутри области возвратных токов при $t = O(1)$ и на нижней стороне пластины ($\xi = O(1)$). Последний дает выход на решение Блазиуса (1.10). Решение задачи для $\varphi(t)$ в (2.2) хорошо известно (см. [23]).

Система соотношений (2.1) не замкнута – один из параметров p_0 или l произволен. Для ее замыкания, следуя [2], воспользуемся следующими соображениями. Коэффициент сопротивления пластины

$$C_d = \text{Re}^{-1/2} (c_d + c_d^-) + o(\text{Re}^{-1/2}) \quad (2.3)$$

$$c_d = \frac{\pi \alpha^2}{\sin(\gamma/2)(1 + \sin(\gamma/2))}, \quad c_d^- = 1,328$$

Здесь c_d определяется [26] решением (2.1) и c_d^- – решением Блазиуса (1.10) (см. [23]). В то же время сопротивление пластины равно интегралу сил трения вдоль верхней и нижней нулевых линий тока (фиг. 3) в проекции на направление набегаю-

щего потока: $C_d = \text{Re}^{-1/2}(T^+ + T^- + c_d^-) + o(\text{Re}^{-1/2})$. Тогда в соответствии с (2.3)

$$T^+ + T^- = c_d \quad (2.4)$$

$$T^+ = 2 \int_0^l \tau^+ ds = 4f''(0)\sqrt{l}, \quad T^- = -2 \int_1^l \tau^- ds$$

При вычислении $\text{Re}^{-1/2} T^+(l)$ – интеграла сил трения вдоль верхней разделительной линии тока, отнесенного к $\rho u_\infty^2 l^* / 2$, использовалось автомодельное решение (1.9). Решение [25] для слоя смешения вдоль нижней свободной линии тока неавтомодельно, поэтому значение $T^-(l)$ может быть получено только численно. Итак, соотношения (2.3), (2.4) дают недостающую связь для (2.1).

Решение (2.1) имеет [17, 26] особенность в точке смыкания застойной зоны

$$z \rightarrow l: \quad \omega = ir_0(l-z)^{-1/2} + O(1), \quad r_0 = Al^{1/2} > 0$$

$$x \rightarrow l-0: \quad S_\pm = \pm 2r_0(l-x)^{1/2} + O((l-x))$$

$$x \rightarrow l+0: \quad P(x, 0) = r_0(x-l)^{-1/2} + O(1) \quad (2.5)$$

Область непригодности решения теории малых возмущений вблизи точки смыкания всегда имеет размеры порядка толщины слоя смешения (фиг. 1). В данном случае ($\epsilon = \text{Re}^{-1/4}$), согласно (1.3), (2.5) и (1.9), это $x-l = O(\text{Re}^{-1/2})$, $y = O(\text{Re}^{-1/2})$. В этой области изменения скорости и давления величины порядка единицы. Причем, повторяя рассуждения работы [4], приходим к выводу, что возвратной струи, имеющей в данном случае толщину $O(\text{Re}^{-1/2})$ и скорость $O(1)$ и исходящей из этой области, возникнуть не может и здесь локально неизбежна нестационарность течения.

Течение в области возвратных токов вызывается [2] эжектирующим действием слоев смешения (см. фиг. 1), в которых $\psi = O(\text{Re}^{-1/2})$. Поэтому здесь

$$x = O(1), \quad y = \text{Re}^{-1/4} y^\circ$$

$$\psi = \text{Re}^{-1/2} \psi^\circ(x, y^\circ) + o(\text{Re}^{-1/2}), \quad u = \text{Re}^{-1/4} u^\circ(x, y^\circ) + o(\text{Re}^{-1/4}) \quad (2.6)$$

$$p = \text{Re}^{-1/4} p_0 + \text{Re}^{-1/2} p^\circ(x, y^\circ) + o(\text{Re}^{-1/2}); \quad u^\circ = \frac{\partial \psi^\circ}{\partial y^\circ}$$

$$\frac{\partial^2 \psi^\circ}{\partial y^{\circ 2}} = \frac{dH^\circ}{d\psi^\circ}, \quad p^\circ = P^\circ(x), \quad \frac{1}{2} u^{\circ 2} + P^\circ = H^\circ(\psi^\circ)$$

Решение этой задачи должно удовлетворять условиям сращения с решениями для слоев смешения (см. (1.9)) и условию непротекания на поверхности пластины

$$y^\circ = S_+(x), \quad 0 < x < l: \quad \psi^\circ = -d_0 x^{1/2}$$

$$y^\circ = S_-(x), \quad 1 < x < l: \quad \psi^\circ = Q(x) \quad (2.7)$$

$$y^\circ = +0, \quad 0 < x < 1: \quad \psi^\circ = 0$$

где $Q(x) > 0$ – значение функции тока на внутренней границе нижнего слоя смешения. Для построения решения необходимо также знать функцию $dH^\circ/d\psi^\circ$, которая определяет распределение завихренности вдоль линий тока, исходящих из области смыкания слоев смешения. В этой области течение нестационарно [4] и должно носить хаотический характер (гл. 6 в [1]). Однако независимо от вида $H^\circ(\psi^\circ)$ разложение (2.6) при $x \rightarrow +0$, $\chi = y^\circ / x^{3/4} = O(1)$ сращивается с (2.2), а при $x \rightarrow l-0$, с учетом (2.5), (2.7)

имеем

$$\psi^\circ = h(\mu) + O((l-x)), \quad P^\circ = (l-x)^{-1} \pi_0 + O(1) \quad (2.8)$$

$$\mu = y^\circ / (l-x)^{1/2}; \quad h = q_0 \mu + q_1, \quad \pi_0 = -q_0^2 / 2$$

$$q_0 = -(d_0 l^{1/2} + Q_0) / 4r_0, \quad q_1 = (Q_0 - d_0 l^{1/2}) / 2, \quad Q_0 = Q(l)$$

Следовательно, согласно (2.6), (2.8) и (2.5), (2.1), при $x-l = O(\text{Re}^{-1/2})$, $y = O(\text{Re}^{-1/2})$ (область смыкания) изменения скорости и давления становятся величинами порядка единицы.

Наконец, пограничный слой на верхней стороне пластины в области возвратных токов, имеющий толщину $O(\text{Re}^{-3/8})$, при $x \rightarrow +0$ переходит в подслой $t = O(1)$ в (2.2).

Заметим, что при $l \rightarrow \infty$, $z = O(1)$ описанное выше решение (2.1), (2.3), (2.4) переходит в (1.4), а при $l \rightarrow \infty$, $z l^{-1} = O(1)$ – в решение, соответствующее обтеканию тонкого эллипса (см. (1.1)). При этом $\alpha = O(l^{1/4})$ и $p_0 = O(l^{-1/4})$. Следовательно, решение для $\alpha^* = O(\text{Re}^{-1/4})$ непрерывным образом переходит в решение при $\alpha^* \gg \text{Re}^{-1/4}$.

