

УДК 532.527

© 2001 г. С.К. БЕТЯЕВ

**КАК РАЗРЕЗАТЬ ВИХРЕВОЙ ШНУР?**

Выведены условия применимости линейной теории, а также условия, когда влиянием контактного разрыва можно пренебречь. Исследована топология траекторий в задаче о дифракции тонкой вихреструи на пластине и получено ее аналитическое решение в предельно упрощенном варианте. Предложена асимптотически строгая модель эквивалентного вихря в виде узкой высоконапорной струи.

В соответствии с правилом запрета Жуковского плоская задача о продольном разрезании пластиной (ножом) колоннообразного вихря некорректна. Согласно теоретическим представлениям, его можно разрезать только поперек, т.е. в том случае, когда скорость и плоскость ножа перпендикулярны оси вихря.

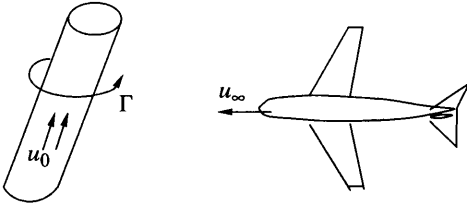
В задаче о встрече терпящего бедствие самолета (самолета-иксплуэтера) со следом, образованным самолетом-генератором, используются предельно упрощенные модели. Так как встреча с антипараллельной парой вихрей (т.е. параллельной парой вихревых жгутов, вращающихся в разные стороны) маловероятна, изучается в основном дифракция одиночного колонообразного вихря на твердом теле [1]. Самолет заменяется плоскостью (ножом). Поскольку в быстропротекающих процессах эффекты вязкости не успевают проявиться, ударные нагрузки можно рассчитывать в рамках уравнения Эйлера, а не более сложных уравнений (Навье – Стокса, Рейнольдса).

Если самолет начинает свой путь к вихрю, находясь от него на бесконечном удалении (когда время  $t = -\infty$ ), то в такой постановке задача оказывается существенно некорректной: за бесконечное время интерактивного взаимодействия самолета с вихрем последний из них в силу неустойчивости потеряет свою форму. Задача корректна только для тел, не возмущающих вихрь: пластина под нулевым углом атаки или аппарат, движущийся со сверхзвуковой скоростью.

1. Спутный вихрь моделируется эквивалентным вихрем – цилиндрической вихреструей с распределенными по радиусу значениями циркуляции (завихренности)  $\Gamma$  и осевой компоненты скорости (продольного импульса)  $u_0$  (фиг. 1). Здесь и далее используется декартова система координат  $x, y$  с составляющими скорости  $u, v$ . Кроме определяющих структуру вихря параметров, включающих его возраст, задаются геометрические параметры, отмечающие начальное местоположение вихря относительно подлетающего самолета и углы наклона к направлению полета. В зависимости от этих параметров основные предельные случаи следующие.

Если направление полета параллельно оси вихря (фиг. 2), то должно быть задано расстояние между самолетом и осью вихря  $h$  и угол ориентации вихря относительно самолета  $\theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ . В этом случае, когда основное влияние вихрь оказывает на все составляющие аэродинамических сил и момент крена, возможно стационарное течение. При больших значениях  $h$  главную роль играет завихренность, а не импульс. При малых  $h$  ( $u \infty / u_0$ ) в связи с образованием колонн Тейлора – Праудмена появляется дополнительная сила сопротивления, порой необычная по своему воздействию [2].

При движении самолета перпендикулярно оси вихря с плоскостью крыла, расположенной параллельно его оси (продольное разрезание), задача редуцируется к плоской (фиг. 3, а). Как показал Н.Е. Жуковский [3], разрезать такой точечный



Фиг. 1. Схема дифракции вихря

циркуляцию  $\Gamma_0$ , получим уравнение для определения отстояния  $y_0(t)$  свободного вихря от линии движения профиля

$$\frac{dy_0}{dt} \approx \frac{\Gamma_0}{2\pi u_\infty t}$$

Логарифмическая особенность в решении этого уравнения при  $t = -\infty$  означает, что вихрь, расположенный при  $y_0 < 0$ , еще на больших расстояниях от профиля пересечет линию его движения  $y = 0$  снизу вверх; профиль пройдет под ним, не испытав столкновения. В реальных условиях, когда размах крыла конечный, задача станет трехмерной, а возмущение вихря самолетом приведет к его изгибу и вращению вокруг третьей координаты – оси  $z$ . В этой задаче главенствующим фактором оказывается завихренность.

