МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 2001

УДК 532.522.2:537.84

© 2001 г. Ю.Г. ГУБАРЕВ, В.В. НИКУЛИН

ЛИНЕЙНАЯ ДЛИННОВОЛНОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОГО КЛАССА СТАЦИОНАРНЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ СОБСТВЕННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Прямым методом Ляпунова получено необходимое и достаточное условие линейной устойчивости некоторого двупараметрического класса стационарных цилиндрических сдвиговых струйных МГД-течений невязкой идеально проводящей несжимаемой жидкости со свободной границей. Магнитное поле создается текущим по струе постоянным электрическим током, так что оно линейно зависит от радиуса. Устойчивость рассматривается относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений, которые оставляют неизменным в каждой жидкой частице отношение расстояния между нею и осью струи к азимутальной компоненте завихренности. В случае нарушения полученного условия устойчивости выведены двусторонние экспоненциальные оценки роста возмущений.

Аналитические исследования устойчивости струйных МГД-течений идеальной жидкости со свободными границами до настоящего времени выполнялись спектральным методом, причем для достаточно простого закона распределения магнитного поля вдоль радиуса (как правило, линейного) и без учета сдвигового характера потока. Последнее, например, позволяло переходом в систему координат, связанную со струей, сводить задачу к изучению устойчивости состояний МГД-покоя [1, 2]. Более того, в рамках спектрального метода и эйлеровой формы записи уравнений одножидкостной идеальной магнитной гидродинамики устойчивость сдвиговых струйных МГД-течений невязкой идеально проводящей несжимаемой жидкости с произвольным законом распределения магнитного поля вдоль радиуса струи вообще не поддается аналитическому рассмотрению.

В данной работе предлагается новый подход к исследованию устойчивости жидких проводящих струй со свободной границей в магнитном поле, основанный на применении смешанных эйлерово-лагранжевых переменных [3] и прямого метода Ляпунова [4]. С помощью этого подхода для осесимметричных МГД-течений идеальной несжимаемой бесконечной по проводимости жидкости в длинноволновом приближении возможно учесть сдвиговый характер потока и получить математически строгие результаты об эволюции малых возмущений более общего вида, чем в спектральном методе. Ниже данный подход апробируется на решении задачи устойчивости стационарных осесимметричных сдвиговых струйных течений невязкой идеально проводящей несжимаемой жидкости со свободной границей в магнитном поле, которое создается протекающим по струе постоянным электрическим током и линейным образом зависит от радиальной координаты, к малым осесимметричным же длинноволновым возмущениям специального вида.

С математической точки зрения представленные в данной работе результаты носят априорный характер, поскольку теоремы существования решений рассматривавшихся начально-краевых задач не доказывались.

1. Постановка задачи. Изучается цилиндрическая жидкая проводящая струя неограниченной длины, по которой течет постоянный электрический ток J. Вводится цилиндрическая система координат (r^*, φ, z^*) так, что ее ось z^* совпадает с осью струи. Используются обозначения: (v_1, v_2, v_3), (B_1, B_2, B_3) и (B_1^*, B_2^*, B_3^*) – компоненты скорости, магнитной индукции в струе и магнитной индукции вне струи, соответствующие координатам (r^*, φ, z^*), P – давление, ρ – плотность, t^* – время. Полагается, что как у основного течения, так и у возмущений $v_2 \equiv 0$, $B_1 \equiv B_3 \equiv 0$, $B_1^* \equiv B_3^* \equiv 0$. Кроме того, и основное течение, и возмущения считаются осесимметричными, а жидкость – невязкой, несжимаемой и идеально проводящей. Поверхностное натяжение не учитывается.

В силу сделанных предположений уравнения одножидкостной идеальной магнитной гидродинамики [5] примут форму

$$\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial t^*}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial r^*}+v_3\frac{\partial v_1}{\partial z^*}\right)+\frac{B_2^2}{4\pi r^*}=-\frac{\partial P_*}{\partial r^*} \quad (1.1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_3}{\partial t^*}+v_1\frac{\partial v_3}{\partial r^*}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial z^*}\right)=-\frac{\partial P_*}{\partial z^*}$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial t^*}+v_1\frac{\partial B_2}{\partial r^*}+v_3\frac{\partial B_2}{\partial z^*}-\frac{v_1 B_2}{r^*}=0$$

$$\frac{1}{r^*}\frac{\partial(v_1 r^*)}{\partial r^*}+\frac{\partial v_3}{\partial z^*}=0, \quad P_*\equiv P+\frac{B_2^2}{8\pi}$$

Магнитная проницаемость проводящей струи полагается равной единице. Магнитная индукция снаружи струи в пренебрежении током смещения будет определяться соотношением

$$B_2^*=2J/r^* \quad (1.2)$$

На оси проводящей струи и ее границе ставятся следующие краевые условия

$$v_1=0, \quad |B_2/r^*|<\infty \quad (r^*=0) \quad (1.3)$$

$$P_*=(B_2^*)^2/(8\pi), \quad v_1=\frac{\partial r_1}{\partial t^*}+v_3\frac{\partial r_1}{\partial z^*}\,(r^*=r_1(z^*,t^*))$$

