

УДК 532.58

© 2001 г. Г.Я. ДЫННИКОВА

СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ТЕЛО, ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ВИХРЕВОМ ОТРЫВНОМ ОБТЕКАНИИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Получена формула, связывающая силы, действующие на трехмерное тело, с движением системы вихрей и источников, моделирующих это тело, при нестационарном вихревом отрывном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью. Форма тела может быть изменяющейся во времени. Полученная формула в случае стационарного обтекания профиля одно-родным потоком совпадает с формулой Н.Е. Жуковского.

В основе подхода, использованного в данной работе, лежит представление тел в виде движущихся вихрей и источников. Вихри, моделирующие тела, могут быть расположены как на поверхности, так и внутри тела, быть поверхностными, объемными или дискретными. При этом они должны удовлетворять следующим условиям. В совокупности с внешними вихрями, оканчивающимися на поверхности тела, вихревые трубки замкнуты или бесконечны, непрерывность их не нарушается в процессе движения, а интенсивность постоянна вдоль трубки и во времени. Вихри нигде не исчезают иначе, чем при аннигиляции в совпадающих точках, и не рождаются иначе, чем в процессе, обратном аннигиляции. Изменение во времени поля моделирующих вихрей представляется как результат их движения относительно тела. Если с тела сходит вихревая пелена, то это интерпретируется как сползание моделирующих вихрей, которые в этом случае оказываются движущимися относительно тела даже при стационарном распределении.

1. Теорема. Пусть тело, обтекаемое произвольным потоком идеальной несжимаемой жидкости в поле потенциальных сил, представлено в виде точечных источников и вихрей, удовлетворяющих описанным выше условиям. Тогда сила \mathbf{F} , действующая на тело, равна сумме следующих сил: обобщенной архимедовой силы \mathbf{F}_A , силы \mathbf{F}_m , связанной с ускорением центра тяжести объема тела, силы \mathbf{F}_V , действующей на моделирующие вихри, и силы \mathbf{F}_Q , действующей на источники, расположенные внутри тела

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_Q \quad (1.1)$$

Обобщенная архимедова сила $\mathbf{F}_A = \rho \int_T \nabla \Pi d\tau$, где ρ – плотность, Π – потенциал объемных сил. Интегрирование ведется по объему тела.

Сила $\mathbf{F}_m = M \mathbf{a}_m$ связана с ускорением. Здесь \mathbf{a}_m – ускорение центра тяжести объема, занимаемого телом, M – масса вытесненной жидкости.

Сила, действующая на вихри, $\mathbf{F}_V = \rho \int_{\Gamma} (\mathbf{V} - \mathbf{u}) \times d\mathbf{\Gamma}$. Вихревой элемент $d\mathbf{\Gamma}$ при объемном распределении завихренности равен $\mathbf{\Omega} dt$ ($\mathbf{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V}$, $d\tau$ – элемент объема), при поверхностном – γds , для дискретных вихрей – $\Gamma d\mathbf{l}$. Интегрирование ведется по всем моделирующим тело вихрям, \mathbf{V} – локальная скорость в точке, где находится вихревой элемент, \mathbf{u} – скорость его движения.

Сила, действующая на источники, $F_Q = \sum Q_i (2V_m - V(\mathbf{R}_i) - \mathbf{u}_i) + (\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_i) \dot{Q}_i$. Здесь Q_i , \mathbf{R}_i , \mathbf{u}_i – интенсивность, радиус-вектор и скорость движения i -го источника, \mathbf{R}_m и V_m – радиус-вектор и скорость центра тяжести объема, занимаемого телом.

Если все вихри, моделирующие тело, замкнуты или бесконечны внутри тела, то скорость V может быть вычислена как скорость, индуцированная только внешними вихрями, включая бесконечно удаленный.

2. Доказательство. В [1] показано, что если обтекаемые тела представлены в виде движущихся вихрей, удовлетворяющих описанным выше требованиям, то при стационарных условиях на бесконечности справедливо равенство

$$\frac{p}{\rho} + \Pi + \frac{V^2}{2} - \int_{\tau} \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) d\tau = \text{const} \quad (2.1)$$

где p , ρ , Π и V – давление, плотность, потенциал объемных сил и скорость в точке \mathbf{R} , $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ – скорость движения вихревого элемента $d\Gamma$, расположенного в точке $\mathbf{r} \in \tau$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) d\tau$ – скорость, индуцированная в точке \mathbf{R} этим элементом. Индуцированная скорость вычисляется по закону Био – Савара

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) d\tau = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma \times (\mathbf{R} - \mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3}$$

Интегрирование ведется по всем областям с ненулевой завихренностью, включая поверхности тангенциального разрыва (в этом случае $d\tau$ – элемент поверхности), а также по областям, содержащим моделирующие вихри (объемные, поверхностные или дискретные). Если моделирующие вихри представлены в виде суперпозиции двух или нескольких полей, движущихся с различными скоростями, интегрирование ведется для каждого поля, а затем результаты суммируются.

