

УДК 532.517.4

© 2001 г. С.Я. ГЕРЦЕНШТЕЙН, Д.Ю. ЖИЛЕНКО, О.Э. КРИВОНОСОВА

**ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕХОД В СФЕРИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ
КУЭТТА ПРИ ВСТРЕЧНОМ ВРАЩЕНИИ ГРАНИЦ**

Представлены результаты экспериментального исследования перехода к стохастичности в широком сферическом слое $\delta = (r_2 - r_1)/r_1 = 1,006$ (r_1, r_2 – радиусы внутренней и внешней сфер). Изучена пространственная структура и спектры пульсаций скорости закритических режимов течения в диапазоне изменения чисел Рейнольдса, вычисленных по параметрам внешней и внутренней сфер $-950 < Re_2 = \Omega_2 r_2^2 / \nu < -700$, $250 < Re_1 = \Omega_1 r_1^2 / \nu < 450$, где Ω_2 и Ω_1 – угловые скорости вращения внешней и внутренней сфер, ν – кинематическая вязкость жидкости в слое, отрицательные значения Re_2 соответствуют вращению границ слоя в противоположные стороны.

Экспериментально изучается переход к стохастичности в сферическом течении Куэтта – течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя концентрическими сферическими границами, вращающимися относительно общей оси. Сферическое течение Куэтта определяется тремя параметрами подобия: числами Рейнольдса для внутренней и внешней сферических границ Re_1 и Re_2 и относительной толщиной слоя δ . Последовательность бифуркаций, сопровождающая переход течения к стохастичности, может происходить в соответствии с одним из известных к настоящему времени сценариев: бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода цикла, переход через три бифуркации Хопфа, переход через один из типов перемежаемости и т.д. Однако вопрос о том, каким образом характерные особенности течения определяют конкретный сценарий перехода к хаосу, остается открытым.

Ранее в слое $\delta = 1,006$ сценарии ламинарно-турбулентного перехода исследовались при изменении двух параметров – числа Re_1 и относительного эксцентриситета, внешняя сфера была неподвижна $Re_2 = 0$ [1, 2]. В частности, в [1] был исследован переход при неподвижной внешней сфере и нулевом эксцентриситете. Этот переход при квазистатическом увеличении Re_1 происходил через шесть бифуркаций: потеря устойчивости основного течения (первая бифуркация) при $Re_1^{(1)} = 460 \pm 2$ сопровождалась появлением в спектре частоты ν_0 , соответствующей характерной частоте визуально наблюдаемого режима с четырьмя вихрями. Вторая бифуркация при $Re_1^{(2)} = 525$ сопровождалась исчезновением в спектре частоты ν_0 и появлением новой частоты ν_1 , соответствующей характерной частоте визуально наблюдаемого режима с тремя вихрями. Следующий переход к квазипериодическому режиму с двумя частотами ν_1 и ν_2 происходил при $Re_1^{(3)} = 720$. Далее при $Re_1^{(4)} = 820$ возникал новый периодический режим с единственной частотой ν_2 , соответствующей периодическому течению с двумя вихрями. Еще один ламинарный режим возникал при $Re_1^{(5)} = 880$, в спектре при этом появлялась субгармоника $1/4 \nu_2$ со своими высшими гармониками. При $Re_1^{(6)} = 895$ было обнаружено заметное ($\sim 2\%$) убывание автокорреляционной функции. Дальнейшее увеличение Re_1 сопровождалось увеличением уровня непрерывного фона, уширением спектральных линий, появлением в спектре трех новых частот, еще

более сильным убыванием автокорреляционной функции. Все это свидетельствовало об исчезновении ламинарного режима течения и возникновении стохастичности.

Впоследствии в слое $\delta = 1,006$ была рассчитана потеря устойчивости при неподвижной внешней сферической границе [4], хорошо согласующаяся с результатами экспериментальных исследований [1]. Численное моделирование сферического течения Куэтта с вращением обеих сферических границ ограничивается расчетом границ устойчивости в тонких и промежуточных слоях (кривые перехода от вторичного осесимметричного кольцевого режима к основному течению для слоев $\delta = 0,11-0,3$) [5] и первыми двумя бифуркациями для тонких ($\delta = 0,11$) слоев [6]. Трудности численного моделирования закритических режимов сферического течения Куэтта обуславливают необходимость дальнейших экспериментальных исследований.

