

УДК 533.6.011.55

© 2001 г. И.Г. БРЫКИНА, К.Д. СКОТТ

## ПОСТРОЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕПЛООБМЕНА И НАПРЯЖЕНИЯ ТРЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛАХ, ОБТЕКАЕМЫХ ПОД УГЛОМ АТАКИ

Предложена эффективная приближенная методика расчета теплообмена, напряжения трения и концентраций компонент на наветренной стороне пространственных тел, обтекаемых гиперзвуковым потоком под углом атаки. Благодаря методу подобия решение трехмерной задачи сведено к решению осесимметричной. Для определения теплового потока на реальном теле решаются модифицированные двумерные уравнения для эквивалентных осесимметричных тел, построенных специальным образом для меридиональных плоскостей исходного тела. Получены формулы и создана конвертирующая программа, по которой для произвольной трехмерной геометрии и угла атаки для любой меридиональной плоскости вычисляются все входные параметры эквивалентного тела для осесимметричных программ, используемых для расчета вязкого течения около этого тела. Решение двумерных уравнений для эквивалентных тел хорошо согласуется с более точным решением трехмерных уравнений.

Для исследования пространственных вязких гиперзвуковых течений около затупленных тел в [1] предложен метод подобия, или метод аналогии, позволяющий получать решения трехмерных задач с помощью решения двумерных уравнений. Метод основан на применении полученных соотношений подобия, связывающих тепловой поток, напряжение трения и концентрации компонент на поверхности трехмерного выпуклого тела с соответствующими величинами на поверхности эквивалентных осесимметричных тел.

Этот метод применялся и тестировался для различных газодинамических моделей течения, в частности для тонкого вязкого ударного слоя, параболизированных и полных уравнений Навье – Стокса как для совершенного газа, так и для химически неравновесных течений [2, 3]. Сравнение приближенных решений, полученных с помощью соотношений подобия путем решения двумерных уравнений для эквивалентных тел, с точным решением пространственной задачи в рамках той же газодинамической модели показало высокую точность метода аналогии для тел различной формы и разных режимов течения. Причем метод дает хорошую точность как для течений газа с постоянным отношением удельных теплостей, так и для химически реагирующих неравновесных газовых смесей. Однако до сих пор метод применялся либо для течений с двумя плоскостями симметрии – для пространственных тел, обтекаемых без угла атаки, либо, в случае обтекания тела под углом атаки, только для течения в окрестности его плоскости симметрии.

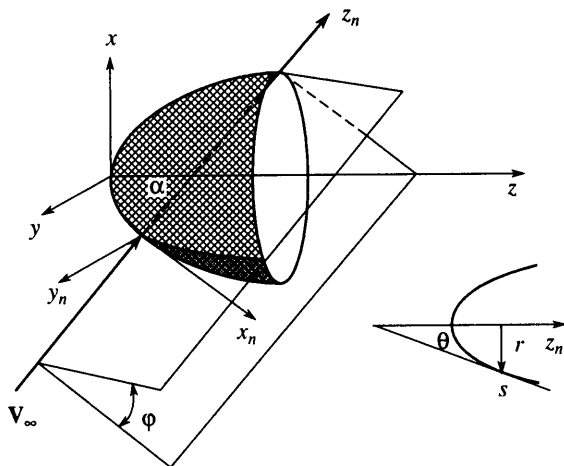
В данной работе дается методика определения эквивалентных осесимметричных тел для меридиональных плоскостей исходного пространственного тела. Приводятся формулы для всех параметров эквивалентного тела: осевого и поверхностного расстояния от точки торможения, радиуса и локального угла тела и поверхностной кривизны в зависимости от координат и поверхностных производных реального тела, угла атаки и угла меридиональной плоскости. Создана конвертирующая программа,

по которой для произвольного гладкого пространственного тела и угла атаки для произвольной выбранной меридиональной плоскости вычисляются: 1) все параметры эквивалентного осесимметричного тела, требуемые как входные для двумерных программ, используемых для расчета течения около этого тела; 2) масштабирующий множитель – отношение средних кривизн пространственного и осесимметричного тела, необходимый для модификации двумерных уравнений, решаемых для эквивалентного тела, путем умножения числа Рейнольдса на этот множитель. Форма эквивалентного осесимметричного тела и масштабирующий множитель зависят только от геометрии реального тела и угла атаки, поэтому конвертирующая программа может использоваться для любой модели вязкого течения.