С целью перехода к длинноволновому приближению в качестве обезразмеривающих параметров берутся: L – характерный масштаб изменений вдоль оси z^*, r_{10} – характерный радиус проводящей струи и v_0 – характерная скорость жидкости в струе. Посредством данных параметров конструируются безразмерные величины t, η, z, q, w, p_*, b и $\varkappa$ таким образом, чтобы имели место связи

$$r^{*2}=\eta\delta^2L^2, \quad z^*=zL, \quad t^*=\frac{tL}{v_0}, \quad 2v_1r^*=qv_0L\delta^2, \quad v_3=wv_0$$

$$P_*=p_*\rho v_0^2, \quad B_2=br^*\frac{\sqrt{4\pi\rho v_0^2}}{L\delta}, \quad B_2^*r^*=\varkappa L\delta\sqrt{4\pi\rho v_0^2}$$

где $\delta = r_{10}/L$ – безразмерный характерный радиус проводящей струи, причем предполагается, что $\delta \ll 1$.

В результате уравнения (1.1) запишутся в виде

$$\frac{\delta^2}{2}\left(q_t+qq_\eta-\frac{q^2}{2\eta}+wq_z\right)+\eta b^2=-2\eta p_{*\eta} \quad (1.4)$$

$$w_t+qw_\eta+ww_z=-p_{*z}$$

$$b_t+qb_\eta+wb_z=0, \quad q_\eta+w_z=0$$

Здесь и далее нижний индекс из независимых переменных обозначает соответствующую частную производную. Краевые условия (1.3) преобразуются с учетом соотношения (1.2) к форме

$$q = 0, \quad b < \infty \quad (\eta = 0) \tag{1.5}$$

$$p_* = \frac{\varkappa^2}{2\eta_1}, \quad q = \eta_{1t} + w\eta_{1z} \quad (\eta = \eta_1(z, t)); \quad \varkappa = \frac{2J}{r_{10}\sqrt{4\pi\rho v_0^2}}$$

Если в первом из уравнений (1.4) опустить слагаемые, пропорциональные δ^2, то получим систему (1.4) в длинноволновом приближении. Однако это представление не является окончательным, поскольку система (1.4) может быть еще больше упрощена путем перехода (по аналогии с [6]) к смешанным эйлерово-лагранжевым переменным (t', z', ν), определяемым соотношениями $t = t'$, $z = z'$, $\eta = R(t', z', \nu)$, $\nu \in [0, 1]$. При этом полагается, что функция R удовлетворяет уравнению и краевым условиям

$$q = R_{t'} + wR_{z'}; \quad R(t', z', 0) = 0, \quad R(t', z', 1) = \eta_1(t', z') \tag{1.6}$$

Отсюда видно, что переменную ν можно интерпретировать как номер соответствующей жидкой линии. Кроме того, из (1.6) вытекает, что краевые условия (1.5) для функции q выполняются автоматически. Наконец (и это самое важное), неизвестная свободная граница $\eta = \eta_1$ переходит при такой замене переменных в известную фиксированную границу $\nu = 1$.

В новых смешанных эйлерово-лагранжевых переменных (после пренебрежения слагаемыми с δ^2) уравнения (1.4) перепишутся в форме

$$R_\nu b^2 = -2p_{*\nu} \tag{1.7}$$

$$R_\nu(w_t + ww_z) = -R_\nu p_{*z} + R_z p_{*\nu}$$

$$b_t + wb_z = 0$$

$$q_\nu + R_\nu w_z - R_z w_\nu = 0$$

Здесь и ниже штрихи у переменных t', z' опускаются. Данные уравнения дополняются начальными условиями: $w(0, z, \nu) = w_0(z, \nu)$, $R(0, z, \nu) = R_0(z, \nu)$, где функция $R_0(z, \nu)$ считается, исходя из требования взаимной однозначности перехода к смешанным эйлерово-лагранжевым переменным, монотонно возрастающей по аргументу ν функцией.

Далее проводится интегрирование по переменной ν первого уравнения системы (1.7) в пределах от ν до 1. С помощью полученного соотношения и с учетом краевых условий (1.5) из второго уравнения (1.7) исключается давление p_*

$$w_t + ww_z = \frac{1}{2}\left[\frac{\varkappa^2 R_{1z}}{R_1^2} - (b_1^2 R_1)_z + (b^2)_z R + \left(\int_\nu^1 R(b^2)_{\nu_1}\, d\nu_1\right)_z\right] \tag{1.8}$$

Здесь через ν_1 обозначена переменная интегрирования ν с тем, чтобы отличать ее от переменной ν на нижнем пределе интеграла, а через b_1 и R_1 – значения функций b и R на границе $\nu = 1$ проводящей струи, причем, согласно третьему из соотношений (1.6), $R_1(t, z) \equiv \eta_1(t, z)$.