Для свободных вихрей скорость $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ равна скорости движения жидкости в данной точке: $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})$. Для свободных поверхностей разрыва поверхностная завихренность равна $\gamma = (V_+ - V_-) \times \mathbf{n}$, скорость движения вихрей $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 1/2(V_+ + V_-)$, где V_+ , V_- – скорости по обе стороны поверхности. Скорости движения моделирующих вихрей, удовлетворяющие сформулированным в начале работы условиям и приводящие к необходимому перераспределению завихренности, должны быть найдены. Эта процедура является достаточно простой. Некоторые способы описаны в [1], а также в данной работе ниже.

Аналогичная (2.1) формула может быть записана также при наличии в течении или внутри тела изолированных источников.

$$\frac{p}{\rho} + \Pi + \frac{V^2}{2} - \int \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) d\tau - \sum_i \left\{ \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial Q_i}{\partial t} \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|} + \mathbf{w}_i(\mathbf{R}) \mathbf{u}_i \right\} = \text{const} \quad (2.2)$$

Здесь $\mathbf{w}_i(\mathbf{R})$ – скорость, индуцированная в точке \mathbf{R} i -м источником, Q_i – его интенсивность, \mathbf{u}_i – скорость движения. Это следует из доказанной в [1] формулы

$$\frac{p}{\rho} + \Pi + \frac{V^2}{2} - \int \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) d\tau + \frac{\partial \phi}{\partial t} = f(t)$$

где в данном случае ϕ – потенциал поля точечных источников в трехмерном пространстве. Последнее слагаемое в левой части равенства (2.2) есть $\partial \phi / \partial t$.

Скорость в любой точке течения определяется формулой

$$V(\mathbf{R}) = \int \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) d\tau + \sum_i \mathbf{w}_i(\mathbf{R}) + V_\infty \quad (2.3)$$

Функция $f(t)$ превращается в константу в случае $V_\infty = \text{const}$.

Определим внутри тела поле скоростей по формуле (2.3) и соответствующее ему поле давлений по формуле (2.2). Можно показать, что эти поля удовлетворяют уравнению

$$\frac{dV}{dt} + (\mathbf{V} - \mathbf{u}) \times \boldsymbol{\Omega} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \Pi \right) \quad (2.4)$$

которое можно интерпретировать как уравнение движения жидкости под действием массовой силы $-\rho(\mathbf{V} - \mathbf{u}) \times \boldsymbol{\Omega}$. Отметим, что (2.4) следует из (2.3) и (2.2) только при выполнении условий, наложенных выше на совокупность моделирующих и свободных вихрей, а также при условии, сформулированном в [1], а именно при стремлении к нулю среднего значения величины $|\mathbf{u}||\boldsymbol{\Omega}|$ по сфере бесконечного радиуса.

Аэродинамическая сила, действующая на тело, равна

$$\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{n}_+ \rho_+ ds$$

Нормаль \mathbf{n}_+ направлена внутрь тела, значения функций с индексом плюс вычислены на внешней поверхности тела. Соответственно минус означает нормаль и функцию с противоположной стороны. Известно [2], что для функции f , непрерывной в объеме T , ограниченном поверхностью S , справедливо равенство $\oint_S \mathbf{n}_- f_- ds = \int_T \nabla f d\tau$. При

наличии поверхностей разрыва или особых точек аналогичное равенство имеет вид

$$\oint_S \mathbf{n}_+ f_+ ds = - \int_T \nabla f d\tau + \oint_{S_{+-j}} \mathbf{n} f ds \quad (2.5)$$

Здесь S_{+-j} – совокупность поверхностей разрыва S_{+-} и поверхностей вокруг источников S_j , причем интегрирование по поверхностям разрыва ведется с двух сторон.

Проинтегрируем уравнение (2.4) по объему тела и используем равенство (2.5)

$$\rho \int_T \frac{dV}{dt} d\tau + \rho \int_T (\mathbf{V} - \mathbf{u}) \times \boldsymbol{\Omega} d\tau = \oint_S \mathbf{n}_+ \rho_+ ds - \int_{S_{+-j}} \mathbf{n} \rho ds - \rho \int_T \nabla \Pi d\tau$$

Откуда

$$\mathbf{F} = \rho \int_T \frac{dV}{dt} d\tau + \oint_{S_{+-j}} \mathbf{n} \rho ds + \rho \int_T (\mathbf{V} - \mathbf{u}) \times \boldsymbol{\Omega} d\tau + \rho \int_T \nabla \Pi d\tau \quad (2.6)$$

Последнее слагаемое в правой части этого равенства есть сила, связанная с потенциальным полем объемных сил. Для поля тяжести это – архимедова сила. Первое слагаемое в отсутствие источников и при условии непротекания на поверхности равно $\mathbf{F}_m = M \mathbf{a}_m$. Третье слагаемое – сила, действующая на объемные моделирующие вихри, $\mathbf{F}_V = \rho \int (\mathbf{V} - \mathbf{u}) \times d\boldsymbol{\Gamma}$. Если поверхностей разрыва нет и отсутствуют источники, то равенство (1.1) для этого случая доказано.