В данной работе представлены результаты экспериментального исследования структуры закритических течений в условиях ламинарно-турбулентного перехода при нулевом эксцентриситете и изменении двух других управляющих параметров – чисел Re_1 и Re_2 .

1. Экспериментальная установка, методика измерений и обработки результатов. Эксперименты проводились на установке "Шар" [3]. Радиус внешней сферы $150,08 \pm 0,03$ мм. В качестве рабочей жидкости использовалось силиконовое масло с вязкостью около 50 сСт при 20°C , в которое для визуализации течения в поперечном сечении сферического слоя и с сохранением его оптической прозрачности было добавлено небольшое (менее 0,002% по объему) количество алюминиевой пудры. Для идентификации пространственной структуры вторичных течений меридиональная плоскость сферического слоя подсвечивалась источниками света с различными (по азимутальному углу) направлений. Скорости вращения сфер и температура в слое поддерживались постоянными, с отклонением не более 0,03%. В пределах указанных погрешностей все эксперименты проводились в стационарных условиях после выдерживания каждого режима в течение не менее 40 мин. Выход на каждый из рассматриваемых режимов осуществлялся следующим образом: при неподвижной внутренней сфере ($Re_1 = 0$) устанавливалась требуемая скорость вращения внешней сферы, затем при постоянном значении Re_2 квазистатически изменялась скорость вращения внутренней сферы ($\Delta Re_1/Re_1 < 0,1\%$).

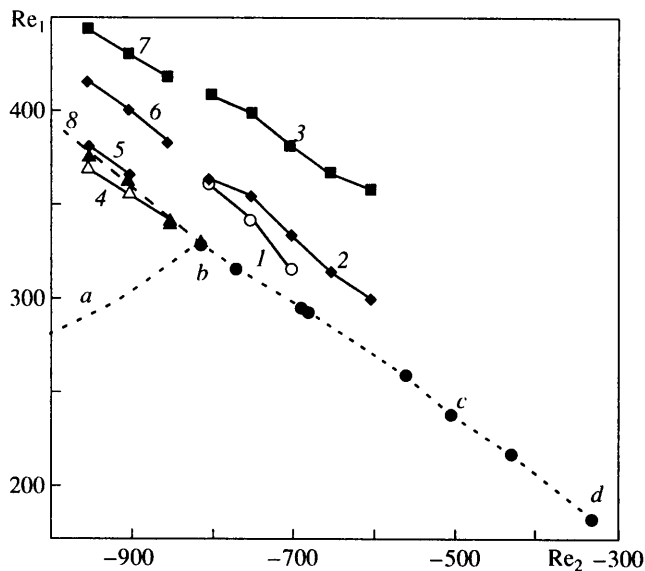
Измерения пульсаций скорости проводились лазерным доплеровским анемометром. В качестве источника лазерного излучения использовался He-Ne-лазер мощностью около 25 мВт. Рассеянный свет регистрировался фотоумножителем фирмы DISA. Сигнал с фотоумножителя обрабатывался процессорами лазерных доплеровских анемометров DISA и TSI и затем подавался на вход 12-разрядного аналого-цифрового преобразователя ЛА-2, встроенного в персональный компьютер, с последующей записью данных на жесткий диск.

Точка, в которой проводились измерения пульсаций скорости, расположена ниже плоскости экватора (на 45 или 75 мм) и на расстоянии 120 мм от оси вращения сфер. Измеряется проекция вектора скорости на горизонтальную плоскость.

Период дискретизации аналогового сигнала Δt выбирался равным 0,03 и 0,06 с, чтобы частота опроса более чем на порядок превышала частоты исследуемых процессов. Длина выборки N составляла 16384 и 32768 точек. Спектр пульсаций скорости рассчитывался с помощью программы быстрого преобразования Фурье. Так же как и в [1, 9], появление хаотического режима течения определялось по подъему уровня непрерывного фона в спектре.

2. Структура основного и вторичного течений вблизи предела устойчивости. На фиг. 1 (кривая $a-d$) представлена граница устойчивости основного течения в сферическом слое $\delta = 1,006$ в области $-1000 < Re_2 < -300$. В точке b ($Re_2 = -810$) граница имеет локальный максимум. Граница устойчивости получена в работе [7] в более широком интервале определяющих параметров, но без изучения закритических режимов.