Наряду с этим функция q заменяется в последнем уравнении системы (1.7) своим представлением (1.6), так что данное уравнение принимает вид

$$(R_\nu)_t + (wR_\nu)_z = 0 \tag{1.9}$$

Ниже соотношения (1.8) и (1.9) исследуются в предположении $b = \text{const}$, что отвечает линейной зависимости магнитного поля внутри струи от радиальной координаты. Это приводит, с одной стороны, к обращению третьего из системы уравнений (1.7) в тождество, а с другой – к существенному упрощению соотношения (1.8). Действительно, в условиях неизменности во всякой жидкой частице величины b данное уравнение может быть сведено к форме

$$w_t + ww_z = \left[\left(\frac{\varkappa}{R_1}\right)^2 - b_1^2\right]\frac{R_{1z}}{2} \tag{1.10}$$

Уравнения, аналогичные (1.9) и (1.10), получаются и в том случае, если в качестве R взять монотонно убывающую по аргументу ν функцию, положив тем самым, что свободная поверхность проводящей струи соответствует $\nu = 0$, а ее ось симметрии – $\nu = 1$.

Предположим, что решения системы уравнений (1.9), (1.10) либо периодичны вдоль оси z, либо локализованы на ней, т.е. на бесконечности реализуется решение, не зависящее от переменной z. Тогда уравнения (1.9), (1.10) имеют интеграл энергии E_1

$$E_1 \equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^1 w^2 R_\nu d\nu + \varkappa^2 \ln R_1 + \frac{b_1^2}{2}R_1^2\right)dz \tag{1.11}$$

Покажем, что для (1.9), (1.10) имеет место еще один интеграл движения. Продифференцируем уравнение (1.10) по переменной ν

$$w_{\nu t} + (ww_z)_\nu = 0 \tag{1.12}$$

Из (1.12) и уравнения (1.9) вытекает важная связь

$$C_t + wC_z = 0, \quad C \equiv \frac{R_\nu}{w_\nu} \tag{1.13}$$

Посредством соотношений (1.12), (1.13) можно продемонстрировать, что функционал

$$I \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 w_\nu F(C)d\nu dz \tag{1.14}$$

где F – некоторая функция аргумента C, представляет собой дополнительный интеграл движения [7].

Система уравнений (1.9), (1.10) обладает точными стационарными решениями

$$w = w^\circ(\nu), \quad R = R^\circ(\nu), \quad R_1^\circ = 1 \tag{1.15}$$

Здесь w° – произвольная, а R° – монотонно возрастающая функции аргумента ν. В качестве r_{10} берется невозмущенный радиус струи. Несложно убедиться, что уравнения (1.9), (1.10) для функций (1.15) превращаются в тождества.

2. Линейная устойчивость течений с произвольным сдвигом. Линеаризуем соотношения (1.9), (1.10), а также уравнения (1.12), (1.13) около точных стационарных решений (1.15)

$$w'_t + w^\circ w'_z = \frac{1}{2}(\varkappa^2 - b_1^2)R'_{1z}, \quad R'_{\nu t} + w^\circ R'_{\nu z} + R^\circ_\nu w'_z = 0 \tag{2.1}$$

$$w'_{\nu t} + w^\circ_\nu w'_z + w^\circ w'_{z\nu} = 0, \quad C'_t + w^\circ C'_z = 0$$

Здесь $w'(t, z, \nu)$, $R'(t, z, \nu)$, $R'_1(t, z)$ и $C'(t, z, \nu)$ – малые возмущения.

Интеграл энергии уравнений (2.1) ищется путем последовательного вычисления первой и второй вариаций функционала $J_1 \equiv E_1 + I$, где E_1 и I определены соответственно в (1.11) и (1.14). Первая вариация δJ_1 интеграла J_1 имеет вид

$$\delta J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \left[w_\nu^\circ \delta C \left(\frac{w^{\circ 2} + \varkappa^2 + b_1^2}{2} + \frac{dF}{dC}(C^\circ) \right) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{C^\circ}{2}(w^{\circ 2} + \varkappa^2 + b_1^2) + F(C^\circ) \right] \delta w_\nu + w^\circ R_\nu^\circ \delta w \right] d\nu dz \tag{2.2}$$

$$C^\circ \equiv \frac{R_\nu^\circ}{w_\nu^\circ}, \quad \delta C \equiv \frac{\delta R_\nu}{w_\nu^\circ} - \frac{R_\nu^\circ \delta w_\nu}{(w_\nu^\circ)^2}$$

Здесь δw, δR и δR_1 – первые вариации функций w, R и R_1.

Пользуясь произвольностью функции $F(C)$, выберем ее такой, чтобы

$$\frac{dF}{dC}(C^\circ) \equiv -\frac{w^{\circ 2} + \varkappa^2 + b_1^2}{2} \tag{2.3}$$

В этом случае первая вариация δJ_1 (2.2) обратится в нуль, т.е. функционал J_1 будет достигать на точных стационарных решениях (1.15) своего экстремального значения.