Для того чтобы получить тепловой поток, напряжение трения и концентрации компонентов на пространственном теле, в данной работе конвертирующая программа используется совместно с программой Майнера и Льюиса [4, 5], разработанной для расчета химически неравновесных осесимметричных течений в рамках модели полного вязкого ударного слоя с учетом конечной каталитичности стенки [6]. Результаты решения двумерных модифицированных уравнений для эквивалентных тел сопоставляются с более точными результатами, полученными из решения трехмерных уравнений для исходного тела. Сравнения, проведенные для случаев обтекания эллиптических параболоидов под углом атаки от 0 до 45°, показали хорошую точность предложенного метода.

Заметим, что для оценки тепловых потоков в окрестности плоскости симметрии в некоторых работах используется обычное осесимметричное решение для тела, образованного вращением линии растекания (меридионального сечения), т.е. без учета реальной поперечной кривизны поверхности [7]. Проведенные расчеты и сравнения с такими решениями [1, 2, 8] показали, что использование таких осесимметричных решений может приводить к очень большим ошибкам – тепловые потоки могут различаться в несколько раз, ибо влияние поперечной кривизны на тепловой поток очень велико. И эти трехмерные эффекты хорошо учитываются благодаря введению эквивалентных тел и поправочного множителя для числа Рейнольдса, зависящего от реальной геометрии тела.

**1. Метод подобия.** Рассматриваются стационарные пространственные сверх- и гиперзвуковые безотрывные течения вязкого газа около затупленных тел в широком диапазоне чисел  $Re$ : от режима размазанного слоя, когда вязкость существенна во всей возмущенной области течения, до режимов с явно выраженным пограничным слоем. Сначала было получено приближенное аналитическое решение уравнений пространственного тонкого вязкого ударного слоя [9]. На основании анализа этого аналитического решения для теплового потока и дальнейших многочисленных расчетов было показано, что существует два параметра подобия: первый – это угол  $\theta^*$  между нормалью к поверхности и вектором скорости набегающего потока  $V_\infty$ ; второй – это комбинация  $Re/H$ , где  $H$  – средняя кривизна поверхности в данной точке, равная полусумме главных кривизн; тепловой поток зависит от геометрии тела в основном через эти два параметра [1]. Для произвольной меридиональной плоскости трехмерного тела (плоскости, проходящей через точку торможения параллельно вектору скорости  $V_\infty$ ) существует такое эквивалентное осесимметричное тело, что угол  $\theta^*$  между нормалью к его образующей и направлением набегающего потока меняется вдоль образующей так же, как угол  $\theta^*$  вдоль линии пересечения меридиональной плоскости с поверхностью исходного тела ( $\theta^s = \theta^*$ ). Тогда распределение теплового потока вдоль меридиональной плоскости трехмерного тела будет равно распределению теплового потока вдоль этого осесимметричного тела, если вторые параметры также совпадут. Это означает, что необходимо модифицировать двумерную систему уравнений для эквивалентного осесимметричного тела, умножая число  $Re$  (или характерный размер) на отношение  $H^s/H$  ( $H^s$  – средняя кривизна поверхности эквивалентного тела в рассматриваемой точке), т.е. вместо постоянного числа  $Re$  подставить переменное  $Re^* = Re H^s/H$ , зависящее от геометрии поверхности.



Фиг. 1. Системы координат

Заметим, что в случае, если решаются уравнения пограничного слоя, они не модифицируются, но тепловой поток, полученный для эквивалентного тела, надо умножить на  $(H/H^s)^{1/2}$ .

Результаты многочисленных расчетов показали, что такие же параметры подобия существуют также для напряжения трения и концентраций компонент на поверхности.

**2. Эквивалентное осесимметричное тело.** Определим все параметры эквивалентного осесимметричного тела: осевое и поверхностное расстояние от точки торможения, радиус и локальный угол тела и поверхностную кривизну в зависимости от координат и поверхностных производных реального тела, угла атаки и меридионального угла.