При моделировании системой вихрей тела изменяющейся формы условие непротекания может быть выполнено только при сохраняющемся объеме тела. При изменяющемся объеме необходимо введение источников соответствующей интенсивности.

Рассмотрим ускорение центра масс гипотетической жидкости внутри тела в этом случае. По определению радиус-вектор центра масс равен $M \mathbf{R}_m = \int_M \mathbf{r} dm$, где $M = \rho T$,

T – объем тела, $dm = \rho d\tau$. Скорость центра масс может быть получена дифференцированием этого выражения с учетом того, что масса M при наличии источников изменяется ($dM/dt = \sum Q_i$), а следовательно, изменяется и область интегрирования

$$M \mathbf{V}_m = \int_M \mathbf{V} dm + \sum Q_i (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_m) \quad (2.7)$$

Продифференцировав (2.7), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{a}_m = & -\sum Q_i \mathbf{V}_m + \int_M \frac{d\mathbf{V}}{dt} dm - \rho \int_{S_{+j}} \mathbf{V}((\mathbf{V} - \mathbf{V}_s) \cdot \mathbf{n}) ds + \\ & + \sum_i ((\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_m) \dot{Q}_i + Q_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{V}_m)) \end{aligned}$$

где \mathbf{V}_s – скорость движения поверхности разрыва.

Нетрудно показать, что для сферической поверхности S_j , движущейся вместе с источником Q_i со скоростью \mathbf{u}_i , при стремлении радиуса сферы к нулю справедливо равенство

$$\rho \int_{S_j} \mathbf{V}((\mathbf{V} - \mathbf{V}_s) \cdot \mathbf{n}) ds = \frac{1}{3} Q_i (\mathbf{u}_i - 4\mathbf{V})$$

Подставляя полученное равенство в предыдущее и выражая из него величину $\int_M (d\mathbf{V}/dt) dm = \rho \int_T (d\mathbf{V}/dt) d\tau$, получим

$$\rho \int_M \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\tau = \mathbf{M}\mathbf{a}_m + \rho \int_{S_{+-}} \mathbf{V}((\mathbf{V} - \mathbf{V}_s) \cdot \mathbf{n}) ds + (\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_i) \dot{Q}_i + \frac{1}{3} Q_i (6\mathbf{V}_m - 2\mathbf{u}_i - 4\mathbf{V}) \quad (2.8)$$

Теперь рассмотрим интеграл $\int_{S_{+-}} \mathbf{n} p ds$ в правой части (2.6). В случае поверхности разрыва, интегрирование по двум ее сторонам можно представить как интегрирование по одной стороне $\int_{S_+} \mathbf{n}_+ (p_+ - p_-) ds$. Из (2.2) следует

$$\mathbf{n}_+ (p_+ - p_-) = -\mathbf{n}_+ \rho (V_+^2 - V_-^2) / 2 + \mathbf{n}_+ \rho \int (\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_+) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_-)) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) d\tau \quad (2.9)$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части (2.9). Для этого рассмотрим разность интегралов

$$\begin{aligned} & \int (\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_+) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_-)) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) d\tau - \int (\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_+) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_-)) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{R}) d\tau = \\ & = \int (\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_+) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_-)) \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{R})) d\tau \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение интеграла в правой части при стремлении \mathbf{R}_+ и \mathbf{R}_- к \mathbf{R} стремится к нулю во всех точках (включая $\mathbf{r} = \mathbf{R}$, так как в этом случае $(\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{R})) = 0$). Однако переход к пределу в подынтегральном выражении не всегда правомерен. Можно показать, что если поверхность является гладкой, а функция $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ на поверхности непрерывна, то при стремлении \mathbf{R}_+ и \mathbf{R}_- к \mathbf{R} значение интеграла стремится к нулю. Следовательно

$$\int (\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_+) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_-)) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) d\tau = \int (\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_+) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_-)) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{R}) d\tau = (\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{R})$$

Подставляя это выражение в (2.9), получим

$$\mathbf{n}_+ (p_+ - p_-) = \rho \mathbf{n}_+ \cdot \left(\left(\mathbf{u} - \frac{\mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_-}{2} \right) \cdot (\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-) \right)$$

Отметим, что эта формула согласуется с теоремой Жуковского в "малом" для потенциальных течений.

Используя известную формулу векторной алгебры $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, запишем

$$\mathbf{n}_+ (p_+ - p_-) = \rho \left\{ \left(\mathbf{u} - \frac{\mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_-}{2} \right) \times (\mathbf{n}_+ \times (\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-)) + (\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-) \cdot \left(\left(\mathbf{u} - \frac{\mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_-}{2} \right) \cdot \mathbf{n}_+ \right) \right\}$$

Интегрируя по поверхности и учитывая равенство нормальных составляющих скоростей ($1/2(\mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_-) \cdot \mathbf{n}_+ = \mathbf{V}_+ \cdot \mathbf{n}_+ = -\mathbf{V}_- \cdot \mathbf{n}_-$), а также определение поверхностной завихренности $\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-) \times \mathbf{n}_+$, получим

$$\int_{S_{+-}} \mathbf{n} p ds = \rho \int_S \left(\frac{\mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_-}{2} - \mathbf{u} \right) \times \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{R}) ds - \rho \int_{S_{+-}} \mathbf{V}((\mathbf{V} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}) ds \quad (2.10)$$