При помощи связи (2.3) и соотношения

$$w_\nu^\circ \delta^2 C = \delta^2 R_\nu - \frac{2\delta R_\nu \delta w_\nu}{w_\nu^\circ} - C^\circ \delta^2 w_\nu + \frac{2C^\circ}{w_\nu^\circ}(\delta w_\nu)^2$$

где $\delta^2 w$ и $\delta^2 R$ – вторые вариации функций w и R, нетрудно вывести представление для второй вариации $\delta^2 J_1$

$$\delta^2 J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \left[\frac{R_\nu^\circ}{2}(\delta w)^2 + w^\circ \delta w \delta R_\nu + \frac{w_\nu^\circ}{2} \frac{d^2 F}{dC^2}(C^\circ)(\delta C)^2 \right] d\nu dz +$$

$$+ \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} (b_1^2 - \varkappa^2)(\delta R_1)^2 dz$$

Если во второй вариации функционала, достигающего экстремума на изучаемых точных стационарных решениях, формально заменить первые вариации соответствующих функций их малыми возмущениями, то интеграл, который будет получен в результате данной процедуры, явится ничем иным, как интегралом энергии уравнений движения, линеаризованных на этих стационарных решениях [7, 8]. Прямая проверка показывает, что функционал

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \left[\frac{R_\nu^0}{2} w'^2 + w^\circ w' R_\nu' + \frac{w_\nu^\circ}{2} \frac{d^2 F}{dC^2}(C^\circ) C'^2 \right] d\nu dz +$$

$$+ \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} (b_1^2 - \varkappa^2) R_1'^2 dz \tag{2.4}$$

будет сохраняться на решениях линеаризованных уравнений (2.1), а значит, он и есть искомый интеграл энергии этих уравнений.

Для того чтобы попытаться установить условия знакоопределенности функционала E, его удобно переписать в форме

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 (A\mathbf{u}, \mathbf{u}) d\nu dz; \quad \mathbf{u} \equiv (w', R_\nu', C', R_1') \tag{2.5}$$

где $A = \|a_{ik}\|$ – матрица размера 4×4, у которой

$$a_{11} = \frac{1}{2} R^\circ_\nu, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} w^\circ$$

$$a_{24} = a_{42} = \frac{1}{8}(b_1^2 - \varkappa^2), \quad a_{33} = \frac{1}{2} w^\circ_\nu \frac{d^2 F}{dC^2}(C^\circ)$$

а все остальные элементы равны нулю.

Согласно критерию Сильвестра [9], подынтегральное выражение интеграла энергии E (2.5) будет положительно (отрицательно) определенным тогда и только тогда, когда главные миноры матрицы A будут положительны (будут иметь знак $(-1)^k$ (здесь k – порядок соответствующего минора)). Главные миноры матрицы A нужной знакоопределенностью не обладают, что следует из анализа первых двух ее главных миноров. Так, для положительной определенности подынтегрального выражения функционала E требуется, чтобы были истинны неравенства

$$R^\circ_\nu > 0, \quad -w^{\circ 2} > 0$$

Второе из данных соотношений в принципе невыполнимо, так как отрицательное число, естественно, должно быть меньше нуля. С другой стороны, для отрицательной определенности того же выражения необходима справедливость неравенств

$$R^\circ_\nu < 0, \quad -w^{\circ 2} > 0$$

что из-за характера монотонности функции R° и ложности второго соотношения опять-таки невозможно. Таким образом, ни положительной, ни отрицательной знакоопределенности у интеграла энергии E нет.

Следовательно, достаточных условий устойчивости точных стационарных решений (1.15) относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений (2.1) не существует.

3. Линейная устойчивость частного класса сдвиговых течений. Ниже прямым методом Ляпунова будет получено необходимое и достаточное условие устойчивости частного класса точных стационарных решений (1.15) уравнений (1.9), (1.10) вида

$$w = w^\circ(\nu), \quad R = R^\circ(\nu) = \frac{\ln w^\circ(\nu) - \ln w^\circ(0)}{\ln w^\circ(1) - \ln w^\circ(0)}, \quad R^\circ_1 = 1 \tag{3.1}$$

к тем из малых осесимметричных длинноволновых возмущений (2.1), которые в каждой жидкой частице оставляют неизменным стационарное значение отношения расстояния между нею и осью струи к величине азимутальной компоненты завихренности.

Для наглядности выпишем профиль осевой скорости w° (3.1) в исходных цилиндрических координатах

$$w^\circ = C_1 \exp(C_2 r^{*2} / r_{10}^2) \tag{3.2}$$

где C_1, C_2 – некоторые постоянные, чей физический смысл очевиден.