Будем рассматривать течение с одной плоскостью симметрии. Пусть геометрия трехмерного тела определяется в декартовой системе координат уравнением  $z = f(x, y)$ , так что  $y = 0$  – плоскость симметрии (фиг. 1). Геометрическая точка торможения расположена в плоскости симметрии – это точка, в которой поверхность тела нормальна вектору скорости набегающего потока. Обозначим через  $\alpha$  угол атаки – угол между вектором скорости  $V_\infty$  и осью  $z$ . Тогда координаты точки торможения  $(x_0, 0, z_0)$  определяются уравнениями

$$f_{x0} = \operatorname{tg} \alpha, \quad z_0 = f(x_0, 0) \quad (2.1)$$

Введем вспомогательную декартову систему координат  $(x_n, y_n, z_n)$ , начало которой расположено в точке торможения, а ось  $z_n$  направлена вдоль скорости набегающего потока

$$x_n = (z - z_0)\sin \alpha + (x - x_0)\cos \alpha \quad (2.2)$$

$$y_n = y$$

$$z_n = (z - z_0)\cos \alpha - (x - x_0)\sin \alpha$$

Меридиональная плоскость – плоскость, проходящая через точку торможения и ось  $z_n$ , может быть задана с помощью меридионального угла  $\varphi$ , который она составляет с плоскостью симметрии; той части плоскости симметрии, где  $x_n > 0$ , соответствует  $\varphi = 0$ , а той ее части, где  $x_n < 0$ , –  $\varphi = \pi$ . Уравнение меридиональной плоскости будет

$$y = \operatorname{tg} \varphi x_n = \operatorname{tg} \varphi [(z - z_0)\sin \alpha + (x - x_0)\cos \alpha] \quad (2.3)$$

Для каждой выбранной меридиональной плоскости с углом  $\varphi$  строится эквивалентное осесимметричное тело, так что его точка торможения соответствует точке тор-

можения реального тела, а его ось соответствует оси  $z_n$ . Для каждой точки  $(x, y, z)$  на поверхности реального тела вдоль меридиональной плоскости определяются координаты соответствующей ей точки и все другие параметры эквивалентного осесимметричного тела.

1. Осевое расстояние соответствующей точки  $z_n$  определяется из (2.2), в точке торможения  $z_n = 0$ .

2. Локальный угол эквивалентного осесимметричного тела  $\theta^s$  равен углу между нормалью к поверхности реального тела и вектором скорости набегающего потока по принципу построения эквивалентного тела. Будем рассматривать угол  $\theta = \pi/2 - \theta^s$  между касательной к образующей и осью  $z_n$ , для которого получается уравнение

$$\sin \vartheta = \frac{f_x \sin \alpha + \cos \alpha}{E^{1/2}}, \quad E = 1 + f_x^2 + f_y^2 \quad (2.4)$$

В точке торможения  $\theta = \pi/2$ .

3. Кривизна эквивалентного осесимметричного тела определяется из уравнения

$$\kappa = -\frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{d(\sin \vartheta)}{dz_n}$$

Здесь  $s$  – расстояние вдоль поверхности эквивалентного тела от точки торможения. После ряда преобразований получаются формулы для кривизны  $\kappa$

$$\varphi \neq \frac{\pi}{2}: \quad \kappa = \frac{(f_{xx} + df_{xy})(f_x \cos \alpha - (f_y^2 + 1) \sin \alpha) + (f_{xy} + df_{yy})f_y(f_x \sin \alpha + \cos \alpha)}{((f_x + df_y) \cos \alpha - \sin \alpha)E^{3/2}} \quad (2.5)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}: \quad \kappa = \frac{f_{xy}(f_x \cos \alpha - (f_y^2 + 1) \sin \alpha) + f_{yy}f_y(f_x \sin \alpha + \cos \alpha)}{f_y \cos \alpha E^{3/2}}$$

$$d = \frac{f_x \sin \alpha + \cos \alpha}{1 - f_y \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi} \operatorname{tg} \varphi \quad (2.6)$$

Здесь  $d = dy/dx$  – полная производная вдоль меридиональной плоскости.