И наконец, рассмотрим интеграл $\int_{S_i} \mathbf{n} p ds$ по сфере бесконечно малого радиуса вокруг источника

$$\oint_{S_i} \mathbf{n} p ds = \rho \oint_{S_i} \left\{ \mathbf{n}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{u}_i) - \frac{\mathbf{n} V^2}{2} \right\} ds = \frac{Q_i(\mathbf{V} - \mathbf{u}_i)}{3} \quad (2.11)$$

Теперь подставим в (2.6) выражения (2.8) (2.10) и (2.11)

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & M \mathbf{a}_m + \rho \int_{S_{+-}} \mathbf{V}((\mathbf{V} - \mathbf{V}_s) \cdot \mathbf{n}) ds + (\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_i) \dot{Q}_i + Q_i(2\mathbf{V}_m - \mathbf{u}_i - \mathbf{V}) + \\ & + \rho \int_{S_+} (\mathbf{V} - \mathbf{u}) \times \boldsymbol{\gamma} ds - \rho \int_{S_{+-}} \mathbf{V}((\mathbf{V} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}) ds + \rho \int_T (\mathbf{V} - \mathbf{u}) \times \boldsymbol{\Omega} d\tau + \rho \int_T \nabla P d\tau \end{aligned} \quad (2.12)$$

Очевидно, что нормальные к поверхности составляющие скоростей \mathbf{V}_s и \mathbf{u} равны, поэтому интегралы $\rho \int_{S_{+-}} \mathbf{V}((\mathbf{V} - \mathbf{V}_s) \cdot \mathbf{n}) ds$ и $-\rho \int_{S_{+-}} \mathbf{V}((\mathbf{V} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}) ds$ взаимно уничтожаются. Таким образом, равенство (1.1) доказано.

Формула (1.1) согласуется с формулой Л.И. Седова [3], полученной в двумерном случае для гидродинамических сил при неустановившемся движении идеальной жидкости.

3. Двумерные течения и бесциркуляционное обтекание трехмерных тел. В случае двумерных течений и бесциркуляционного обтекания трехмерных тел формула (1.1) может быть упрощена. Эти два вида течений объединяет то, что каждая вихревая линия из множества вихрей, моделирующих тело, замкнута или бесконечна внутри этого множества, т.е. не существует вихревых линий во внешнем потоке, оканчивающихся на теле и переходящих в вихревые линии указанного множества. Рассмотрим силу, действующую на вихри и источники. Как было сказано выше, сила, действующая на элемент бесконечно тонкой вихревой трубки длины dl_1 интенсивности γ_1 , находящийся в точке \mathbf{r}_1 и движущийся со скоростью \mathbf{u}_1 , равна

$$\mathbf{F} = \rho(\mathbf{V}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{u}_1) \times \boldsymbol{\gamma}_1 dl_1$$

Согласно (2.3), скорость $\mathbf{V}(\mathbf{r}_1)$ есть сумма (интеграл) скоростей, индуцированных всеми вихрями (включая бесконечно удаленный) и источниками. Выделим из этой суммы (интеграла) скорость, индуцируемую элементом вихревой трубки длины dl_2 интенсивности γ_2 , находящимся в точке \mathbf{r}_2 . Эта скорость равна $\gamma_2 / 4\pi \times \mathbf{r}_{1,2} / r_{1,2}^3$. Обозначим соответствующий элемент силы $d\mathbf{F}_{1,2}$ и назовем его силой взаимодействия двух вихревых элементов

$$d\mathbf{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi} \frac{[\boldsymbol{\gamma}_2 \times \mathbf{r}_{1,2}] \times \boldsymbol{\gamma}_1}{r_{1,2}^3} dl_1 dl_2$$

Как указывалось выше, сила, действующая на тело, складывается из всех сил, действующих на вихревые элементы и источники. Если оба вихревых элемента являются внутренними (принадлежат множеству моделирующих вихрей), то в сумму войдут $d\mathbf{F}_{1,2}$ и $d\mathbf{F}_{2,1}$. В общем случае $d\mathbf{F}_{1,2} \neq -d\mathbf{F}_{2,1}$, однако при интегрировании по l_1 и l_2 по замкнутым или бесконечным вихревым линиям имеет место равенство $\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}$.

Здесь не приводится доказательство этого утверждения, так как оно аналогично известному факту из электродинамики, где силы взаимодействия между токами аналогичны силам взаимодействия между вихрями. При этом для замкнутых токов третий закон Ньютона выполняется, а для незамкнутых может не выполняться, в чем нет противоречия, так как незамкнутых токов не существует. Из сказанного следует, что при вычислении силы, действующей на тело, силы взаимодействия между внутренними замкнутыми вихрями можно не учитывать.