3. Из (2.1), (2.3), (2.4) следует, что при $\alpha = O(1)$ точка смыкания находится на конечном расстоянии от задней кромки и приближается к ней ($l \rightarrow 1+0$), если только α мало. Покажем это. Совершим в (2.1), (2.3), (2.4) предельный переход: $\alpha = \sigma \alpha_0$, $\sigma = \sigma(\text{Re}) \rightarrow 0$, $\alpha_0 = O(1)$, $\text{Re} \rightarrow \infty$.

В результате при $z = O(1)$, т.е. в масштабах тела, получаем

$$\alpha = \sigma \alpha_0, \quad l-1 = \sigma^4 l_0 + O(\sigma^6), \quad T^+(1) = 4f''(0) = \pi \alpha_0^2 l_0^{-1/2}$$

$$\omega = \sigma^{-1} \Omega^\circ(\zeta^\circ) + o(\sigma^{-1}), \quad \zeta^\circ = \left(\frac{z}{1-z} \right)^{1/2}$$

$$\Omega^\circ = \frac{\alpha_0}{\sqrt{l_0}} \left[\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{(\zeta^\circ - 1)}{\sqrt{\zeta^\circ}} + 1 \right] \quad (3.1)$$

$$p_0 = \sigma^{-1} p_1 + o(\sigma^{-1}), \quad p_1 = -\alpha_0 l_0^{-1/2}$$

$$C_d = \text{Re}^{-1/2} [T^+(1) + c_d^-] + o(\text{Re}^{-1/2}), \quad T^+(1) = 0,798$$

$$C_l = \text{Re}^{-1/4} \sigma^{-1} (c_l^\circ + o(1)), \quad c_l^\circ = \pi \alpha_0 l_0^{-1/2}$$

Таким образом, точка смыкания зоны отрыва приближается к задней кромке пластины на расстояние $O(\sigma^4)$, нижняя свободная линия тока исчезает (в масштабах тела) и интеграл сил трения в (2.4) стремится к $T^+(1)$. Из (3.1) с использованием (1.3), (1.4) приходим к следующим выражениям для формы свободной линии тока и распределения давления на нижней стороне пластины:

$$y_s^+ = \text{Re}^{-1/4} \sigma^{-1} s_+(x) + o(\text{Re}^{-1/4} \sigma^{-1})$$

$$p = \text{Re}^{-1/4} \sigma^{-1} P'(x, y) + o(\text{Re}^{-1/4} \sigma^{-1}) \quad (3.2)$$

$$\frac{ds_+}{dx} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2l_0}} \frac{(1-\xi^\circ)}{\sqrt{\xi^\circ}}, \quad \xi^\circ = \left(\frac{x}{1-x} \right)^{1/2}$$

$$P'(x, -0) = p_e^- = \frac{\alpha_0}{\sqrt{l_0}} \left(\frac{\xi^\circ + 1}{\sqrt{2\xi^\circ}} - 1 \right), \quad 0 < x < 1$$

Из (3.2), (3.1) следует, что при $\sigma \rightarrow 0$ происходит увеличение поперечного размера зоны отрыва и падение давления в ней, приводящее к росту подъемной силы. Сила сопротивления пластины, начиная с некоторого значения α , становится меньше, чем при нулевом угле атаки, когда $C_d = \text{Re}^{-1/2}(2c_d^- + o(1))$. Это связано с тем, что величина трения вдоль разделительной линии тока меньше, чем на поверхности пластины (см. (1.9), (1.10)).

Значения некоторых параметров в (3.1), (3.2) неограниченно растут при $\sigma \rightarrow 0$, поэтому необходимо найти минимальное значение α , до которого оставалось бы в силе это решение.

Вблизи передней кромки разложение для $\omega(z)$ имеет вид (1.5) с $\kappa_0 = \sigma^{-1}\alpha_0 / \sqrt{2l_0}$. Следовательно, при $z = O(\sigma^{-4} \text{Re}^{-1})$ асимптотическое разложение (1.3), (3.1) становится непригодным. Ясно, что здесь, как и при $\alpha^* \gg \text{Re}^{-1/4}$ (разд. 1), течение описывается решением Сарантонелло (1.6), (1.8) и никаких ограничений на σ , кроме очевидного $\sigma^{-4} \text{Re}^{-1} \rightarrow 0$, не возникает.

Рассмотрим течение вблизи задней кромки. Из (3.2) следует, что $dp_e^- / dx > 0$ при $x > 1/2$, более того, при $x \rightarrow 1 - 0$

$$\frac{dp_e^-}{dx} = \frac{\alpha_0}{4\sqrt{2l_0}}(1-x)^{-5/4} + O((1-x)^{-3/4}) \quad (3.3)$$

Такое поведение решения проявляется лишь при малых α , а при $\alpha = O(1)$ решение (2.1) имеет при $z \rightarrow 1$ особенность того же вида, что и (1.4). Особенность (3.3) возникает вследствие присоединения свободной линии тока (в масштабах тела) на заднюю кромку.

Изучим влияние градиента давления на течение в пограничном слое. На основании (3.2) разложение для него есть

$$y = -\text{Re}^{-1/2} Y, \quad Y \leq 0, \quad 0 < x < 1 \quad (3.4)$$

$$\psi = -\text{Re}^{-1/2} [\Psi_0(x, Y) + \text{Re}^{-1/4} \sigma^{-1} \Psi_1(x, Y) + o(\text{Re}^{-1/4} \sigma^{-1})]$$

где $\Psi_0(x, Y)$ – функция Блазиуса (1.10), а $\Psi_1(x, Y)$ удовлетворяет (см. [1]) линейному уравнению, содержащему dp_e^- / dx .

При $x \rightarrow 1 - 0$ на фоне сингулярного градиента давления (3.3) в основной части пограничного слоя ($Y = O(1)$) течение является локально-невязким [27]. Действие внутреннего трения проявляется в пристеночном подслое, где $Y = O(|x^\circ|^{1/3})$, $x^\circ = x - 1 \rightarrow -0$. Асимптотическое разложение здесь в соответствии с (3.3) (см. [27]) имеет вид

$$\Psi_0 = (-x^\circ)^{2/3} \frac{a_0}{2} \tau^2 + O((-x^\circ)^{5/3}), \quad \tau = Y / (-x^\circ)^{1/3}$$

$$\Psi_1 = (-x^\circ)^{-1/4} g(\tau) + O((-x^\circ)^{1/4}), \quad a_0 = 0,3321$$

$$g''' - \frac{a_0}{3} \tau^2 g'' - \frac{a_0}{4} \tau g' + \frac{a_0}{4} g = \frac{\alpha_0}{4\sqrt{2l_0}} \quad (3.5)$$

$$g(0) = g'(0) = 0, \quad \tau \rightarrow \infty: \quad g = M_0 \tau + O(1)$$

$$M_0 = -\frac{\alpha_0}{\sqrt{2l_0}} \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(7/12)}{(3a_0)^{2/3}\Gamma(1/4)}$$

Решение уравнения для $g(\tau)$ может быть выписано через вырожденную гипергеометрическую функцию.