Формулы (2.5) для кривизны  $\kappa$  имеют неопределенности (0/0) в точке торможения, после раскрытия которых получим формулы для кривизны эквивалентного тела в этой точке

$$\varphi \neq \frac{\pi}{2}: \quad \kappa_0 = \frac{(f_{xx0}^2 \cos^2 \alpha + d_0^2 f_{yy0}) \cos \alpha}{f_{xx0} + d_0^2 f_{yy0}} \quad (2.7)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}: \quad \kappa_0 = f_{yy0} \cos \alpha, \quad d_0 = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \alpha} \quad (2.8)$$

где индекс 0 соответствует точке торможения.

4. Радиус эквивалентного осесимметричного тела  $r$  и длина дуги  $s$  (расстояния от оси  $z_n$  до поверхности и вдоль поверхности от точки торможения) определяются из уравнений

$$\frac{dr}{dz_n} = \operatorname{tg} \vartheta, \quad \frac{ds}{dz_n} = \cos^{-1} \vartheta$$

В точке торможения  $r = s = 0$ , поэтому

$$r = \int_0^{z_n} \operatorname{tg} \vartheta dz_n, \quad s = \int_0^{z_n} \cos^{-1} \vartheta dz_n$$

Здесь интегралы вычисляются вдоль поверхности реального трехмерного тела в меридиональной плоскости. Поскольку подынтегральные выражения имеют особенности при  $z_n = 0$ , разобьем интегралы на две части. Вблизи точки торможения, от  $z_n = 0$  до некоторого малого  $z_{n1}$ , перейдем к интегрированию по переменной  $x$  ( $\varphi \neq \pi/2$ ) или по  $y$  ( $\varphi = \pi/2$ )

$$\varphi \neq \frac{\pi}{2}: r = \int_{x_0}^{x_1} \operatorname{tg} \vartheta \frac{dz_n}{dx} dx + \int_{z_{n1}}^{z_n} \operatorname{tg} \vartheta dz_n, \quad s = \int_{x_0}^{x_1} \cos^{-1} \vartheta \frac{dz_n}{dx} dx + \int_{z_{n1}}^{z_n} \cos^{-1} \vartheta dz_n$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}: r = \int_0^{y_1} \operatorname{tg} \vartheta \frac{dz_n}{dy} dy + \int_{z_{n1}}^{z_n} \operatorname{tg} \vartheta dz_n, \quad s = \int_0^{y_1} \cos^{-1} \vartheta \frac{dz_n}{dy} dy + \int_{z_{n1}}^{z_n} \cos^{-1} \vartheta dz_n$$

Для полных производных вдоль меридиональной плоскости  $dz_n/dx$ ,  $dz_n/dy$  получаются формулы

$$\frac{dz_n}{dx} = (f_x + df_y) \cos \alpha - \sin \alpha, \quad \frac{dz_n}{dy} = f_y \cos \alpha \quad (2.9)$$

Здесь  $d$  определяется по формуле (2.6).

Используя соотношения (2.9) и (2.4), получим окончательные выражения для расчета  $r$  и  $s$

$$\varphi \neq \frac{\pi}{2}: r = \int_{x_0}^{x_1} F_1 dx + \int_{z_{n1}}^{z_n} F_2 dz_n, \quad s = \int_{x_0}^{x_1} F_3 dx + \int_{z_{n1}}^{z_n} F_4 dz_n$$

$$F_1 = CF_2, \quad F_3 = CF_4, \quad F_2 = (f_x \sin \alpha + \cos \alpha) D^{-1/2}, \quad F_4 = (1 + f_x^2 + f_y^2)^{1/2} D^{-1/2}$$

$$C = (f_x + df_y) \cos \alpha - \sin \alpha, \quad D = (f_x \cos \alpha - \sin \alpha)^2 + f_y^2$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}: r = \int_0^{y_1} F_1^* dy + \int_{z_{n1}}^{z_n} F_2 dz_n, \quad s = \int_0^{y_1} F_3^* dy + \int_{z_{n1}}^{z_n} F_4 dz_n$$

$$F_1^* = f_y \cos \alpha F_2, \quad F_3^* = f_y \cos \alpha F_4$$

В точке торможения ( $x = x_0$ ,  $y = 0$ ) подынтегральные выражения имеют неопределенности (0/0), после раскрытия которых получим их значения в начальной точке интегрирования

$$\varphi \neq \frac{\pi}{2}: (F_1)_0 = (F_3)_0 = \frac{f_{xx0} + d_0^2 f_{yy0}}{\sqrt{f_{xx0}^2 \cos^2 \alpha + d_0^2 f_{yy0}^2}}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}: (F_1^*)_0 = (F_3^*)_0 = 1$$

Здесь  $d_0$  находится по формуле (2.8).