Для того чтобы продемонстрировать неустойчивость какого-либо из стационарных решений (3.1) по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям $w'(t, z, \nu)$, $R'(t, z, \nu)$ и $R_1'(t, z)$ (2.1), достаточно указать среди этих возмущений хотя бы одно такое, которое будет экспоненциально быстро расти с течением времени. С этой целью рассмотрим частный класс движений проводящей струи в магнитном поле, характеризующийся тем свойством, что в процессе этих движений малые возмущения функции C (1.13) жидких частиц (лагранжевы возмущения величины отношения расстояния между жидкой частицей и осью струи к азимутальной компоненте завихренности) остаются равными нулю. Другими словами, предполагается, что значение функции C (1.13) в любой жидкой частице при возмущениях не меняется, а значит, данные возмущения являются простыми отклонениями жидких частиц от соответствующих линий тока стационарных течений (3.1). С физической точки зрения налагаемые здесь на возмущения ограничения означают, что циркуляция по любому жидкому контуру в осевой плоскости, заданная в начальный момент времени, будет сохраняться и при возмущениях, поскольку величина C вследствие теоремы о циркуляции сохраняется в жидкой частице при осесимметричных движениях и в силу полных уравнений (1.1) тоже. Наиболее наглядно такие возмущения можно описать посредством поля лагранжевых смещений $\xi = \xi(t, z, \nu)$ [10], которое вводится соотношением

$$\xi_t = w' - w^\circ \xi_z \tag{3.3}$$

В этом случае первые два из линеаризованных уравнений (2.1) запишем в форме

$$w'_t + w^\circ w'_z = \frac{\varkappa^2 - b_1^2}{2} R'_{1z}, \quad R'_\nu = -R^\circ_\nu \xi_z \tag{3.4}$$

Кроме того, в интересах последующего исследования имеет смысл дополнить соотношения (3.3), (3.4) связью

$$R'_\nu = C^\circ w'_\nu \tag{3.5}$$

которая вытекает из определения функции C (1.13) в силу требования, чтобы ее малые возмущения были равны нулю.

Опираясь на соотношения (3.1), (3.4) и (3.5), нетрудно преобразовать функционал E (2.4) к виду

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^1 (R^\circ - w^\circ C^\circ)_\nu w'^2 d\nu + \frac{1}{2}(b_1^2 - \varkappa^2) R_1'^2 \right] dz \tag{3.6}$$

При этом непосредственная проверка свидетельствует о том, что интеграл E (3.6) сохраняется на решениях линеаризованных уравнений (3.3) – (3.5).

Так как функции $w^\circ(\nu)$ и $R^\circ(\nu)$ (3.1), в чем несложно убедиться, удовлетворяют равенству $w^\circ C^\circ = w^\circ R^\circ_\nu / w^\circ_\nu = \mathrm{const}$, то из соотношения (3.6) следует, что при выполнении неравенства $b_1^2 \geqslant \varkappa^2$ будет с учетом свойств монотонности функции R° и независимости функционала E от времени иметь место устойчивость точных стационарных решений (3.1) уравнений (1.9), (1.10) относительно малых возмущений (3.3) – (3.5).

Пусть $b_1^2 < \varkappa^2$. Тогда оказывается возможным продемонстрировать неустойчивость всякого из стационарных решений (3.1) к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (3.3) – (3.5).

Для этого необходимо включить в рассмотрение вспомогательный интеграл

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 R^\circ_\nu \xi^2 d\nu dz \tag{3.7}$$

двукратное дифференцирование которого по времени и ряд преобразований с применением соотношений (3.3) – (3.6) позволяют прийти к важному уравнению [11, 12]

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = 4(T - \Pi) = 8T - 4E$$

$$\left(T \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 R^\circ_\nu w'^2 d\nu dz, \quad \Pi \equiv \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} (b_1^2 - \varkappa^2) R_1'^2 dz \right)$$

называемому вириальным равенством [10]. Умножая данное уравнение на произвольный постоянный множитель λ и принимая во внимание соотношение $E \equiv T + \Pi = \text{const}$, удается вывести основное уравнение

$$\frac{dE_\lambda}{dt} = 2\lambda E_\lambda - 4\lambda T_\lambda \tag{3.8}$$

$$E_\lambda \equiv T_\lambda + \Pi_\lambda, \quad 2\Pi_\lambda \equiv 2\Pi + \lambda^2 M$$

$$2T_\lambda \equiv 2T - \lambda\frac{dM}{dt} + \lambda^2 M = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 R_v^\circ (w' - \lambda\xi)^2 dv dz$$

Если положить теперь $\lambda > 0$, то из (3.8) в силу неотрицательности функционала T_λ вытекает дифференциальное неравенство

$$\frac{dE_\lambda}{dt} \leqslant 2\lambda E_\lambda$$

интегрирование которого приведет к соотношению

$$E_\lambda(t) \leqslant E_\lambda(0)\exp(2\lambda t) \tag{3.9}$$

Неравенство (3.9) справедливо как для любых решений системы уравнений (3.3) – (3.5), так и для каких бы то ни было положительных значений параметра λ. Вместе с тем при получении этого неравенства не потребовалось налагать никаких ограничений на знак функционала Π.