Аналогично можно ввести понятие взаимодействия между источником и вихревым элементом, а именно силой, действующей от источника q на вихревой элемент $\gamma_1 dl_1$, назвать величину $d\mathbf{F}_{qv}$

$$d\mathbf{F}_{qv} = \mathbf{w} \times \gamma_1 dl_1 = \frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}_{qv} \times \gamma_1}{r_{qv}^3} dl_1$$

а силой, действующей на источник от вихревого элемента, – величину $d\mathbf{F}_{vq}$

$$d\mathbf{F}_{vq} = -\mathbf{v}q = -\frac{q}{4\pi} \frac{\gamma_1 \times \mathbf{r}_{vq}}{r_{vq}^3} dl_1$$

Здесь \mathbf{w} и \mathbf{v} – скорости, индуцируемые источником и вихревым элементом соответственно, $\mathbf{r}_{vq} = -\mathbf{r}_{qv}$ – радиус-вектор между ними. Из формул видно, что $d\mathbf{F}_{qv} = -d\mathbf{F}_{vq}$. Следовательно, силы взаимодействия между внутренними вихрями и источниками можно не учитывать при вычислении силы, действующей на тело. Также нетрудно показать, что силы взаимодействия между моделирующими тело источниками взаимно уничтожаются при суммировании. Итак, в окончательном виде можно записать выражение для сил, действующих на вихри \mathbf{F}_v и источники \mathbf{F}_Q , моделирующие тело, в случае двумерных течений или в случае бесциркуляционного обтекания трехмерного тела

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_{in} + \mathbf{F}_R \quad (3.1)$$

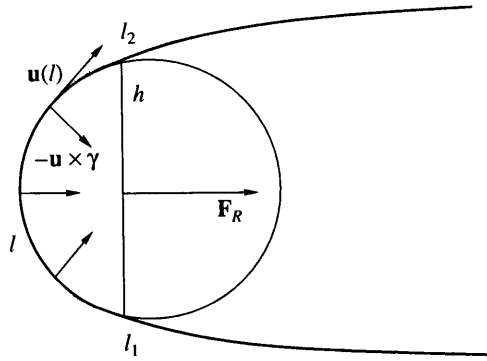
$$\mathbf{F}_0 = \rho \mathbf{V}_\infty \times \int d\Gamma, \quad \mathbf{F}_{in} = \rho \int \mathbf{V}_v(\mathbf{r}) \times d\Gamma, \quad \mathbf{F}_R = -\rho \int \mathbf{u} \times d\Gamma$$

$$\mathbf{F}_Q = -\mathbf{V}_\infty Q_i - \mathbf{V}_v Q_i - \mathbf{u}_i Q_i + 2\mathbf{V}_m Q_i + (\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_i) dQ_i/dt \quad (3.2)$$

Здесь \mathbf{V}_v – скорость, индуцируемая внешними по отношению к телу вихрями. В выражении для \mathbf{F}_v первое слагаемое \mathbf{F}_0 есть известная формула Н.Е. Жуковского для подъемной силы. Второе слагаемое \mathbf{F}_{in} , связанное с искажением поля скоростей внешними вихрями, принято называть индуктивной силой. Третье слагаемое \mathbf{F}_R связано с движением вихрей, моделирующих тело, т.е. с нестационарностью и отрывом пограничного слоя. Рассмотрим на примере отрывного обтекания цилиндра (фиг. 1) характер вклада этой силы.

Как было сказано в начале работы, система моделирующих вихрей должна быть такой, чтобы вихри нигде не исчезали иначе, чем при аннигиляции и не рождались иначе, чем парами противоположных знаков или вихревыми кольцами бесконечно малой площади. При отрывных течениях в точках отрыва появляются новые свободные вихри и на соответствующую величину изменяется суммарная интенсивность моделирующих вихрей. При подходе, принятом в данной работе, это интерпретируется как сползание моделирующих вихрей с поверхности и превращение их в свободные. Соответственно движущимися считаются все вихри на поверхности.

Выделим элемент поверхности Δl с плотностью циркуляции γ . Полная циркуляция выделенного элемента с точностью до малых второго порядка равна $\gamma \Delta l$. Если на одном конце отрезка вихревые линии "втекают" в него со скоростью $u(l)$ и плотностью $\gamma(l)$, а с другого "вытекают" со скоростью $u(l + \Delta l)$ и плотностью $\gamma(l + \Delta l)$, то за время Δt полная величина циркуляции выделенного элемента изменится на величину



Фиг. 1. Схема обтекания цилиндра

$(u\gamma|_l - u\gamma|_{l+\Delta l})\Delta t$. Отсюда следует дифференциальное уравнение, определяющее $u\gamma$

$$\frac{\partial}{\partial l}(u\gamma) = -\frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (3.1)$$

с граничными условиями в точках отрыва l_1 и l_2

$$u\gamma|_{l_1+\epsilon} = V\gamma|_{l_1-\epsilon}, \quad u\gamma|_{l_2-\epsilon} = V\gamma|_{l_2+\epsilon}$$

где скорость V равна полусумме скоростей по обе стороны поверхности в точке отрыва.