Основное течение в сферическом слое симметрично относительно экватора и оси вращения и включает в себя азимутальное вращение вокруг оси и меридиональную циркуляцию, амплитуда и форма которой определяются соотношением чисел Re_1 и Re_2 [8]. В случае малых чисел Рейнольдса при вращении только одной из сферических границ меридиональное течение одновихревое, с циркуляцией, направленной от полюса к экватору вдоль вращающейся сферической границы. При вращении сферических



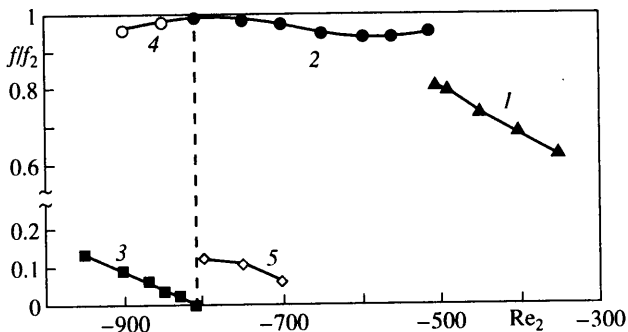
Фиг. 1. Граница устойчивости основного течения $a-d$. Границы возникновения закритических режимов: 1, 4 – квазипериодического режима для $Re_2 > -810$ и $Re_2 < -810$ соответственно; 2, 6 – режима локализованных вихрей; 5 – режима течения с тремя частотами в спектре; 3, 7 – стохастического режима, 8 – граница изменения направления приполярного движения

границ в разные стороны возможно образование течения с двухвихревой меридиональной циркуляцией и противоположным направлением вращения вихрей [8].

В случае противоположного направления вращения сферических границ в широком сферическом слое $\delta = 1,006$ при $Re_1 > 50$ и $-Re_2 > 10$ и вплоть до потери устойчивости основного течения имеет место только двухвихревая меридиональная циркуляция, что подтверждается существованием визуально наблюдаемой в меридиональной плоскости линии раздела между циркуляциями [7]. В рассматриваемой области параметров увеличение скорости вращения внутренней (внешней) сферы приводит к смещению в приэкваториальной области поверхности раздела меридиональных циркуляций к внешней (внутренней) сфере и вместо подавления одной из циркуляций происходит ее вытеснение в приполярную область [7].

Так, при $Re_2 > -180$ поверхность раздела меридиональных циркуляций прижата к внешней сферической границе, но только в приэкваториальной области. При $Re_2 < -810$ (участок $a - b$) поверхность раздела прижата вблизи экватора к внутренней сфере. В диапазоне изменения чисел Re_2 от -180 до -810 поверхность раздела меридиональных циркуляций удалена от обеих сферических границ на всем своем протяжении.

На участке $b - d$ перед потерей устойчивости наблюдаются приближение центров вихрей внутренней меридиональной циркуляции к плоскости экватора и смещение (вытягивание) приэкваториальной части линии раздела в сторону внешней сферы, потеря устойчивости сопровождается колебаниями линии раздела в меридиональной плоскости [7]. В то же время оказалось, что пространственная структура вторичного течения на пределе устойчивости существенно различна для участков $b - c$ и $c - d$, находящихся справа и слева от значения $Re_2 = -505 \pm 2$ (точка c). На участке $c - d$ вторичное течение симметрично относительно плоскости экватора и представляет собой два азимутальных вихря, распространяющихся в направлении вращения



Фиг. 2. Относительные частоты вторичных (1, 2, 3) и закритических (4, 5) режимов течения

внутренней сферы. Фазовая скорость распространения вихрей непрерывно изменяется при движении вдоль границы устойчивости — измеряемая частота пульсаций скорости f , отнесенная к частоте вращения внешней сферы f_2 , непрерывно уменьшается при движении от c к d (кривая 1 на фиг. 2).

На участке $b - c$ вторичное течение на пределе устойчивости несимметрично относительно экватора и оси вращения и представляет собой систему равноудаленных друг от друга и наклоненных к плоскости экватора спиральных волн, распространяющихся как вдоль оси вращения, так и в направлении вращения внутренней сферы. Наблюдаемые спиральные волны ограничены поверхностью раздела меридиональных циркуляций в приэкваториальной области и затухают по мере удаления от экватора. Относительная частота пульсаций скорости на этом участке границы f_s/f_2 возрастает практически до единицы при приближении к точке b (кривая 2 фиг. 2).