Если направление движения самолета перпендикулярно оси вихря и плоскость крыла тоже к ней перпендикулярна (поперечное разрезание), то главенствующим оказывается импульс, спутный след уподобляется струе (фиг. 3, б). Хотя невозмущенный вихрь по форме осесимметричен, эта задача имеет феноменологическое сходство с плоской задачей о входе крылового профиля в вертикальный порыв воздуха. Задача определяется параметрами: хордой профиля  $l$ , его скоростью  $u_\infty$ , шириной порыва  $a$  (физ. 3, в), а также функцией – распределением скорости в порывае  $v(x)$ . В рамках идеальной жидкости граница порыва может являться контактным разрывом скорости, полное давление движущегося в порыве воздуха больше, чем полное давление в неподвижном окружении. В существующих теориях [4–5] исследуются задачи, когда влияние контактного разрыва мало, т.е. скорость на его границе мала по сравнению со средним модулем скорости

$$|v(0)| = |v(a)| \ll v_0 = \frac{1}{a} \int_0^a |v(x)| dx$$

2. Когда влияние завихренности  $\omega = dv/dx$  настолько мало, что течение в главном приближении можно считать потенциальным? Для этого условия нельзя использовать среднюю завихренность, так как она равна нулю, если, например, число Бернулли постоянно в порыве

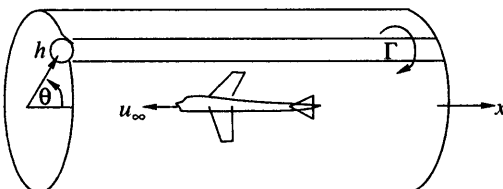
$$\int_0^a \omega dx = v(a) - v(0) = 0$$

При  $\epsilon = al = O(1)$ ,  $\sigma = v_0/u_\infty = O(1)$  в качестве достаточного условия существования потенциала скорости можно использовать неравенство

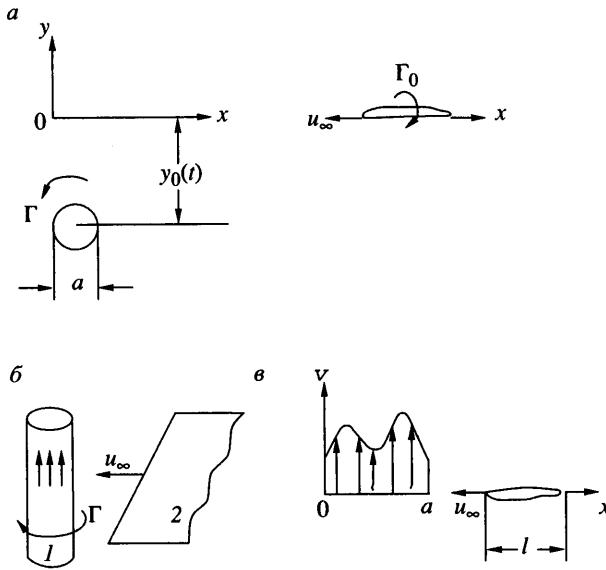
$$\max \left| \frac{dv}{dx} \right| \ll \frac{u_\infty}{l}$$

Такие же оценки справедливы для задачи о поперечном разрезании вихря.

Для вывода условия применимости линейной теории прежде всего следует



Фиг. 2. Схема движения самолета параллельно оси вихря



Фиг. 3. Разрезание вихреструи: *а* – продольное, *б* – поперечное (*1* – вихрь, *2* – нож), *в* – вход профиля в воздушный порыв

выбрать функцию, относительно которой производится линеаризация уравнений. Так, условие (2.1) обеспечивает линеаризацию относительно потенциала скорости. Рассмотрим условие линеаризации плоской задачи относительно функции тока  $\psi$ , уравнение для которой

$$\Delta\psi = -\omega(\psi) \quad (2.2)$$

линейно, если  $\omega = k\psi$ , где  $k$  – константа. В невозмущенном потоке из (2.2) определяем удовлетворяющее этому условию распределение функции тока в порыве  $\psi_0(x)$

$$\psi''_0 + k\psi_0 = 0$$

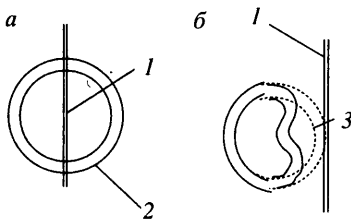
При  $k > 0$  решение периодическое:  $v = -\partial\psi_0/\partial x = c \sin(\sqrt{k}x)$ ,  $c$  – константа; если число Бернулли постоянно, то из условия равенства на границах порыва давлений, а значит, и равенства абсолютных значений скорости находим, что  $a = N\pi k^{-1/2}$ , где  $N$  – произвольное целое число.

При  $k < 0$  решение экспоненциальное:  $v = \pm c \exp(\pm\sqrt{-k}x)$ ; если число Бернулли постоянно, то ширина порыва бесконечна.