Очевидно, что при выполнении граничного условия в одной точке отрыва оно автоматически будет выполняться во второй точке, так как циркуляция по замкнутому контуру сохраняется. Если $\partial\gamma/\partial t = 0$, то $u\gamma = \text{const}$. При этом вектор $d\mathbf{F}_R = -\mathbf{u} \times \gamma dl$ направлен по нормали к кривой l в сторону, указанную на фиг. 1. Из фиг. 1 видно, что равнодействующая сил \mathbf{F}_R направлена в сторону, противоположную движению цилиндра, и в случае $u\gamma = \text{const}$ равна

$$F_R = 2h\rho u\gamma = h\rho(V_+^2 - V_-^2)$$

где V_+ , V_- – скорости по обе стороны поверхности в точке отрыва. Нетрудно видеть, что давление торможения в зоне отрыва отличается от давления торможения набегающего потока на величину $\Delta p = -\rho(V_+^2 - V_-^2)/2$, а интеграл от силы, создаваемой давлением Δp на заднюю поверхность, равен F_R . Таким образом, становится ясным физический смысл этой силы в стационарном случае. При несимметричном отрыве направление вектора силы \mathbf{F}_R может быть неколлинеарным вектору скорости движения тела. В стационарном случае оно перпендикулярно отрезку, соединяющему точки отрыва. Напомним, что помимо члена F_R вклад в силу сопротивления дает также член F_{in} , так как скорость, индуцированная внешними вихрями, например вихревой пеленой, сошедшей с тела, не совпадает со скоростью набегающего потока.

В рассмотренном выше примере тело моделировалось движущимися поверхностными вихрями. Однако возможно другое представление, не требующее для нахождения скоростей движения вихрей решения дифференциального уравнения (3.1).

4. Безотрывное обтекание сферы, движущейся с ускорением. Решение задачи в этом случае хорошо известно, поэтому данный пример может рассматриваться как тест для выведенных в данной работе формул.

Условие непротекания для сферы, движущейся со скоростью V , обеспечивается диполем, т.е. источником и стоком бесконечно большой интенсивности Q , помещенными на бесконечно малом расстоянии 2δ , таком, что $Q\delta = V\pi\rho R^3$. При изменении

скорости произведение $Q\delta$ должно изменяться по закону

$$\frac{d}{dt} Q\delta = \pi\rho R^3 \frac{dV}{dt}$$

Изменение величины $Q\delta$ можно интерпретировать, полагая Q и δ конечными величинами, как увеличение Q при постоянном δ либо изменение δ при постоянном Q , т.е. движение источника и стока в противоположные стороны со скоростями $\mp d\delta/dt$ либо одновременное движение и изменение интенсивностей. Во всех случаях

$$\delta \frac{dQ}{dt} + Q \frac{d\delta}{dt} = \pi\rho R^3 \frac{dV}{dt}$$

Подставляя в формулу (3.2) значения $(R_m - R_1) = \delta$, $(R_m - R_2) = -\delta$, $Q_1 = -Q$, $Q_2 = Q$, $V_\infty = V_V = 0$, $V_m = V$, $u_1 = V - d\delta/dt$, $u_2 = V + d\delta/dt$, получим

$$F_Q = -2\pi\rho R^3 dV/dt$$

Складывая F_Q с величиной $F_m = 4/3\pi\rho R^3 dV/dt$, получим, согласно (1.1), полную силу F

$$F = -\frac{2}{3}\pi\rho R^3 dV/dt \quad (4.1)$$

что совпадает с известным результатом [4].

Сферу, движущуюся с ускорением в однородном потоке, можно представить также движущимися вихрями. Условие непротекания обеспечивается вихревым кольцом бесконечно малого радиуса a с бесконечно большой интенсивностью Γ , такой, что $a^2\Gamma = 2VR^3$. При изменении скорости величина $a^2\Gamma$ должна увеличиваться. Это увеличение можно интерпретировать, полагая a и Γ конечными величинами, как увеличение радиуса кольца, т.е. движение вихря со скоростью $u = da/dt = (R^3/a\Gamma)(dV/dt)$. Так как длина кольца равна $2\pi a$, а вектор скорости движения перпендикулярен вектору вихря, получаем для величины $\mathbf{u} \times \mathbf{\Gamma}$, проинтегрированной по кольцу, значение $-2\pi R^3 dV/dt$. Соответственно сила F_R равна

$$F_R = -2\pi\rho R^3 \frac{dV}{dt}$$

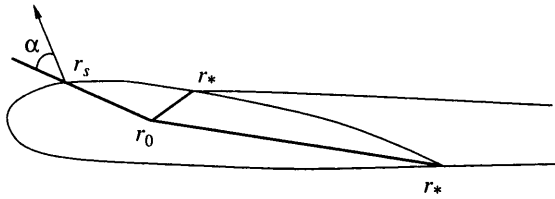
Складывая F_R с силой $F_m = 4/3\pi\rho R^3 dV/dt$, согласно (1.1) получим значение для полной силы F , совпадающее с (4.1).