Согласно (1.10) и (3.5), в основной части пограничного слоя при $x^\circ \rightarrow -0$

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= \Psi_{00}(Y) + O((-x^\circ)), \quad \Psi_{00} = \Psi_0(1, Y) \\ \Psi_1 &= (-x^\circ)^{-7/12} a_0^{-1} M_0 \Psi'_{00}(Y) + O((-x^\circ)^{-1/4})\end{aligned}\quad (3.6)$$

Из (3.5) следует, что разложение (3.4) становится несправедливым при $x^\circ = O(\sigma^{-12/11} \text{Re}^{-3/11})$. Другая характерная область здесь имеет продольный размер порядка расстояния от точки смыкания зоны отрыва до задней кромки, т.е. $O(\sigma^4)$. Действительно, предельный переход $\sigma = \alpha/\alpha_0 \rightarrow 0$ при $z^* = \sigma^{-4}(z-1) = O(1)$ в (2.1), (2.3), (2.4) дает следующее решение:

$$\begin{aligned}x-1 &= x^\circ = \sigma^4 x^*, \quad y = \sigma^4 y^*, \quad z^* = x^* + iy^* \\ \omega &= \sigma^{-2} \Omega^*(\zeta^*) + o(\sigma^{-2}), \quad \zeta^* = (l_0 - z^*)^{-1/2} \\ \Omega^* &= \frac{i\alpha_0}{\sqrt{2}l_0^{1/4}} [\zeta^*(\zeta^* + l_0^{-1/2})]^{1/2} \\ z^* \rightarrow \infty: \quad \Omega^* &= \frac{i\alpha_0}{\sqrt{2}l_0} (-z^*)^{-1/4} + O((-z^*)^{-3/4})\end{aligned}\quad (3.7)$$

Приведенная здесь асимптотика при больших z^* обеспечивает сращивание с (3.1) при $z \rightarrow 1$. Для равномерной пригодности разложения (1.3), (3.7) при $z^* = O(1)$ необходимо, чтобы $\text{Re}^{-1/4} \sigma^{-2} \rightarrow 0$.

Рассмотрим решение для пограничного слоя на нижней стороне пластины при $x^\circ = O(\sigma^4)$. Значение $\sigma(\text{Re})$ выберем из условия, что в этой области становится несправедливым разложение (3.4), (3.5), т.е. $\sigma^4 = \sigma^{-12/11} \text{Re}^{-3/11}$. Тогда $\sigma = \text{Re}^{-3/56}$ и в пристеночном подслое возникает нелинейность. Ниже будет показано, что это и есть наименьшее значение $\sigma(\text{Re})$, при котором еще остаются в силе решения (3.1) и (3.7).

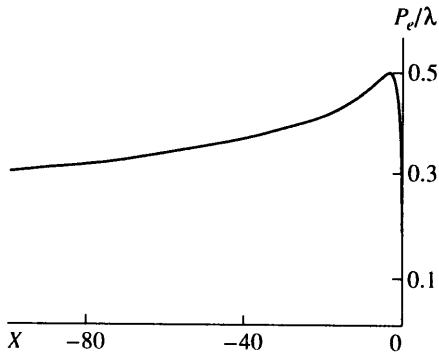
На основании сказанного и (3.2)–(3.5) разложение решения для подслоя имеет вид

$$\begin{aligned}x-1 &= x^\circ = \sigma^4 x^*, \quad y = -\text{Re}^{-1/2} \sigma^{4/3} Y^*, \quad Y^* \leq 0, \quad \sigma = \text{Re}^{-3/56} \\ \psi &= \text{Re}^{-1/2} \sigma^{8/3} [-\Psi^*(x^*, Y^*) + o(1)] \\ p &= \text{Re}^{-1/4} \sigma^{-2} P^*(x^*, Y^*) + o(\text{Re}^{-1/4} \sigma^{-2})\end{aligned}\quad (3.8)$$

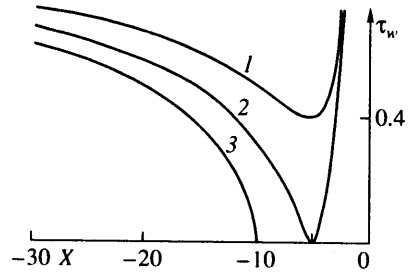
В результате подстановки (3.8) в систему уравнений Навье – Стокса приходим к следующей задаче для уравнения пограничного слоя Прандтля:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi^*}{\partial Y^*} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^* \partial Y^*} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial Y^{*2}} + \frac{dp_e^*}{dx^*} &= \frac{\partial^3 \Psi^*}{\partial Y^{*3}}, \quad P^* = p_e^*(x^*) \\ x^* < 0, \quad Y^* = 0: \quad \Psi^* &= \frac{\partial \Psi^*}{\partial Y^*} = 0; \quad Y^* \rightarrow \infty: \quad \Psi^* = \frac{a_0}{2} Y^{*2} + O(Y^*) \\ x^* \rightarrow -\infty: \quad \Psi^* &= \frac{a_0}{2} Y^{*2} + O(|x^*|^{-1/4})\end{aligned}\quad (3.9)$$

$$p_e^* = \frac{\lambda^*}{(l_0 - x^*)^{1/4}} \left(\frac{1}{\sqrt{l_0}} - \frac{1}{\sqrt{l_0 - x^*}} \right)^{1/2}, \quad x^* < 0; \quad \lambda^* = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}l_0^{1/4}}$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Распределение давления на нижней стороне пластины вблизи задней кромки

Фиг. 5. Распределение поверхностного трения на нижней стороне пластины вблизи задней кромки. Кривым 1, 2, 3 соответствуют $\lambda = 18; 23,57; 28$

Распределение давления $p_e^*(x^*)$ определяется решением (3.7), т.е. является заранее заданным. Это следует из рассмотрения течения в основной части пограничного слоя при $x^* = O(1)$. Здесь, согласно (3.4), (3.6), $v = -\partial\psi/\partial x = O(\text{Re}^{-5/4})$ и есть величина, малая по сравнению с $p = O(\text{Re}^{-1/2})$ из (3.8). Следовательно, взаимодействие не возникает. В (3.9) также приведены краевые условия, обеспечивающие условия прилипания и сращения с решениями в соседних областях.

Аффинное преобразование

$$x^* = l_0 X, \quad Y^* = a_0^{-1/3} l_0^{1/3} Y, \quad \Psi^* = a_0^{1/3} l_0^{2/3} \Psi, \quad p_e^* = a_0^{4/3} l_0^{2/3} p_e$$

приводит (3.9) к задаче того же вида, но с $a_0 = l_0 = 1$ и постоянной λ^* , замененной на $\lambda = \lambda^* a_0^{-4/3} l_0^{-7/6}$.