5. Для отношения средних кривизин трехмерного и эквивалентного осесимметричного тела получается выражение

$$\frac{H}{H^s} = \frac{f_{xx}(1 + f_y^2) + f_{yy}(1 + f_x^2) - 2f_{xy}f_x f_y}{(\kappa + r^{-1} \cos \vartheta)(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}$$

В точке торможения после раскрытия неопределенности имеем

$$\left( \frac{H}{H^s} \right)_0 = \frac{(f_{xx0} \cos^2 \alpha + f_{yy0}) \cos \alpha}{2\kappa_0}$$

б. Все полученные линейные переменные необходимо отнести к радиусу кривизны (или к кривизне) в точке торможения

$$z_n^* = z_n \kappa_0, \quad r^* = r \kappa_0, \quad s^* = s \kappa_0, \quad \left( \frac{H}{H^s} \right)^* = \left( \frac{H}{H^s} \right) \kappa_0, \quad \kappa^* = \frac{\kappa}{\kappa_0}$$

Здесь индекс звездочка означает нормализованные или безразмерные параметры эквивалентного осесимметричного тела, которые вместе с углом  $\theta$  могут быть использованы в любой программе, рассчитывающей вязкое течение около осесимметричного тела.

**3. Конвертирующая программа.** Для произвольного гладкого пространственного тела (заданного либо аналитически, либо по точкам) и угла атаки для каждой выбранной меридиональной плоскости конвертирующая программа вычисляет:

1) все параметры эквивалентного осесимметричного тела, требуемые как входные для двумерных программ, используемых для расчета течения около этого тела: осевое расстояние от точки торможения  $z_n$ , поверхностное расстояние от точки торможения  $s$ , радиус тела  $r$ , локальный угол  $\theta$  и поверхностную кривизну  $\kappa$ ;

2) масштабирующий множитель – отношение средних кривизн пространственного и осесимметричного тела  $H^s/H$ , требуемый для модификации двумерных уравнений, решаемых для эквивалентного осесимметричного тела (путем умножения числа Re или других параметров, связанных с масштабом длины, на этот множитель).

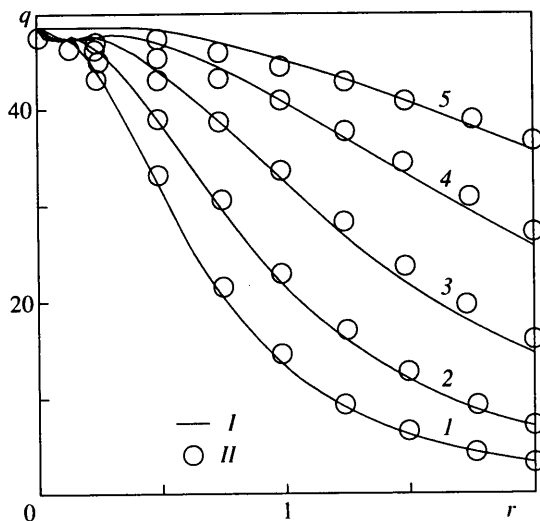
Для нахождения решения на реальном пространственном теле надо решать модифицированные двумерные уравнения вдоль поверхности эквивалентных осесимметричных тел, соответствующих выбранным меридиональным плоскостям. Форма эквивалентных осесимметричных тел и масштабирующий множитель зависят только от геометрии реального тела и угла атаки, поэтому конвертирующая программа может использоваться для любой модели вязкого течения. Эта программа позволяет рассчитывать тепловые потоки на поверхности тел, обтекаемых под углом атаки, в случае трехмерных течений с одной плоскостью симметрии.