Можно представить также, что моделирующее вихревое кольцо, имея малый, но конечный радиус, не растягивается, а увеличивается по интенсивности за счет потока вихревых колец, рождающихся в его центре и разбегающихся к краям. При этом вся площадь основного моделирующего кольца заполнена движущимися вихрями, для которых

$$\gamma_* u_* = \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{2R^3}{a^2} \frac{dV}{dt}$$

Умножая последнее выражение на площадь кольца и учитывая перпендикулярность векторов, получим то же самое выражение для силы, что и выше.

5. Некоторые способы представления обтекаемых тел движущимися вихрями, источниками и диполями. Рассмотрим вначале двумерные течения. В этом случае все вихревые линии являются прямыми, перпендикулярными плоскости течения, следовательно, каждая вихревая линия либо целиком принадлежит множеству моделирующих вихрей, либо является свободной. Если распределение внешней завихренности в начальный момент времени известно, то распределение моделирующих вихрей опре-



Фиг. 2. Моделирование тела движущимися вихрями

деляется с помощью известной процедуры в виде дискретных [5] или распределенных [6] вихрей из условия непротекания с учетом на острых кромках.

При отрывных течениях в точках отрыва появляются новые свободные вихри и на соответствующую величину изменяется суммарная интенсивность моделирующих вихрей. При подходе, принятом в данной работе, это интерпретируется как сползание моделирующих вихрей с поверхности и превращение их в свободные. Выше было выведено уравнение для определения скоростей движения вихрей при такой интерпретации в случае неподвижной поверхности. При подвижной поверхности и изменяемой геометрии тела целесообразно введение системы координат, связанной с поверхностью. Например, в двумерном случае вдоль замкнутого контура можно задать координату ξ ($0 \leq \xi \leq 1$) и радиус-вектор $\mathbf{r}(\xi, t)$ ($\mathbf{r}(0, t) = \mathbf{r}(1, t)$). Тогда в координатах ξ уравнение (3.1) будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (u' \gamma') = - \frac{\partial \gamma'}{\partial t}$$

Здесь γ' – плотность циркуляции в переменных ξ ($\gamma' d\xi = \gamma dl$), $u' = d\xi/dt$. Скорость в декартовой системе координат можно выразить через u'

$$\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\xi, t) + u' \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{r}(\xi, t)$$

Можно показать, что полученное уравнение согласуется с известным уравнением, связывающим скорость движения свободной вихревой пелены с динамикой изменения плотности циркуляции [7].

Возможны и другие способы представления тел движущимися вихрями, не требующие решения дифференциального уравнения для нахождения скоростей движения. Например, можно представить, что поверхностные вихри, моделирующие тело, неподвижны, а внутренняя область тела заполнена вихрями бесконечно малой плотности Ω_* , движущимися с бесконечно большой скоростью \mathbf{u}_* от некоторой выделенной точки \mathbf{r}_0 к точкам поверхности \mathbf{r}_s вдоль прямолинейных отрезков $\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_0$ (см. фиг. 2) таким образом, что векторное произведение $\Omega_* \times \mathbf{u}_*$ в каждой внутренней точке \mathbf{r} равно

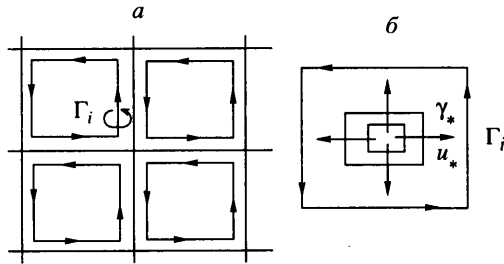
$$\Omega_* \times \mathbf{u}_* = \frac{\partial \gamma}{\partial t} \times \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \cos \alpha}$$

где α – угол между вектором $\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_0$ и нормалью к поверхности.

На отрезках, соединяющих точку \mathbf{r}_0 с точками отрыва \mathbf{r}_*

$$\gamma_* \times \mathbf{u}_* = \frac{d\Gamma}{dt} \times \frac{\mathbf{r}_* - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_* - \mathbf{r}_0|}$$

где $d\Gamma$ – приращение свободной завихренности сходящей в точке \mathbf{r}_* вихревой пелены. Полученные выражения могут непосредственно вставляться в формулы для определения давления и силы.



Фиг. 3. Представление вихревой поверхности дискретными "вихревыми рамками" (а) и изменение интенсивности рамки как результат рождения внутри нее рамок нулевой площади и их последующего расширения (б)

В трехмерном случае также возможны различные способы представления тел движущимися вихрями, источниками и диполями. Рассмотрим некоторые из них. При численном решении задачи приходится прибегать к дискретизации непрерывных полей. Так, поле моделирующих вихрей может быть представлено как совокупность П-образных вихрей, или отрезков вихревых линий, расположенных вдоль линий сетки и т.п. Вихри могут также быть расположены внутри тела. В любом случае процедура нахождения мгновенного распределения интенсивностей вихревых элементов из условия непротекания и условий на острых краях сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим вначале случай, когда внешние вихревые линии не оканчиваются на обтекаемом теле. Поле моделирующих вихрей соленоидально на поверхности тела, т.е. все вихревые трубки замкнуты на поверхности. В этом случае удобно искать поле моделирующих вихрей в виде вихревых "колец", а точнее, "рамок", окружающих ячейку (фиг. 3, а). Это эквивалентно представлению поверхности в виде диполей, причем плотность диполей в ячейке постоянна.