Переход от вторичного течения, соответствующего участку $c - d$ границы устойчивости, к вторичному течению на участке $b - c$ происходит через потерю экваториальной симметрии азимутальными вихрями. Скачок в относительной частоте (разрыв между кривыми 1 и 2 на фиг. 2) соответствует смене вторичного течения на границе устойчивости и может объясняться изменением количества вихрей. Возможно, что наблюдаемая при увеличении Re_2 смена вторичных течений аналогична дроблению масштаба вторичного течения по азимутальной координате, наблюдавшемуся ранее при вращении сферических границ в одну сторону в более тонких слоях [8].

На участке $a - b$ основное течение теряет устойчивость в приполярной области [7]. Наблюдаемое при этом спиральное вторичное течение ограничено внутренней по отношению к линии раздела меридиональных циркуляций областью. В меридиональной плоскости вторичное течение проявляется в виде возмущения на линии раздела меридиональных циркуляций, распространяющегося от полюса к экватору. Продолжительность распространения наблюдаемого возмущения между полюсами внешней и внутренней сферических границ соответствует измеренному периоду единственной частоты f_p в спектре пульсаций скорости. При движении вдоль границы устойчивости на этом участке по направлению к точке b относительная частота пульсаций скорости f_p/f_2 уменьшается и обращается в ноль в точке b (кривая 3, фиг. 2). Таким образом, в точке b наблюдается пересечение нейтральных кривых, соответствующих как различным механизмам потери устойчивости, так и различным видам вторичных течений на пределе устойчивости. Похожие пространственные структуры вторичных течений наблюдались ранее в тонких слоях [8]. Однако отсутствие опубликованных данных по относительным частотам не позволяет сделать вывод об идентичности наблюдаемых процессов.

3. Эволюция спектра пульсаций скорости и пространственной структуры закритических режимов течения при переходе к хаосу. На фиг. 1 кроме границы устойчивости

основного течения представлены и границы существования различных закритических режимов течения. Все приведенные ниже режимы течения получены при квазистатическом изменении числа Re_1 при $Re_2 = \text{const}$.

В области $-810 < Re_2 < -700$ при любом значении Re_2 квазистатическое увеличение Re_1 приводит к одной и той же последовательности закритических режимов течения. Каждый из этих режимов характеризуется своей пространственной структурой и набором частот в спектре пульсаций скорости. В этом смысле для рассматриваемого диапазона изменения Re_2 исследованный ранее сценарий перехода к хаосу при $Re_2 = -700$ [9] через четыре бифуркации является универсальным. Первая бифуркация – потеря устойчивости с появлением спиральных волн с одной частотой f_s в спектре; вторая бифуркация – наступление квазипериодического режима, когда к спиральным волнам добавляется приполярное движение, а в спектр частота f_p ; третья бифуркация приводит к новому течению с одной частотой f_l в спектре, названному режимом локализованных вихрей. При этом по обе стороны экватора формируется течение, напоминающее разомкнутые кольца Тейлора; три одинаковых вихря наклонены к плоскости экватора и вся структура распространяется по азимуту в направлении вращения внешней сферы. Четвертая бифуркация приводит к хаотическому режиму течения. В отличие от первых двух режимов локализованных вихрей и хаотический возникают жестко.

При $Re_2 = -700$ проведены измерения пульсаций скорости в двух различных точках сферического слоя. Полученные при этом значения относительных частот для всех закритических режимов совпадают в пределах $\pm 2\Delta f$, где Δf – величина спектрального разрешения метода быстрого преобразования Фурье для используемой длины выборки. Единственным отличием является соотношение амплитуд на частотах f_p и f_s в квазипериодическом режиме течения – для одних и тех же чисел Re_1 смещение точки измерения от экватора к полюсу приводит к относительному увеличению амплитуды пика в спектре пульсаций скорости, соответствующего частоте f_p приполярного движения. Ниже приведены отношения квадратов амплитуд сигналов на частотах f_p и f_s при различных значениях числа Re_1 в двух точках, удаленных от экватора на 45 и 75 мм:

Re_1	313	313	318	318	326	326
h, mm	45	75	45	75	45	75
A_p/A_s	0,03	0,57	0,19	1,49	3,11	2,24