**4. Результаты расчетов.** Для того чтобы получить тепловой поток, напряжение трения и концентрации компонентов на пространственном теле, в данной работе конвертирующая программа использовалась совместно с программой Майнера и Льюиса, разработанной для расчета химических неравновесных осесимметричных течений в рамках модели полного вязкого ударного слоя [4, 5] и модифицированной для включения граничных условий с конечной каталитичностью стенки [6]. Сначала для выбранного меридионального угла (или сечения) с помощью конвертирующей программы определялись все параметры соответствующего эквивалентного тела, которые затем вместе с масштабирующим множителем вводились в программу [5], модифицированную путем умножения числа Рейнольдса на отношение  $H^s/H$  в каждой точке, и с ее помощью решались двумерные уравнения вдоль поверхности эквивалентных осесимметричных тел, соответствующих выбранным меридиональным плоскостям. Точность метода оценивалась путем сравнения результатов решения двумерных модифицированных уравнений для эквивалентных тел и трехмерных уравнений для исходного тела (в рамках той же модели течения).

Для тестирования были проведены расчеты течения около различных эллиптических параболоидов, обтекаемых гиперзвуковым потоком газа под углами атаки  $\alpha$  от 0 до 45°. Уравнение эллиптического параболоида можно записать в декартовой системе координат как

$$z = 1/2(x^2 + ky^2) \tag{4.1}$$

где  $k$  – отношение главных кривизн в вершине параболоида ( $\sqrt{k}$  – отношение главных осей эллиптического поперечного сечения). Координаты точки торможения в этом случае определяются аналитически:  $x_0 = \text{tg } \alpha$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 1/2 \text{tg}^2 \alpha$ . Для меридиональной плоскости, задаваемой углом  $\varphi$ , получаются выражения при  $\varphi \neq \pi/2$ :



Фиг. 2. Распределения 1-5 теплового потока  $q$  ( $\text{Вт}/\text{см}^2$ ) вдоль различных меридиональных плоскостей  $\varphi = 0; 45; 63,4; 76; 90^\circ$  эллиптического параболоида при  $k = 0,25$ ,  $h = 70$  км,  $V_\infty = 7,25$  км/с,  $R_0 = 0,5$  м с моделью каталитической активности [10]: I – метод подобия, II – численные решения трехмерных уравнений

Если  $\varphi \neq 0$  или  $\pi$  (не плоскость симметрии) и  $\alpha \neq 0$

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - k \operatorname{tg}^2 \varphi \sin^2 \alpha [x^2 + 2x \operatorname{ctg} \alpha - (2 + \operatorname{tg}^2 \alpha)]}}{k \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi} \quad (4.2)$$

Если  $\alpha = 0$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi \quad (4.3)$$

Если  $\varphi = 0$  или  $\pi$  (плоскость симметрии)

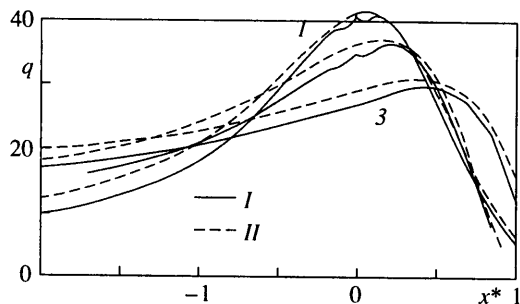
$$y = 0 \quad (4.4)$$

В случае  $\varphi = \pi/2$   $x = x_0$ .

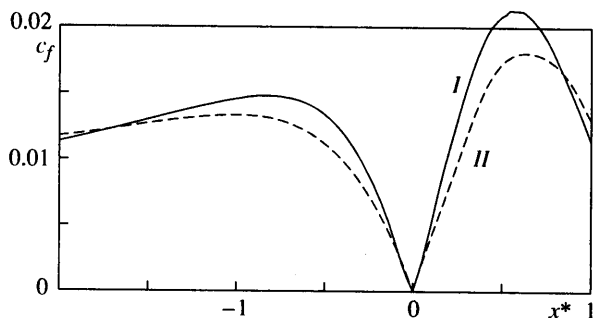
При движении вдоль меридиональной плоскости при  $\varphi \neq \pi/2$ , изменяя координату  $x$ , определяем  $y, z$ , а также первые и вторые производные от  $z$  по  $x$  и  $y$  из (4.1) – (4.4) для конвертирующей программы, преобразующей эти трехмерные параметры (координаты и производные) в параметры эквивалентного осесимметричного тела  $z_n, r, s, \vartheta, \chi, H/H^s$ , которые затем вводятся в модифицированную программу [5], и таким образом находится решение. Если  $\varphi = \pi/2$ , то необходимо двигаться по координате  $y$ .