Соотношение (3.9) дает возможность заключить, что интеграл E_λ изменяется с течением времени монотонным образом. Данное обстоятельство служит основанием для того, чтобы относиться к нему как к функционалу Ляпунова [4, 11, 12].

При помощи неравенства (3.9) построим двусторонние экспоненциальные оценки нарастания малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.3) – (3.5) точных стационарных решений (3.1) и выделим среди растущих возмущений наиболее быстро нарастающие.

Пусть какое-либо из стационарных решений (3.1) системы уравнений (1.9), (1.10) таково, что верно соотношение $b_1^2 < \varkappa^2$. Это означает, что можно подобрать начальное поле лагранжевых смещений ξ и возмущения поля скорости w' так, что будут истинны неравенства: $\Pi(0) < 0, \quad T(0) < |\Pi(0)|$.

В результате интеграл $E_\lambda(0)$, как следует из его определения (3.8), станет полиномом второй степени по переменной λ с положительным коэффициентом $M(0)$ (3.7) при λ^2 и отрицательным свободным членом $E(0)$ (3.6)

$$E_\lambda(0) = E(0) - \frac{\lambda}{2}\frac{dM}{dt}(0) + \lambda^2 M(0) \tag{3.10}$$

Если значения переменной λ брать из интервала

$$0 < \lambda < \Lambda_1 \equiv A_1 + \sqrt{A_2} \tag{3.11}$$

$$A_1 \equiv [4M(0)]^{-1}\frac{dM}{dt}(0), \quad A_2 \equiv A_1^2 - \frac{E(0)}{M(0)}$$

то соотношение (3.10) дает оценку $E_\lambda(0) < 0$. Данное неравенство и соотношение (3.9) свидетельствуют об экспоненциальном по времени нарастании малых возмущений (3.3)–(3.5).

При $\lambda = \Lambda_1 - \delta_2$ (с любым δ_2 из промежутка $]0, \Lambda_1[$) неравенству (3.9) может быть придана форма

$$E_{\Lambda_1-\delta_2}(t) \leqslant E_{\Lambda_1-\delta_2}(0)\exp[2(\Lambda_1 - \delta_2)t] \quad (E_{\Lambda_1-\delta_2}(0) < 0) \tag{3.12}$$

Поскольку в силу (3.8) имеет место связь $E_\lambda(t) > \Pi(t)$, то неравенство (3.12) перепишем в виде

$$-\Pi(t) > | E_{\Lambda_1-\delta_2}(0) | \exp[2(\Lambda_1 - \delta_2)t]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\varkappa^2 - b_1^2) R_1'^2 dz > 4 | E_{\Lambda_1-\delta_2}(0) | \exp[2(\Lambda_1 - \delta_2)t] \tag{3.13}$$

Соотношение (3.13) показывает, что параметр $\Lambda_1 - \delta_2$ (3.11), (3.12) оценивает инкременты малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.3) – (3.5) снизу.

Оценка (3.13) может быть значительно улучшена, если на начальные данные для поля лагранжевых смещений ξ и возмущений поля скорости w' дополнительно наложить ограничение

$$w'(0, z, \nu) = \lambda \xi(0, z, \nu) \tag{3.14}$$

Если условие (3.14) выполнено, то из (3.8) вытекает, что $T_\lambda(0) = 0$, $E_\lambda(0) = \Pi_\lambda(0)$. Данные равенства и связь (3.10) помогают установить, что на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda \equiv \sqrt{-2\Pi(0)/M(0)} \tag{3.15}$$

справедливо неравенство $\Pi_\lambda(0) < 0$. Отсюда следует, что, приняв $\lambda = \Lambda - \delta_1$ (с произвольным δ_1 из промежутка $]0, \Lambda[$), можно преобразовать соотношение (3.9) к форме

$$E_{\Lambda-\delta_1}(t) \leqslant \Pi_{\Lambda-\delta_1}(0) \exp[2(\Lambda - \delta_1)t] \quad (\Pi_{\Lambda-\delta_1}(0) < 0) \tag{3.16}$$

Если проделать выкладки, аналогичные приведенным выше для оценки (3.13), то неравенство (3.16) может быть записано в виде

$$-\Pi(t) > | \Pi_{\Lambda-\delta_1}(0) | \exp[2(\Lambda - \delta_1)t]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\varkappa^2 - b_1^2) R_1'^2 dz > 4 | \Pi_{\Lambda-\delta_1}(0) | \exp[2(\Lambda - \delta_1)t] \tag{3.17}$$

Согласно (3.17), параметр $\Lambda - \delta_1$ (3.15), (3.16) оценивает снизу инкременты малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.3)–(3.5), (3.14).