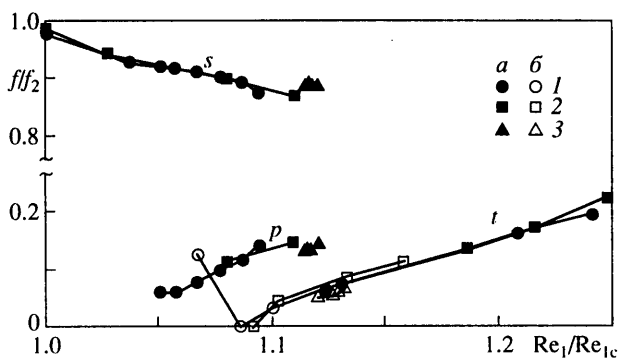
Таким образом, рассматриваемые сценарии перехода к хаосу не зависят от местоположения точки измерения. Это не соответствует утверждениям авторов работы [10] о сильной зависимости сценариев перехода к хаосу от меридиональной координаты местоположения точек измерения.

На фиг. 3 представлены относительные частоты в зависимости от надкритичности Re_1/Re_{1c} (Re_{1c} – критическое значение, соответствующее первой бифуркации – потере устойчивости основным течением) для различных значений Re_2 из рассматриваемого диапазона. Оказалось, что для каждого из наблюдаемых закритических режимов существует зависимость относительной частоты от надкритичности, не зависящая от числа Re_2 , – кривая s для режима спиральных волн, кривая p для режима приполярного движения и кривая t для режима локализованных вихрей.

Относительная частота периодического режима течения с единственной частотой f_s в спектре с увеличением надкритичности уменьшается с сохранением пространственной структуры, сформировавшейся на пределе устойчивости (кривые s на фиг. 3).

При развитии квазипериодического режима с возрастанием Re_1 относительное значение второй независимой частоты в спектре f_p возрастает (кривые p на фиг. 3), так же как и амплитуда пика, соответствующего этой частоте в спектре пульсаций скорости. Частота f_s продолжает уменьшаться.

При установлении режима локализованных вихрей в спектре пульсаций скорости



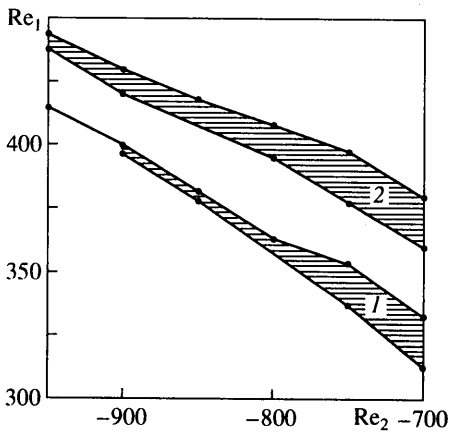
Фиг. 3. Относительные частоты закритических режимов течения: s – спиральных волн, p – приполярного движения, t – локализованных вихрей. Символы a соответствуют квазистатическому возрастанию Re_1 , b – квазистатическому уменьшению Re_1 в области гистерезиса режима локализованных вихрей: $Re_2 = -700, -750, -800$ (точки $1 - 3$)

появляется единственная частота f_i с высшими гармониками $2f_i$ и $3f_i$. С увеличением Re_1 f_i возрастает (кривые t на фиг. 3), амплитуды пиков в спектре, соответствующие высшим гармоникам, также возрастают по сравнению с амплитудой пика на основной частоте. Этот режим имеет гистерезис. В области гистерезиса значение f_i проходит через ноль (тогда наблюдается стационарная картина течения) и начинает увеличиваться (фиг. 3, символы b). При этом изменяется направление движения вихрей – вихри движутся в направлении вращения внутренней сферы.