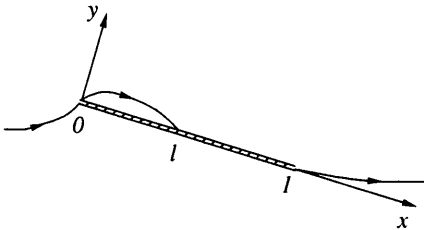
Численное решение этой задачи показывает, что из-за возрастания давления $p_e(X)$ при $X < -3$ (фиг. 4) происходит уменьшение поверхностного трения (взятого с обратным знаком) $\tau_w(X) = -\partial^2 \Psi / \partial Y^2 |_{Y=0}$ и, как и в [28], существует критическое значение параметра подобия $\lambda = \lambda_s = 23, 57$, при котором $\tau_w(X)$ впервые обращается в нуль в единственной точке $X = X_s = -5,32$ (фиг. 5). Этому λ , согласно (3.9), (3.1), соответствуют значения $l_0 = l_s = 0,097$, $\alpha_0 = \alpha_s = 0,281$ и $c_l^\circ = c_s = 2,838$. При $\lambda < \lambda_s$, ($\alpha_0 > \alpha_s$) $\tau_w(X)$ всюду положительна, а при $\lambda > \lambda_s$ (фиг. 5) в точке нулевого поверхностного трения возникает неустраняемая особенность Гольдштейна (см. [1]) и решение теряет смысл.

При $\lambda = \lambda_s$ в сечении $X = X_s$ решение имеет особенность [28] и $\tau_w(X)$ ведет себя, как $|X - X_s|$ при $|X - X_s| \rightarrow 0$. Эта особенность является устранимой. В ее малой окрестности ($X - X_s = O(\text{Re}^{-3/35})$) лежит область взаимодействия, внутри которой происходит сглаживание решения и возможно появление возвратных токов. Не останавливаясь на применении этих результатов (теория кромочного отрыва, см. [1, 29]), заметим, что, согласно им, допустима еще малая вариация λ относительно λ_s : $\lambda = \lambda_s + \text{Re}^{-6/35} \lambda_s^\circ$. При этом решение задачи для области взаимодействия не единственно и существует при λ_s° меньших некоторого.

Полученное решение задачи (3.9) для $\lambda \leq \lambda_s$ при $x^* \rightarrow -0$ ведет себя особым образом, так как

$$\frac{dp_e^*}{dx^*} = -k^*(-x^*)^{-1/2} + O((-x^*)^{1/2}), \quad x^* \rightarrow -0, \quad k^* = \frac{\alpha_0}{4l_0^{3/4}} \quad (3.10)$$

Вследствие такого поведения градиента давления для дальнейшего анализа, как и выше (разд. 1), могут быть использованы результаты теории отрыва от угловых



Фиг. 6. Схема течения около пластины при $l < 1$

точек [1, гл. 2]. В частности, нетрудно показать, что область взаимодействия в окрестности задней кромки, где действует большой благоприятный градиент давления, имеет размер $x^\circ = O(\text{Re}^{-17/42})$.

Таким образом было рассмотрено течение при $\sigma = \text{Re}^{-3/56}$. Здесь следует заметить, что если $\sigma \gg \text{Re}^{-3/56}$, то при $x^\circ = O(\sigma^4)$ в пристеночном подслое имеет место течение с заданным градиентом давления (3.9), однако задача здесь линейна и соответствует (3.9) при малых λ . В силу (3.10), как и в [1, гл. 2], в непосредственной окрестности задней кромки при $\sigma \gg O(\text{Re}^{-3/64})$ лежит область взаимодействия с размером $x^\circ = O(\text{Re}^{-3/8})$. Если же $\text{Re}^{-3/56} \ll \sigma \ll \text{Re}^{-3/64}$, то размер последней $x^\circ = O(\sigma^{40/9} \text{Re}^{-1/6})$ и между ней и областью $x^\circ = O(\sigma^4)$ лежит промежуточная область [1, гл. 2] с $x^\circ = \text{Re}^{3/2} \sigma^{24} x^\circ = O(1)$, в которой действует большой благоприятный градиент давления (см. (3.10))

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\Delta^* k^*(-X^\circ)^{-1/2} + o(\Delta^*), \quad \Delta^* = \sigma^8 \text{Re}^{1/2}, \quad X^\circ < 0$$

Итак, полученное решение справедливо до минимального значения угла атаки $\alpha^* = \text{Re}^{-17/56} \alpha_s$, ($\sigma = \text{Re}^{-3/56}$). При этом точка смыкания зоны отрыва может подходить к задней кромке на расстояние $\text{Re}^{-3/14} l_s$, а коэффициент подъемной силы достигать значения $\text{Re}^{-11/56} c_s$. Возникают по крайней мере два вопроса: что происходит при дальнейшем уменьшении угла атаки и когда наконец течение станет безотрывным? Для ответа на них вернемся вновь к рассмотрению течения при угле атаки $\alpha^* = O(\text{Re}^{-1/4})$, но при условии, что точка смыкания зоны отрыва находится на поверхности пластины (фиг. 6).

4. Итак, пусть $l < 1$. В этом случае решение задачи в масштабах тела имеет вид [19]

$$U - iV = \omega(z), \quad U = -P, \quad z = x + iy$$

$$\omega = \Omega'(\zeta^\circ) = [\zeta^\circ(\zeta^\circ - b^\circ)]^{-1/2}(A^\circ \zeta^\circ + B^\circ) - p_0$$

$$\zeta^\circ = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{1/2}, \quad b^\circ = \left(\frac{l}{1-l}\right)^{1/2}, \quad l = \cos^2 \frac{\gamma^\circ}{2}$$

$$A^\circ = (\sin(\gamma^\circ/2))^{-1/2}(-\alpha S^\circ + p_0 C^\circ), \quad S^\circ = \sin((\gamma^\circ - \pi)/4) \quad (4.1)$$

$$B^\circ = (\sin(\gamma^\circ/2))^{-1/2}(\alpha C^\circ + p_0 S^\circ), \quad C^\circ = \cos((\gamma^\circ - \pi)/4)$$

$$p_0 = -\alpha \operatorname{ctg} \frac{\gamma^\circ}{2} \left(\frac{1 + \sin(\gamma^\circ/2)}{1 - \sin(\gamma^\circ/2)} \right)$$

$$C_l^* = \alpha \pi \left(1 + \frac{1}{\sin(\gamma^\circ/2)} \right), \quad C_l = \operatorname{Re}^{-1/4} C_l^* + o(\operatorname{Re}^{-1/4})$$

где U, V, P взяты из разложения (1.3) при $\varepsilon = \alpha^*/\alpha = \operatorname{Re}^{-1/4}$. Это решение удовлетворяет тем же краевым условиям, что и (2.1), а также условиям Чаплыгина – Жуковского на задней кромке и непротекания при $y = +0, l < x < 1$.