При расчетах в уравнениях полного вязкого ударного слоя учитывались неравновесные химические реакции и многокомпонентная диффузия для семикомпонентного воздуха. Поверхность тела предполагалась равновесно-излучающей. На ударной волне использовались обобщенные условия Ренкина – Гюгонио. Рассматривались различные модели каталитической активности поверхности. Условия в набегающем потоке соответствовали высотам от 100 до 50 км атмосферы Земли для траектории спуска космического корабля "Space Shuttle", охватывая замороженные, неравновесные и околоравновесные режимы течения.

На фиг. 2 показаны результаты расчетов распределения теплового потока вдоль различных меридиональных плоскостей  $\varphi = 0-90^\circ$  эллиптического параболоида с  $k = 0,25$ , обтекаемого под нулевым углом атаки. Условия полета соответствовали



Фиг. 3. Распределения 1–3 теплового потока  $q$  (Вт/см<sup>2</sup>) вдоль плоскости симметрии эллиптического параболоида для различных углов атаки  $\alpha = 15, 30, 45^\circ$  при  $k = 0,4$ ,  $h = 70$  км,  $V_\infty = 7,25$  км/с,  $R_0 = 0,7$  м с моделью каталитической активности [10]: I – метод подобия, II – численные решения трехмерных уравнений



Фиг. 4. Распределения коэффициента трения  $c_f$  вдоль плоскости симметрии эллиптического параболоида под углом атаки  $\alpha = 15^\circ$  при  $k = 0,4$ ,  $h = 70$  км,  $V_\infty = 7,25$  км/с,  $R_0 = 0,7$  м с моделью каталитической активности [10]: I – метод подобия, II – численное решение трехмерных уравнений

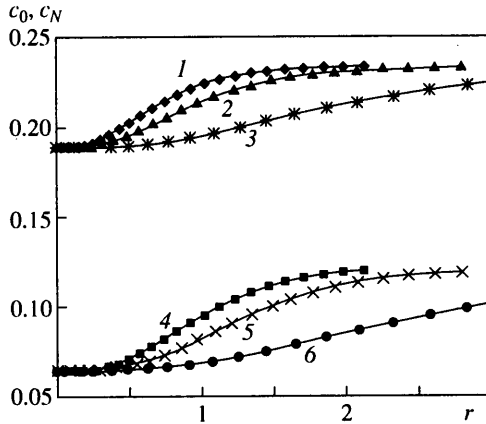
высоте  $h = 70$  км,  $V_\infty = 7,25$  км/с, минимальный из радиусов главных кривизн в точке торможения  $R_0 = 0,5$  м, скорости каталитических реакций на поверхности соответствовали [10]. Здесь же проводится сравнение с численным решением трехмерных уравнений вязкого ударного слоя, полученным неявным конечно-разностным методом четвертого порядка точности по нормальной координате и второго порядка точности по продольным координатам [11]. Расхождение приближенного и точного решения составляет не более 7%.

Расчеты теплообмена и напряжения трения для различных углов атаки  $\alpha = 15\text{--}45^\circ$  проведены для тех же условий полета и той же модели каталитичности, но для тела с большим радиусом затупления ( $R_0 = 0,7$  м). На фиг. 3 и 4 приводятся сравнение теплового потока и коэффициента трения с точными численными решениями [2] для плоскости симметрии эллиптического параболоида с  $k = 0,4$  в зависимости от координаты  $x^*$ , отсчитываемой от точки торможения

$$x^* = -x_n = -(0,5(x^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \sin \alpha + (x - \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha)$$

Согласование полученных решений с точными достаточно хорошее, но уменьшается при удалении от точки торможения.