Из сравнительного анализа оценок (3.13) и (3.17) вытекает, что малые возмущения (3.3)–(3.5), начальные данные которых подчинены ограничению (3.14), растут быстрее всех остальных возмущений, причем, как будет продемонстрировано ниже, самыми быстро нарастающими из них служат те, чьи инкременты вычисляются по формуле

$$\Lambda^+ = \sup_{\xi(0,z,\nu)} \Lambda \tag{3.18}$$

Если $\lambda > \Lambda^+$, то для всех возможных начальных полей лагранжевых смещений $\xi(0, z, \nu)$ верно неравенство $\Pi_\lambda(0) > 0$. Следовательно, функционал $E_\lambda(0)$ (3.10) также будет положительно определен для всех возможных начальных полей лагранжевых смещений $\xi(0, z, \nu)$ и возмущений поля скорости $w'(0, z, \nu)$.

В итоге при $\lambda = \Lambda^+ + \varepsilon$ (здесь $\varepsilon > 0$ – параметр) из неравенства (3.9) вытекает оценка

$$E_{\Lambda^+ + \varepsilon}(t) \leqslant E_{\Lambda^+ + \varepsilon}(0) \exp[2(\Lambda^+ + \varepsilon)t] \tag{3.19}$$

согласно которой величина $\Lambda^+ + \varepsilon$ представляет собой границу сверху для инкрементов малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.3)–(3.5).

Более того, сопоставление неравенств (3.17) и (3.19) позволяет сделать вывод: параметр Λ^+ (3.15), (3.18) оценивает скорость роста ω_* малых возмущений (3.3)–(3.5) и снизу, и сверху, т.е.

$$\Lambda^+ - \delta_1 \leqslant \omega_* \leqslant \Lambda^+ + \varepsilon \tag{3.20}$$

При этом оценка (3.20) показывает, что наиболее быстро нарастают те из малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.3)–(3.5), инкремент которых близок к Λ^+.

Таким образом, если условие $b_1^2 \geqslant \varkappa^2$ не выполнено, то после вычисления с помощью соотношений (3.15), (3.18) значения параметра Λ^+, оценивающего скорость роста самых быстро нарастающих малых возмущений (3.3)–(3.5), (3.14), можно ответить на вопрос: за какие характерные времена малые осесимметричные длинноволновые возмущения (3.3)–(3.5) будут приводить стационарные осесимметричные течения (3.1) невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости со свободной границей, происходящие в магнитном после собственного электрического тока, к разрушению?

Ниже на конкретном примере продемонстрируем, что множество профилей вида (3.1), (3.2), для которых можно показать неустойчивость, не пусто. Данный пример не преследует своей целью сравнение с конкретным физическим явлением, а носит иллюстративный характер.

Рассмотрим точные стационарные решения системы уравнений (1.9), (1.10)

$$w^0(\nu) = C_1 \exp(-C_3\nu), \quad R^0(\nu) = \nu, \quad R_1^0 = 1 \tag{3.21}$$

$$(C_1, C_3 = \mathrm{const} > 0)$$

$$[(z, \nu): -\infty < z < +\infty, 0 \leqslant \nu \leqslant 1]$$

Эти решения являются представителями частного класса (3.1), (3.2) точных стационарных решений (1.15) уравнений (1.9), (1.10).

Если неравенство $b_1^2 \geqslant \varkappa^2$ несправедливо, то точные стационарные решения (3.21) будут неустойчивы по отношению, например, к таким малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (3.3)–(3.5), для которых начальное поле лагранжевых смещений задается в форме

$$\xi(0, z, \nu) = (1 - \nu)\sin\frac{2\pi z}{l} \tag{3.22}$$

где l – некоторая положительная постоянная величина. С точки зрения физики данные возмущения представляют собой периодические (с длиной волны l) флуктуации свободной поверхности проводящей струи и осевой скорости текущей внутри нее жидкости.

Действительно, пользуясь соотношениями (3.4), (3.5) и определением функции R_1, нетрудно получить выражения

$$R'_\nu(0, z, \nu) = \frac{2\pi}{l}(\nu - 1)\cos\frac{2\pi z}{l}$$

$$R'_1(0, z) \equiv \int_0^1 R'_\nu(0, z, \nu)d\nu = -\frac{\pi}{l}\cos\frac{2\pi z}{l}$$

$$w'_\nu(0, z, \nu) = \frac{2\pi C_1 C_3}{l}(1 - \nu)\exp(-C_3\nu)\cos\frac{2\pi z}{l}$$

$$w'(0, z, \nu) = \int_0^\nu w'_{\nu_1}(0, z, \nu_1)d\nu_1 =$$

$$= \frac{2\pi C_1}{lC_3}[(C_3 - 1)(1 - \exp(-C_3\nu)) + \nu C_3 \exp(-C_3\nu)]\cos\frac{2\pi z}{l}$$