Условие замыкания системы соотношений (4.1) и выражение для коэффициента сопротивления получаются из тех же соображений, что и при $l > 1$ (см. (2.3), (2.4))

$$T^+(l) = 4f''(0)\sqrt{l} = C_d^* = \pi\alpha^2(1 + (1-l)^{-1/2})$$

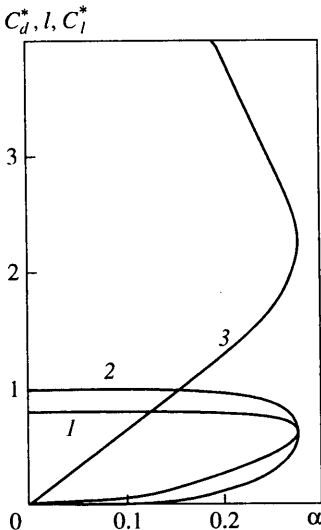
$$C_d = \operatorname{Re}^{-1/2}(C_d^* + c_d^- + c_d^+) + o(\operatorname{Re}^{-1/2}) \quad (4.2)$$

Значение C_d^* найдено [19] на основании решения (4.1) и определяет силу сопротивления в рамках идеальной жидкости, которая, согласно теории Тулина [17], равна и противоположно направлена силе, действующей в точке смыкания зоны отрыва $z = l$ (фиг. 6). Этим обеспечивается баланс сил, приложенных к жидкому объему, ограниченному разделительной линией тока $\psi = 0$, но не включающему поверхность тела [4]. Указанная точечная сила есть интегральная характеристика нестационарного течения в области смыкания зоны отрыва.

Постоянная c_d^+ в (4.2) определяется вкладом пограничного слоя на верхней стороне пластины при $l < x < 1$ (фиг. 6). В силу его неавтомодельности трение на верхней и нижней сторонах пластины различно [11]. Это приводит к некоторым изменениям в задаче [27, 30] для области взаимодействия около задней кромки. Эти изменения аналогичны рассмотренным в [24]. Вблизи передней кромки и точки присоединения, а также в области возвратных токов характер течения тот же, что и при $l > 1$ (см. (1.5), (2.2), (2.5) – (2.8)).

Интересно, что зависимость l, C_d^* и C_l^* от α неоднозначная. На фиг. 7 это иллюстрируется кривыми, построенными по формулам (4.2), (4.1). Максимальное значение $\alpha = \alpha_m = 0,276$. Ему соответствуют значения $l = l_m = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0,618$ и $C_d^* = 0,628, C_l^* = 2,272$. Нетрудно видеть, что если следовать верхней ветви решения, то при $\alpha \rightarrow 0$ точка присоединения вопреки интуитивным представлениям смещается к задней кромке ($l \rightarrow 1 - 0$), т.е. размер зоны отрыва растет наряду с величиной C_l^* . Неединственность и anomальное поведение решений присущи задачам этого типа и были впервые обнаружены в [6] (см. также [7–12]).

Исследуем поведение при малых α решения, соответствующего верхней ветви кривой $l(\alpha)$ на фиг. 7.



Фиг. 7. Зависимость параметров C_d^*, l, C_l^* от α (кривые 1, 2, 3)

Пусть вновь $\sigma(\text{Re}) = \alpha/\alpha_0 \rightarrow 0$. Тогда из (4.2), (4.1) следует, что

$$1-l = \sigma^4 l_0^* + O(\sigma^6), \quad 4f''(0) = \pi\alpha_0^2 / \sqrt{l_0^*}$$

и решение при $z = O(1)$ имеет вид (3.1), (3.2), если l_0 заменить на l_0^* . Следовательно, справедливы разложения (3.3) – (3.6). Как и при $l > 1$, найдем наименьшее значение α , при котором описанное выше решение остается в силе. Для этого (см. разд. 3) рассмотрим вблизи задней кромки область, где $z - 1 = O(\sigma^4)$. Предельный переход $z^* = \sigma^4(z - 1) = O(1)$, $\sigma(\text{Re}) \rightarrow 0$ в (4.1), (4.2) приводит к решению

$$\begin{aligned} x-1 &= \sigma^4 x^*, \quad y = \sigma^4 y^*, \quad z^* = x^* + iy^* \\ \omega &= \sigma^{-2} \omega^*(z^*) + o(\sigma^{-2}), \quad \omega^* = -D^*(\sqrt{l_0^*} - \sqrt{-z^*})^{-1/2} \\ p &= \text{Re}^{-1/4} \sigma^{-2} p^*(x^*, y^*) + o(\text{Re}^{-1/4} \sigma^{-2}), \quad D^* = \alpha_0 / \sqrt{2l_0^*} \\ -l_0^* < x^* < 0: \quad p^*(x^*, +0) &= p^+ = D^*(\sqrt{l_0^*} - \sqrt{-x^*})^{-1/2} \\ x^* < 0: \quad p^*(x^*, -0) &= p^- = D^*(\sqrt{l_0^*} + \sqrt{-x^*})^{-1/2} \\ \alpha &= \sigma\alpha_0, \quad 1-l = \sigma^4 l_0^* + O(\sigma^6), \quad 4f''(0) = \pi\alpha_0^2 l_0^{*-1/2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таким образом, в этой области на верхней стороне пластины за точкой присоединения ($x^* > -l_0^*$) $dp^+ / dx^* < 0$, но на нижней стороне (в отличие от соответствующей ситуации при $l > 1$, фиг. 4) всюду $dp^- / dx^* > 0$. Более того, из (4.3) находим, что при $x^* \rightarrow -0$

$$\frac{dp^\pm}{dx^*} = \mp k(-x^*)^{-1/2} + O(1), \quad k = \frac{D^*}{4l_0^{*3/4}} \quad (4.4)$$

Рассмотрим течение в пристеночном подслое при $x^* = O(1)$ и $y^* < 0$. Ясно, что если (см. разд. 3) $\sigma = \text{Re}^{-3/56}$ и, следовательно, здесь справедливо разложение (3.8), то задача (3.9) с $dp_e^* / dx^* = dp^- / dx^* > 0$ в силу (4.4) не имеет решения. Поэтому необходимо полагать $\sigma \gg \text{Re}^{-3/56}$. Тогда, согласно (3.4), (3.5), (4.3), асимптотическое разложение решения для подслоя имеет вид

$$\begin{aligned} x^\circ = x-1 &= \sigma^4 x^*, \quad y = -\text{Re}^{-1/2} \sigma^{4/3} Y^*, \quad Y^* \leq 0 \\ \psi &= \text{Re}^{-1/2} \left[-\sigma^{3/8} \frac{a_0 Y^{*2}}{2} - \text{Re}^{-1/4} \sigma^{-2} \Psi^\circ(x^*, Y^*) \right] + o(\text{Re}^{-3/4} \sigma^{-2}) \end{aligned}$$