Фиг. 5. Распределения массовых атомарных концентраций кислорода  $c_O$  (1–3) и азота  $c_N$  (4–6) на поверхности для трех меридиональных плоскостей  $\varphi = 0, 45, 90^\circ$  эллиптического параболоида при  $k = 0,5$ ,  $h = 70$  км,  $V_\infty = 7,25$  км/с,  $R_0 = 0,5$  м с моделью каталитической активности [10]

На фиг. 5 приводится пример расчета массовых атомарных концентраций кислорода и азота на поверхности для трех меридиональных плоскостей из диапазона  $\varphi = 0-90^\circ$  эллиптического параболоида с  $k = 0,5$  на высоте 70 км,  $V_\infty = 7,25$  км/с, радиус кривизны в точке торможения в плоскости симметрии  $R_0 = 0,7$  м, использовалась модель каталитической активности [10].

**Заключение.** Для решения пространственных задач теплообмена предложена методика, основанная на построении эквивалентных осесимметричных тел для меридиональных плоскостей реального трехмерного тела. Двумерные уравнения, описывающие течение около такого осесимметричного тела, модифицируются путем введения масштабирующего множителя, зависящего только от геометрии реального тела. Формы этих эквивалентных тел также зависят только от геометрических параметров. Эта методика, упрощающая расчет теплообмена, может применяться при использовании любой модели вязкого течения. Показано, что соединение конвертирующей программы, определяющей параметры эквивалентных тел, с программой расчета двумерных уравнений, в данной работе – с программой расчета уравнений вязкого ударного слоя Майнера – Льюиса, позволяет достаточно точно предсказывать тепловой поток, напряжение трения и концентрации компонент на поверхности трехмерных тел.

Работа выполнена при поддержке программ "Университеты России – фундаментальные исследования" (грант № 15.04.01.49) и "Ведущие научные школы" (грант № 00-15-96030).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брыкина И.Г., Русаков В.В., Щербак В.Г. Метод определения тепловых потоков и трения в трехмерных задачах гиперзвукового обтекания с помощью двумерных решений // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 1. С. 62–66.
2. Brykina I.G. The similarity method for solving three-dimensional super- and hypersonic viscous flows over blunt bodies // Proc. 2nd Europ. Symp. on Aerothermodynamics for Space Vehicles. ESTEC, Noordwijk, Netherlands, 1994. P. 109–114.

3. *Брыкина И.Г., Сахаров В.И.* Применение метода подобия для расчета тепловых потоков и напряжения трения в окрестности плоскости симметрии затупленных тел в рамках полных уравнений Навье – Стокса // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 4. С. 9–16.
4. *Miner E.W., Lewis C.H.* Hypersonic ionizing air viscous shock-layer flows over nonanalytic blunt bodies // NASA CR-2550. 1975. 100 p.
5. *Miner E.W., Lewis C.H.* Computer user's guide for a chemically reacting viscous shock-layer program // NASA CR-2551. 1975. 177 p.
6. *Scott C.D.* Effects of nonequilibrium and wall catalysis on shuttle heat transfer // J. Spacecraft and Rockets. 1985. V. 22. № 5. P. 489–499.
7. *Gupta R.N., Moss J.N., Simmonds A.L. et al.* Space shuttle heating analysis with variation in angle of attack and catalycity // J. Spacecraft and Rockets. 1984. V. 21. № 2. P. 217–220.
8. *Brykina I., Sakharov V.* Heat transfer and shear stress prediction in 3D hypersonic flows by approximate methods // Proc. 8th Annu. Thermal and Fluids Analysis Workshop, Spacecraft Analysis and Design. Houston: NASA, 1977. P. 14-1–14-12.
9. *Брыкина И.Г., Русаков В.В., Щербак В.Г.* Аналитическое и численное исследование пространственного вязкого ударного слоя на затупленных телах // ПМТФ. 1991. № 4. С. 81–88.
10. *Scott C.D.* Catalytic recombination of nitrogen and oxygen on high-temperature reusable surface insulation // AIAA Paper. 1980. № 1477. 9 p.
11. *Брыкина И.Г., Русаков В.В., Щербак В.Г.* Соотношения подобия для расчета пространственного химически неравновесного гиперзвукового вязкого обтекания затупленных тел // Отчет Ин-та механ. МГУ, 1990. № 3971. 47 с.

Москва

Поступила в редакцию  
22.XII.1999