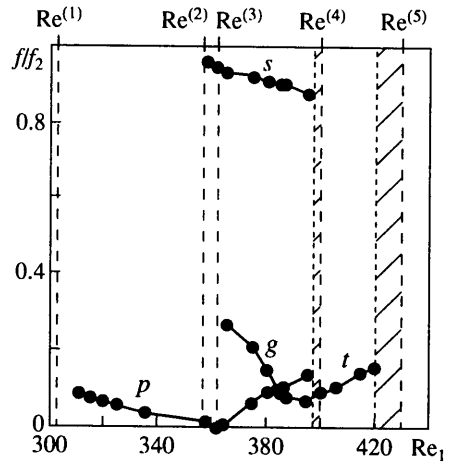
С этого режима течения происходит жесткий переход к хаосу с разрушением экваториальной симметрии пространственной структуры течения. На фиг. 4 представлены области гистерезиса двух режимов: локализованных вихрей и стохастического. Видно, что при уменьшении Re_2 обе области гистерезиса уменьшаются, причем наиболее сильное уменьшение гистерезиса в режиме локализованных вихрей наблюдается в диапазоне изменения Re_2 , соответствующего участку $a - b$.

При $Re_2 = -850$ последовательность закритических режимов при увеличении Re_1 изменяется по сравнению с аналогичной последовательностью на участке $-810 < Re_2 < -700$: после первой бифуркации на пределе устойчивости образуется приполярное движение с одной частотой f_p в спектре, после второй бифуркации образуется квазипериодический режим с двумя частотами f_p и f_s в спектре. Квазипериодический режим течения сменяется, так же как и на участке $-810 < Re_2 < -700$, режимом локализованных вихрей с единственной частотой f_i . Последний в свою очередь сменяется стохастическим режимом течения.

При $Re_2 = -900$ в описанный сценарий перехода к стохастическому режиму течения добавляется еще одна бифуркация: после квазипериодического режима течения возникает режим течения с тремя независимыми частотами в спектре. На фиг. 5 представлен график зависимости относительных частот от Re_1 для $Re_2 = -900$. Первая бифуркация при $Re^{(1)}$ – потеря устойчивости с появлением приполярного движения с одной частотой f_p в спектре (кривая p на фиг. 5). При $Re^{(2)}$ происходит вторая бифуркация, сопровождающаяся появлением спиральных волн на поверхности раздела меридиональных циркуляций, возникает квазипериодический режим течения, к частоте f_p в спектре добавляется частота f_s (кривая s). Возрастание числа Re_1 приводит к уменьшению первой частоты f_p до нуля, пространственная структура в приполярной области при этом становится стационарной, затем направление распространения и форма приполярных волн меняется, а значение f_p начинает увеличиваться. При $Re^{(3)}$ в спектр добавляется третья частота (третья бифуркация) f_g (кривая g), причем ампли-



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Области гистерезиса режима локализованных вихрей (заштрихованная область 1) и стохастического режима (заштрихованная область 2)

Фиг. 5. Относительные частоты закритических режимов при $Re_2 = -900$: p – приполярного движения, s – спиральных волн, g – трехчастотного режима, t – локализованных вихрей. Заштрихованы области гистерезиса

туда этой спектральной линии больше амплитуд линий на частотах f_s и f_p . При увеличении Re_1 амплитуда пика на частоте приполярного движения возрастает и становится больше амплитуды спиральных волн, но меньше амплитуды спектральной линии на частоте f_g . При $Re^{(4)}$ происходит четвертая бифуркация, приводящая к установлению режима локализованных вихрей с единственной частотой f_l в спектре (кривая t). Частота f_g перед бифуркацией и частота f_l после бифуркации очень близки друг к другу. Это дает возможность предполагать, что на частоте f_g происходит зарождение режима локализованных вихрей. Режим локализованных вихрей в свою очередь сменяется стохастическим режимом течения при $Re^{(5)}$ (пятая бифуркация).

Границы возникновения трехчастотного, локализованных вихрей и стохастического режимов течения в диапазоне изменения $-950 < Re_2 < -850$ показаны на фиг. 1.

Отличия в сценарии перехода от ламинарного режима течения к стохастическому на участке $a - b$ по сравнению с описанным выше касаются в основном первых двух закритических режимов. В точке b наблюдается пересечение нейтральных кривых. Интересным является вопрос о возможности продолжения этих кривых в закритическую область.

Если на участке $b - c$ спиральный режим течения возникает на пределе устойчивости основного течения, то на участке $a - b$ аналогичный режим течения возникает при переходе от периодического режима к квазипериодическому. Этот переход (в пределах точности эксперимента безгистерезисный) сопровождается появлением спиральных волн на поверхности раздела меридиональных циркуляций. Линия, соответствующая началу наступления квазипериодического режима (кривая 4 фиг. 1), является продолжением участка $b - c$ границы устойчивости, а значение относительной частоты f_s/f_2 , описывающей спиральные волны на кривой 4, не претерпевает разрыва по сравнению с соответствующими значениями на границе $b - c$ (кривые 4 и 2 на фиг. 2).