Функция $\Psi^\circ(x^*, Y^*)$ удовлетворяет линейному уравнению, содержащему заданный градиент давления dp^- / dx^* из (4.3), т.е. получаем линейный аналог задачи (3.9). Анализ ее решения при $x^* \rightarrow -0$ показывает, что если $\sigma \gg O(\text{Re}^{-3/64})$, то при $x^\circ = O(\text{Re}^{-3/8})$ возникает взаимодействие. Задача для этой области в силу (4.4) близка к рассмотренной в [31]. Отличие состоит в том, что величины поверхностного трения $\tau_w^\pm(x)$ при подходе к области взаимодействия различны: $\tau_w^+(-0) \neq -\tau_w^-(-0) = a_0$. При $\sigma \gg \text{Re}^{-3/64}$ задача линейна и становится нелинейной при $\sigma = \text{Re}^{-3/64}$. Результаты

численного анализа [32] при $\tau_w^+(-0) = -\tau_w^-(-0) = a_0$ показали, что решение последней не единственно и область его существования ограничена максимальным значением параметра подобия $2ka_0^{-9/8} = 0,497$, где k – постоянная из (4.4). Тогда, используя выражения для постоянных в (4.3), (4.4) и (3.1) (с учетом, что здесь l_0 есть l_0^*), находим предельные значения параметров: $\alpha = \alpha_k = 0,532$, $l_0^* = l_k = 1,239$, $c_l^* = c_k = 1,501$. Если $\tau_w^+(-0) \neq a_0$, то изменения коснутся лишь их численных значений.

Итак, искомое наименьшее значение угла атаки, до которого существует описанное решение, есть $\alpha^* = \text{Re}^{-19/64} \alpha_k$ ($\sigma = \text{Re}^{-3/64}$). Ему соответствует значение $1 - l = \text{Re}^{-3/16} l_k$, а C_l при этом достигает наибольшего значения $\text{Re}^{-13/64} c_k$. Вопрос о возможности реализации такого решения будет рассмотрен ниже.

Обратимся к анализу течения, соответствующего нижней ветви кривой $l(\alpha)$ на фиг. 7, когда $l \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$. Предельный переход $\sigma = \alpha/\alpha_0 \rightarrow 0$, $z = O(1)$ в (4.1), (4.2) приводит в первом приближении к решению (с учетом (1.3)) о безотрывном обтекании пластины под малым углом атаки $\alpha^* = \varepsilon \sigma \alpha_0$, $\varepsilon = \text{Re}^{-1/4}$, удовлетворяющему условию Чаплыгина – Жуковского при $z = 1$

$$\begin{aligned} \omega &= \sigma \omega'(z) + o(\sigma), \quad \omega' = \alpha_0 \left(\frac{1-z}{z} \right)^{1/2} \\ C_d &= \text{Re}^{-1/2} 2c_d^- + \text{Re}^{-1/2} [\sigma^2 2\pi\alpha_0^2 + O(\sigma^6)] + O(\text{Re}^{-7/8}) \\ C_l &= \text{Re}^{-1/4} \sigma [2\pi\alpha_0 + o(1)], \quad \alpha = \sigma\alpha_0 \\ l &= \sigma^4 l^* + O(\sigma^8), \quad 2f''(0)\sqrt{l^*} = \pi\alpha_0^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Член $O(\text{Re}^{-7/8})$ в разложении для C_d обусловлен взаимодействием в окрестности задней кромки [30, 27]. Выражение для l указывает, что вблизи передней кромки лежит область $z = O(\sigma^4)$, в которой находится зона отрыва. Действительно, полагая $Z^* = \sigma^4 z = O(1)$ и $\sigma = \alpha/\alpha_0 \rightarrow 0$ в (4.1), (4.2), получаем решение

$$\begin{aligned} \omega &= \sigma^{-1} \omega^*(Z^*) + o(\sigma^{-1}), \quad p_0 = -\sigma^{-1} 4\alpha_0 / \sqrt{l^*} + o(\sigma^{-1}) \\ \omega^* &= \frac{\alpha_0}{\sqrt{l^*}} \left[\frac{3\sqrt{l^*} - 4\sqrt{Z^*}}{Z^{*1/4} (\sqrt{Z^*} - \sqrt{l^*})^{1/2}} + 4 \right] \\ Z^* \rightarrow \infty: \quad \omega^* &= \alpha_0 Z^{*-1/2} + O(Z^{*-3/2}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из условия равномерной пригодности разложения (1.3), (4.6) следует, что $\varepsilon\sigma^{-1} \rightarrow 0$, $\varepsilon = \text{Re}^{-1/4}$. Из (1.3), (4.6) также находим форму свободной линии тока

$$\begin{aligned} y_s &= \text{Re}^{-1/4} \sigma^3 [s^*(X^*) + o(1)], \quad x = \sigma^4 X^* \\ \frac{ds^*}{dX^*} &= \frac{\alpha_0}{\sqrt{l^*}} \frac{(3\sqrt{l^*} - 4\sqrt{X^*})}{X^{*1/4} (\sqrt{l^*} - \sqrt{X^*})^{1/2}}, \quad 0 < X^* < l^* \end{aligned} \quad (4.7)$$

Течение в слое смешения по-прежнему описывается решением (1.9), если положить $s = \sigma^4 S^*$, $N = \sigma^2 N^*$, т.е. здесь $\psi = O(\text{Re}^{-1/2} \sigma^2)$. Следовательно, в области возвратных

токов $\psi = O(\text{Re}^{-1/2} \sigma^2)$, $y = O(\text{Re}^{-1/4} \sigma^3)$ (см. (4.7)) и $u = O(\text{Re}^{-1/4} \sigma^{-1})$. Это течение является медленным, так как $\text{Re}^{-1/4} \sigma^{-1} \rightarrow 0$.

При $Z^* \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow 0$ разложения (4.5) и (4.6) удовлетворяют условиям сращивания, а для пограничного слоя на верхней стороне пластины при $X^* \rightarrow \infty$ решение имеет автомодельную асимптотику Блазиуса.

Из (4.6) следует, что при $Z^* \rightarrow 0$ справедливо разложение вида (1.5). Поэтому в окрестности передней кромки с размерами $O(\text{Re}^{-1})$ имеют место асимптотическое представление (1.6) и краевая задача (2.2) с $\kappa_0 = 3\alpha_0 / l^{\circ 1/4}$.