Пусть такое представление найдено в два последовательных момента времени. Изменение интенсивности вихревого "кольца" за время Δt можно интерпретировать, как рождение в любой его точке вихревых колец бесконечно малой площади и их последующее растяжение до размеров ячейки (фиг. 3, б). При этом векторное произведение $\gamma_* \times u_*$ внутри ячейки равно $(d\Gamma/dt)n$, где n – нормаль к поверхности ячейки. Это выражение для $\gamma_* \times u_*$ можно непосредственно подставлять в формулы для определения давления и сил. Решать дифференциальные уравнения для нахождения скоростей движения моделирующих вихрей при этом не требуется.

В случае, когда внешние вихревые трубки оканчиваются на поверхности тела, целесообразно представлять моделирующие вихри в виде суперпозиции двух полей, одно из которых представляет собой продолжение внешних вихревых трубок, второе – состоит из вихревых трубок, замкнутых внутри тела. Первое поле может быть выбрано достаточно произвольно, например в виде конусообразных вихревых трубок, выходящих из фиксированной точки внутри тела и оканчивающихся на поверхности, или в виде поверхностных вихрей, направленных, например, вдоль линий расчетной сетки. Второе, соленоидальное поле должно обеспечивать условие непротекания для заданного распределения внешней завихренности и первого поля. Оно может быть так же, как и в выше рассмотренном случае, найдено в виде вихревых рамок.

Скорость движения для первого поля моделирующих вихрей выбирается таким образом, чтобы обеспечивалась непрерывность вихревых линий на границе с внешними вихрями. Например, при пространственном распределении, о котором говорилось выше, отрезки вихрей можно считать движущимися так, что скорость движения в точках пересечения с поверхностью совпадает со скоростью на поверхности. При

поверхностном представлении этого поля вихревые линии могут, например, считаться приклеенными к телу всюду, кроме бесконечно малой окрестности точки перехода во внешнюю линию, где относительная скорость изменяется от нуля до внешней скорости, в результате движения линия на поверхности будет наращиваться вдоль траектории движения. Возможны и другие способы представления этого поля.

При ~~наличии~~ отрыва потока необходимо обеспечить условие, согласно которому вихри нигде не исчезают иначе, чем при аннигиляции, и не рождаются иначе, чем парами или кольцами бесконечно малой площади. Это можно сделать с помощью представления сошедших вихрей в виде раскрывающихся вихревых рамок, частично "приклеенных" к поверхности тела. При этом "приклеенные" части колец будут влиять на распределение поля γ_2 , обуславливая его движение даже в случае стационарного отрывного течения (имеются в виду отрывные течения, при которых неустойчивостью вихревого следа пренебрегают).

Заключение. Выведена связь между силами, действующими на тело, и движением системы вихрей и источников, моделирующих это тело, при произвольном движении и изменяющейся геометрии тела в условиях вихревого и отрывного обтекания идеальной несжимаемой жидкостью.

Полученная в работе формула (1.1) переходит в формулу Н.Е. Жуковского для подъемной силы в случае стационарного обтекания профиля однородным потоком, согласуется с теоремой Н.Е. Жуковского "в малом" для разности давлений на тонкой поверхности, обтекаемой безвихревым потоком, а также с формулой Л.И. Седова для гидродинамических сил в случае плоских течений.

Применение результатов данной работы, так же как и результатов [1], целесообразно при решении задач гидродинамики вихревыми методами, когда в основе лежит расчет распределения моделирующих тело особенностей по известному полю внешней завихренности, после чего скорость в любой точке определяется как индуцированная всеми особенностями и свободными вихрями. Далее вычисляется изменение внешнего вихревого поля, а затем распределение моделирующих особенностей в следующий момент времени. По известным распределениям моделирующих особенностей в два последовательных момента времени можно найти скорость их движения, причем процедура может быть построена таким образом, что решение дифференциальных уравнений для нахождения скоростей не потребуется.

Автор выражает глубокую благодарность Г.Ю. Степанову за полезное обсуждение работы.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-15-9603 поддержки ведущих научных школ и проект 98-01-00156).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дынникова Г.Я. Аналог интегралов Бернулли и Коши–Лагранжа для нестационарного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 1. С. 31–41.
2. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 426 с.
3. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980. 448 с.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
5. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 351 с.
6. Tou H.B., Hancock G.J. Inviscid theory of two-dimensional aerofoil/spoiler configurations at low speed // Aeronaut. Journal. 1987. V. 91 № 908. P. 350–366.
7. Ильичев К.П., Постоловский С.Н. Расчет нестационарного отрывного обтекания тел плоским потоком невязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 2. С. 72–82.