Принимая во внимание определения функционалов T, П и учитывая периодичность поля $\xi(0, z, \nu)$ (3.22) по переменной z, установим значения этих функционалов в начальный момент времени

$$\Pi(0) \equiv \frac{b_1^2 - \varkappa^2}{4} \int_0^l R_1'^2(0,z)dz = \frac{\pi^2 (b_1^2 - \varkappa^2)}{8l} \tag{3.23}$$

$$T(0) \equiv \frac{1}{2}\int_0^l \int_0^1 R_\nu^0 w'^2(0,z,\nu)d\nu dz =$$

$$= \frac{\pi^2 C_1^2}{4lC_3^3}[4C_3^3 - 14C_3^2 + 22C_3 - 11 + 16(1-C_3)e^{-C_3} - 5e^{-2C_3}]$$

Согласно первому соотношению (3.23), в силу условия $b_1^2 < \varkappa^2$ неравенство $\Pi(0) < 0$ выполняется автоматически. Соотношение $T(0) < |\Pi(0)|$ будет истинно, если постоянные C_1 и C_3 подобраны надлежащим образом. Например

$$0 < C_1 < 1{,}244\sqrt{\varkappa^2 - b_1^2}, \quad C_3 = 1$$

В итоге для точных стационарных решений (3.21) в явном виде могут быть выписаны оценки снизу (3.13) и сверху (3.19) (последняя – с Λ_1 вместо Λ^+), характеризующие процесс нарастания малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.3)–(3.5), (3.22), что как раз и говорит об их неустойчивости. В данной ситуации скорость роста ω_* малых возмущений (3.3)–(3.5), (3.22) оценивает и снизу, и сверху параметр Λ_1 (3.11), а не Λ^+.

Наиболее быстро нарастающими для решений (3.21) будут те из малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.3)–(3.5), у которых, как это вытекает из соотношений (3.4), (3.5) и (3.14), начальное поле лагранжевых смещений имеет форму $\xi(0, z, \nu) = f(w^0 - \lambda z)$, причем функция f должна быть или периодичной, или локализованной по координате z. При этом о характере роста данных возмущений можно будет судить, опираясь на оценки снизу (3.15) и сверху (3.19), а их скорость нарастания ω_* может быть оценена с помощью параметра Λ^+ (3.15), (3.18).

Заключение. В настоящей работе выведены уравнения длинноволнового приближения в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для нестационарных осесимметричных струйных МГД-течений невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости в магнитном поле, создаваемом собственным электрическим током. Прямым методом Ляпунова найдено необходимое и достаточное условие устойчивости частного класса стационарных осесимметричных течений идеальной несжимаемой бесконечной по проводимости жидкости со свободной границей в магнитном поле, линейно зависящем от радиальной координаты, относительно малых осесимметричных же длинноволновых возмущений специального вида. Получены двусторонние экспоненциальные оценки роста этих возмущений. Выделен подкласс самых быстро нарастающих возмущений и установлена точная формула для вычисления скорости их роста. Сконструирован иллюстративный пример стационарных решений и начальных возмущений, линейный этап эволюции которых описывается посредством полученных оценок.

Рассмотренный частный класс точных стационарных течений содержит в себе течения, профиль осевой скорости которых носит либо струйный, либо следовой характер. Таким образом, обнаруженный класс стационарных решений достаточно широк, а принадлежащие ему течения могут реализовываться на практике.

В данной работе впервые удалось применить прямой метод Ляпунова для исследования неустойчивости стационарных течений жидкости, которые никакими преобразованиями уравнений движения не сводятся к покою.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00614).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gupta A.S.* On the capillary instability of a jet carrying an axial current with or without a longitudinal magnetic field // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1964. V. 278. № 1373. P. 214–227.
2. *Гельфгат Ю.М., Ольшанский С.В., Явнайст Г.А.* Исследование разрушения свободной жидкометаллической струи под действием осевого тока // Магнитная гидродинамика. 1973. № 2. С. 49–54.
3. *Захаров В.Е.* Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функциональный анализ и его приложения. 1980. Т. 14. Вып. 2. С. 15–24.
4. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
6. *Никулин В.В.* Аналог уравнений вихревой мелкой воды для полых и торнадоподобных вихрей. Высота стационарного торнадоподобного вихря // ПМТФ. 1992. № 2. С. 47–52.
7. *Губарев Ю.Г.* К аналогии между уравнениями Бенни и уравнениями Власова – Пуассона // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1995. Вып. 110. С. 78–90.
8. *Владимиров В.А.* О приложениях законов сохранения к получению условий устойчивости стационарных течений идеальной жидкости // ПМТФ. 1987. № 3. С. 36–45.
9. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
10. *Chandrasekhar S.* Ellipsoidal figures of equilibrium. New Haven; London: Univ. Press, 1969. = *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.
11. *Губарев Ю.Г.* К неустойчивости вращательно-симметричных МГД-течений // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 19–25.
12. *Губарев Ю.Г.* К неустойчивости винтовых магнитогидродинамических течений // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 1. С. 150–156.

Новосибирск

Поступила в редакцию
23.V.2000