Все сказанное, как отмечалось, справедливо, если только $\sigma \gg \text{Re}^{-1/4}$. При $\sigma = \text{Re}^{-1/4}$, т.е. когда $\alpha^* = \text{Re}^{-1/2} \alpha_0$, размеры области возвратного течения, согласно (4.7), становятся порядка Re^{-1} , а изменения скорости и давления здесь $O(1)$ (см. (1.3), (4.5), (4.6)). Это означает, что при $x = O(\text{Re}^{-1})$, $y = O(\text{Re}^{-1})$ справедливо разложение (1.6) и течение описывается решением системы полных уравнений Навье – Стокса с локальным числом Рейнольдса $\text{Re}^* = \text{Re}\sigma^4 = 1$ при следующих краевых условиях:

$$y = \pm 0, \quad x > 0: \quad u = v = 0$$

$$r \rightarrow \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi: \quad u = 1 + r^{-1/2} \left(\alpha_0 \cos \frac{\theta}{2} - \beta_0 \sin \frac{\theta}{2} \right) + O(r^{-1})$$

$$v = r^{-1/2} \left(\alpha_0 \sin \frac{\theta}{2} + \beta_0 \cos \frac{\theta}{2} \right) + O(r^{-1}) \quad (4.8)$$

$$p = -r^{-1/2} \left(\alpha_0 \cos \frac{\theta}{2} - \beta_0 \sin \frac{\theta}{2} \right) + O(r^{-1}), \quad \beta_0 = 0,8604$$

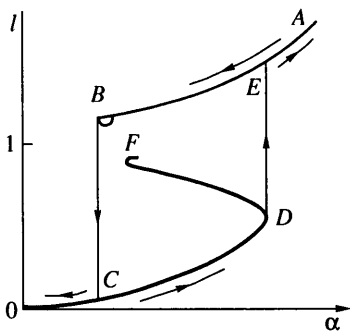
$$x \rightarrow \infty, \quad \xi = |y|x^{-1/2} = O(1): \quad u = F'(\xi) + O(x^{-1/2})$$

Эти условия обеспечивают сращивание с разложением (1.3), (4.5) при $z \rightarrow 0$ и выход на решение Блазиуса. (Здесь использовались обозначения из (2.2).)

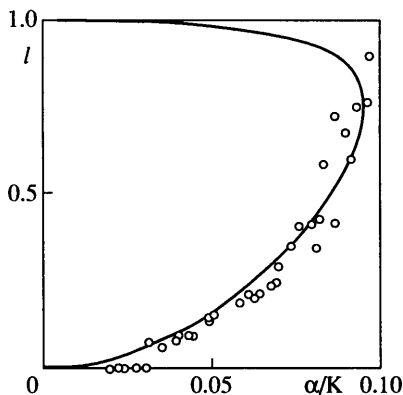
Таким образом, при $\alpha^* = \text{Re}^{-1/2} \alpha_0$ возвратное течение локализовано внутри указанной области в окрестности передней кромки и происходит непрерывный переход к полностью безотрывному режиму обтекания пластины. Решение задачи (4.8) при $\alpha_0 = 0$ было получено численно в [33, 34].

5. Итак, при обтекании пластины с уменьшением угла атаки α^* от величины $O(1)$ до $O(\text{Re}^{-1/4})$ длина области возвратных токов монотонно сокращается от $L_0 = O(\text{Re})$ до $L_0 = l = O(1)$ (см. (1.1), (1.4)). Дальнейшее уменьшение $\alpha = \alpha^* \text{Re}^{1/4}$ ведет к сокращению l , что схематически изображено на фиг. 8 в виде движения от A к B . Однако этот непрерывный процесс проходит до значения $\alpha = \text{Re}^{-3/56} \alpha_s$, когда $l - 1 = \text{Re}^{-3/4} l_s$ (точка B) и дальнейшее сокращение l становится невозможным. Здесь в соответствии с теорией кромочного отрыва допустима лишь малая вариация относительно α_s (разд. 3). Это означает, что, как и в [6, 8], происходит скачкообразный нестационарный переход к течению с другой структурой. В данном случае от решения (3.1) к (4.5), (4.6) с $\sigma = \text{Re}^{-3/56}$, т.е. переход из B в C . В этом новом состоянии течение остается отрывным и, согласно (4.5), $l = \text{Re}^{-3/4} l^\circ$. Только после того как α становится $O(\text{Re}^{-1/4})$ ($\alpha^* = O(\text{Re}^{-1/2})$), происходит переход к безотрывному течению (точка O).

Проследим теперь за изменением параметров и структуры течения по мере увеличения α^* от 0 до $\alpha^* = O(1)$. Непрерывное увеличение l с ростом α^* происходит до



Фиг. 8



Фиг. 9

Фиг. 8. Схематическое изображение зависимости длины зоны отрыва l от α

Фиг. 9. Зависимость длины каверны l от α/K . Точки – эксперимент [35], кривая – решение (4.1) из [19]

значений $\alpha^* \text{Re}^{1/4} = \alpha = \alpha_m$, $l = l_m$ (переход от 0 к D) и дальнейшее такое увеличение l невозможно (фиг. 7). Это означает, что вновь происходит скачкообразный нестационарный переход [6, 8] от течения с $l = l_m < 1$ к течению с $l > 1$ (переход из D в E). Последнее описывается решением разд. 2, непрерывно переходящим при $\alpha \rightarrow \infty$ в решение [2] с $\alpha^* = O(1)$.

Таким образом, приведенное на фиг. 8 схематическое изображение на примере зависимости l от α дает объяснение хорошо известному явлению гистерезиса. Заметим, что из состояния D при уменьшении α можно перейти в F ($\alpha = \text{Re}^{-3/64} \alpha_k$, $1 - l = \text{Re}^{-3/16} l_k$, разд. 4) с последующим скачком на кривую BE . Это соответствует движению вдоль верхней ветви решения, изображенного на фиг. 7.

Интересно, что экспериментальные данные [35], относящиеся к кавитационным течениям, свидетельствуют, что из состояния D действительно происходит нестационарный резкий переход. На фиг. 9 представлена зависимость l от α/K ($K = -2p_0$ – число кавитации), построенная в [35] на основе эксперимента и решения (4.1) из [19]. Как отмечается в [35], сразу за точкой максимума величины α/K наблюдалась очень сильная нестационарность течения и поэтому верхняя точка на фиг. 9 ($l = 0,9$) была получена путем осреднения.

Следует заметить, что решения теории течений со свободными линиями тока хорошо согласуются с экспериментальными данными как для кавитационных течений, так и для течений с зонами отрыва [36].

Область справедливости полученных результатов может быть несколько расширена. Рассмотрим течение около профиля с толщиной $O(h^*)$ под углом атаки α^* . Очевидно, что решение в масштабах тела остается в главном приближении в силе, если $\alpha^* \gg h^*$. Пусть для простоты профиль симметричен и вблизи передней кромки ($x \rightarrow +0$) его форма есть $y_w = O(h^* x^m)$, $m > 0$, $h^* \rightarrow 0$. Тогда для того, чтобы в области несправедливости теории малых возмущений $z = O(\alpha^{*4})$, $\alpha^* \ll 1$ (разд. 1) течение в главном приближении описывалось решением Сарантонелло (1.8), необходимо полагать $\alpha^{*M} \gg h^*$, $M = 4(1 - m)$. Это условие является более сильным, чем $\alpha^* \gg h^*$, если $m < 3/4$.

Заключение. Проведенный анализ позволяет сделать вывод о том, что полученное решение для течения около пластины при малых значениях угла атаки α^* переходит, с одной стороны, в решение Блазиуса при $\alpha^* \leq O(\text{Re}^{-1/2})$, а с другой – в решение [2] для конечных значений α^* с коэффициентом сопротивления $C_d = O(1)$. При этом в соответствии с концепцией [2, 4] в окрестности точки смыкания зоны отрыва (при $\alpha^* \gg \text{Re}^{-1/2}$) всегда имеет место локально-нестационарное вихревое течение. Здесь уместно заметить, что теорема существования [37] стационарного решения внешней задачи для системы уравнений Навье – Стокса в плоском случае доказана только для достаточно малых значений числа Рейнольдса.