При квазистатическом увеличении Re_1 над участком границы устойчивости $a - b$ и фиксированном значении Re_2 значение частоты приполярного движения f_p уменьшается, проходит через ноль (кривая 8, фиг. 1), затем приполярное движение меняет направление и его частота возрастает. Справа от локального экстремума в точке b

приполярное движение возникает после второй бифуркации с ненулевым значением частоты f_p (кривая 5 фиг. 2), причем тем большим, чем ближе к точке локального экстремума. В точке локального экстремума значения относительной частоты приполярного течения f_p/f_2 (кривые 3 и 5 на фиг. 2) имеют разрыв, так же как и кривая 1 на фиг. 1, соответствующая возникновению квазипериодического режима течения в области $-810 < Re_2 < -700$, не является продолжением кривой $a - b$.

Следовательно, возникший на пределе устойчивости режим спиральных волн распространяется без изменений в закритическую область. Границы существования режимов локализованных вихрей и хаотического непрерывны по Re_2 вблизи локального максимума на границе устойчивости. Для режима приполярного течения как граница его существования, так и относительная частота терпят разрыв в точке локального экстремума на границе устойчивости.

Заключение. Экспериментально исследованы потеря устойчивости и закритические режимы в сферическом течении Куэтта при встречном вращении сферических границ в диапазоне изменения чисел Рейнольдса, вычисленных по параметрам внешней и внутренней сфер: $-950 < Re_2 = \Omega_2 r_2^2/\nu < -700$, $250 < Re_1 = \Omega_1 r_1^2/\nu < 450$, где Ω_2 и Ω_1 – угловые скорости вращения внешней и внутренней сфер, ν – кинематическая вязкость жидкости в слое, отрицательные значения Re_2 соответствуют вращению границ слоя в противоположные стороны. Переход к хаосу происходит через последовательность не более четырех закритических режимов. Спектры пульсаций скорости всех ламинарных закритических режимов течения образуются из комбинации частот, соответствующих трем пространственным структурам течения – спиральным волн, приполярного движения и локализованных вихрей. Переход к стохастичности происходит с одночастотного режима с симметричной относительно плоскости экватора пространственной структурой. При этом всегда наблюдается гистерезис.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belayev Yu.N., Yavorskaya I.M. Transition to stochasticity of viscous flow between rotating spheres // *Nonlinear Dynamics and Turbulence*. Boston, etc.; Pitman, 1983. P. 61–70.
2. Беляев Ю.Н. Об одном подходе к исследованию возникновения турбулентности при течениях вязкой жидкости в замкнутых объемах // ПМТФ. 1995. № 1. С. 64–72.
3. Беляев Ю.Н., Монахов А.А., Яворская И.М. Устойчивость сферического течения Куэтта в толстых слоях при вращении внутренней сферы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 2. С. 9–15.
4. Dumas G. The spherical Couette flow and its large-gap stability by spectral simulation // Presented at CED94 (CED Society of Canada). Toronto, 1994.
5. Астафьева Н.М. Устойчивость и неединственность осесимметричных течений во вращающихся сферических слоях (нелинейная теория) // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 1. С. 75–86.
6. Зиканов О.Ю. Численное моделирование неустойчивостей и вторичных режимов в сферическом течении Куэтта // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 1. С. 3–15.
7. Герценштейн С.Я., Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э., Монахов А.А. Экспериментальное исследование структуры и устойчивости течения в толстом сферическом слое между разновращающимися сферами // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 4. С. 54–60.
8. Беляев Ю.Н., Яворская И.М. Течения вязкой жидкости во вращающихся сферических слоях и их устойчивость // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1980. Т. 15. С. 3–80.
9. Герценштейн С.Я., Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э. О сценарии перехода к хаосу в сферическом течении Куэтта при противоположном направлении вращения сферических границ // Докл. РАН. 1999. Т. 369. № 3. С. 337–340.
10. Wulf P., Eghers C., Rath H.J. Routes to chaos in wide-gap Spherical Couette flow // *Phys. Fluid*. 1999. V. 11. № 6. P. 1359–1372.