Согласно другому подходу к задаче обтекания [13, 14], о котором говорилось во введении, течение всюду остается стационарным, но при этом для $\alpha^* = O(1)$ и (или) $h^* = O(1)$ (h^* – безразмерная толщина тела) значение $C_d = c_0 \text{Re}^{-1} + \dots$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$. Причем $c_0 = 46,5\pi$, т.е. это универсальная постоянная, не зависящая ни от α^* , ни от формы тела. Вследствие такой необычной зависимости для C_d , если вспомнить, что $C_d = 2c_d^- \text{Re}^{-1/2} + O(\text{Re}^{-7/8}) + O(\text{Re}^{-1})$ при $\alpha^* = h^* = 0$ [27, 30] (см. (4.5)), несомненный интерес представляет рассмотрение на основе [13, 14] течений при $h^* \rightarrow 0, \alpha^* \rightarrow 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-15-96070).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик.В., Королев Г.Л. Асимптотическая теория отрывных течений / Под ред. В.В. Сычева. М.: Наука, 1987. 256 с.
2. Сычев В.В. Об установившемся ламинарном течении жидкости за тупым телом при большом числе Рейнольдса // Докл. на 8-м Симпоз. по совр. проблемам механики жидкостей и газов. Тарда, Польша, 1967. 25 с.
3. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964. 467 с.
4. Сычев В.В. Асимптотическая теория отрывных течений // Изв. АН СССР. МЖТ. 1982. № 2. С. 20–30.
5. Messiter A.F. Boundary-layer separation // Proc. 8th US Nat. Congr. Appl. Mech., North Hollywood, Western Periodicals, 1979. P. 157–179.
6. Cheng H.K., Smith F.T. The influence of airfoil thickness and Reynolds number on separation // ZAMP. 1982. V. 33. № 2. P. 151–180.
7. Тимошин С.Н. Отрывное обтекание тонкого профиля с параболической передней кромкой при больших числах Рейнольдса // Учен. зап. ЦАГИ. 1985. Т. 16. № 2. С. 24–32.
8. Rothmayer A.P., Smith F.T. Large-scale separation and hysteresis in cascades // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1985. V. 402. № 1822. P. 83–108.
9. Cheng H.K. Laminar separation from airfoils beyond trailing-edge stall // AIAA Paper. 1984. № 84–1612. 26 p.
10. Храбров А.Н. Неединственность ламинарного отрывного обтекания профиля под углом атаки в схеме Кирхгофа // Учен. зап. ЦАГИ, 1985. Т. 16. № 5. С. 1–9.
11. Cheng H.K., Lee C.J. Laminar separation studied as an airfoil problem // Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows III / Ed. Cebeci T. N.Y.: Springer-Verlag, 1986. P. 102–125.
12. Lee C.J., Cheng H.K. An airfoil theory of bifurcating laminar separation from thin obstacles // J. Fluid Mech. 1990. V. 216. P. 255–284.
13. Таганов Г.И. О предельных течениях вязкой жидкости со стационарными срывными зонами при $\text{Re} \rightarrow \infty$ // Учен. зап. ЦАГИ. 1970. Т. 1. № 3. С. 1–14.
14. Чернышенко С.И. Асимптотика стационарного отрывного обтекания тела при больших числах Рейнольдса // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 958–966.
15. Chernyshenko S.I. Asymptotic theory of global separation // Appl. Mech. Rev. 1998. V. 51. № 9. P. 523–536.

16. Рубан А.И. Асимптотическая теория присоединения потока вязкой несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 6. С. 63–71.
17. Tulin M.P. Supercavitating flows – small perturbation theory // J. Ship Res. 1964. V. 7. № 3. P. 16–37.
18. Wu T.Y. Cavity and wake flows // Ann. Rev. Fluid Mech. 1972. V. 4. P. 243–284.
19. Geurst J.A. Linearized theory for partially cavitating hydrofoils // Intern. Shipbuilding Progr. 1959. V. 6. № 60. P. 369–384.
20. Zarontonello E.H. Parallel cavity flows past a plate // J. Math. pures et appl. 1954. T. 33. Fasc. 1. P. 29–80.
21. Рубан А.И. О ламинарном отрыве от точки излома твердой поверхности // Учен. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 2. С. 44–54.
22. Рубан А.И. Численный метод решения задачи о свободном взаимодействии // Учен. зап. ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 2. С. 45–51.
23. Laminar boundary layers / Ed. Rosenhead L. Oxford: Clarendon Press, 1963. 688 p.
24. Daniels P.G. Viscous mixing at a trailing edge // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1977. V. 30. Pt 3. P. 319–342.
25. Daniels P.G. A numerical and asymptotic investigation of boundary-layer wake evolution // J. Inst. Maths Applics. 1976. V. 17. № 3. P. 367–386.
26. Geurst J.A. Linearized theory for fully cavitating hydrofoils // Intern. Shipbuilding Progr. 1960. V. 7. № 65. P. 17–27.
27. Messiter A.F. Boundary-layer flow near the trailing edge of a flat plate // SIAM J. Appl. Math. 1970. V. 18. № 1. P. 241–257.
28. Рубан А.И. Особое решение уравнений пограничного слоя, непрерывно продолжимое через точку нулевого поверхностного трения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 6. С. 42–52.
29. Kluwick A. Interacting laminar and turbulent boundary layers // Recent Advances in Boundary Layer Theory / Ed. Kluwick A. Wien: Springer-Verlag, 1998. P. 231–330.
30. Stewartson K. On the flow near the trailing edge of a flat plate II // Mathematika. 1969. V. 16. Pt 1. № 31. P. 106–121.
31. Brown S.N., Stewartson K. Trailing-edge stall // J. Fluid Mech. 1970. V. 42. Pt 3. P. 561–584.
32. Королев Г.Л. К теории отрывного обтекания задней кромки тонкого профиля // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 4. С. 55–59.
33. van de Vooren A.I., Dijkstra D. The Navier – Stokes solution for laminar flow past a semi-infinite flat plate // J. Eng. Math. 1970. V. 4. № 1. P. 9–27.
34. Yoshizawa A. Laminar viscous flow past a semi-infinite flat plate // J. Phys. Soc. Japan. 1970. V. 28. № 3. P. 776–779.
35. Meijer M.C. Some experiments on partly cavitating hydrofoils // Intern. Shipbuilding Progr. 1959. V. 6. № 60. P. 361–368.
36. Meijer M.C. Pressure measurements on flapped hydrofoils in cavity flows and wake flows // J. Ship Res. 1967. V. 11. № 3. P. 170–189.
37. Finn R., Smith D.R. On the stationary solutions of the Navier – Stokes equations in two dimensions // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. V. 25. № 1. P. 26–39.

Москва

Поступила в редакцию
3.II.2000