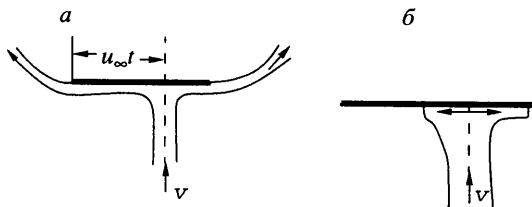
При  $k = 0$  скорость порыва постоянна.

Опыты с кольцевым вихрем показывают, что его легко разрезать поперек, но невозможно разрезать продольно. На фиг. 4, *а* вихрь движется по нормали к рисунку, нож расположен на диаметре кольцевого вихря (поперечное разрезание) – последний практически не изменяет своей формы. На фиг. 4, *б* вихрь смещен от центра кольцевого вихря примерно на радиус (продольное разрезание) – вихрь искривляется, избегая встречи с ножом.

3. Рассматриваемые задачи о поперечном разрезании вихря и о входе пластины в порыв характеризуются безразмерным определяющим параметром  $\epsilon = a/l$ . Проанализируем два предельных случая. При  $\epsilon \gg 1$  самолет целиком уместается в вихре, а задача о широком порыве разделяется на две независимые и математически адекватные задачи: вход в порыв и выход из него. При движении самолета внутри широкого порыва устанавливается стационарный режим.



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Разрезание кольцевого вихря: *a* – поперечное, *б* – продольное (*1* – нож, *2* – вихревое кольцо, *3* – форма невозмущенного вихря)

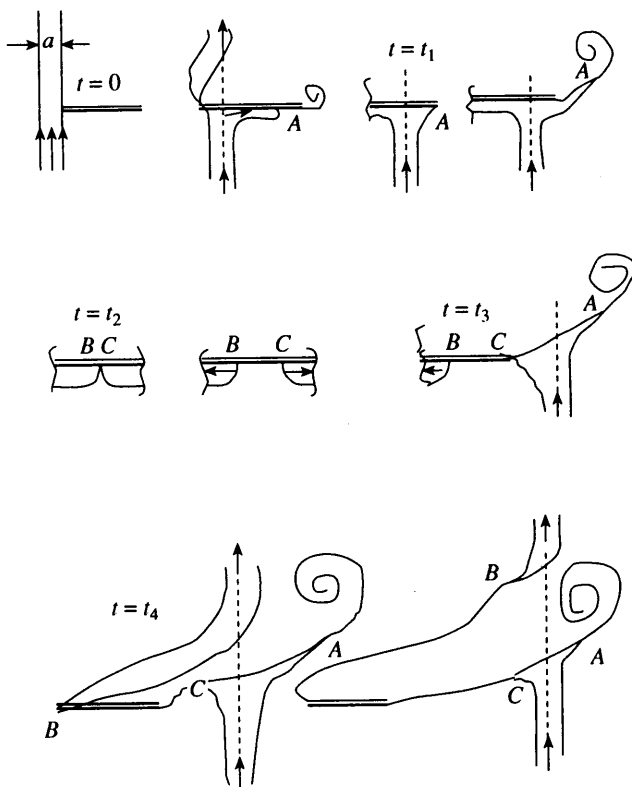
Фиг. 5. Схемы обтекания пластины: *a* – высоконапорной и *б* – низконапорной струями

Более реальным представляется приближение тонкого вихря и тонкого порыва:  $\epsilon \ll 1$ . Рассмотрим сначала задачу о тонком порыве. Она отождествляется с ударом струи о плоскость. Примем для простоты, что скорость порыва  $v$  постоянна. Кроме определяющего геометрического параметра  $\epsilon$  в этой задаче присутствует еще кинематический параметр  $\sigma = v_0/u_\infty$ , который может принимать два крайних значения:  $\sigma \gg 1$  или  $\sigma \ll 1$  (высоконапорная или низконапорная струя). В первом случае процессы внутри струи быстропротекающие, сразу же устанавливается квазистационарный режим, в масштабе хорды струя уходит на бесконечность (фиг. 5, *a*). Во втором случае внутри струи движение медленное, ее пристеночная часть имеет передний и задний фронты (фиг. 5, *б*).

В обоих случаях топология течения устанавливается с помощью так называемого мысленного эксперимента, который получил распространение в физике наряду с научным и промышленным экспериментом [6]. Мысленный эксперимент служит выяснению сущности задачи путем редукции ее к упрощенной, подменяя промышленный эксперимент и помогая сэкономить значительные средства. В гидродинамике мысленный эксперимент совершает инженер-исследователь, предсказывающий с некоторым правдоподобием решение проблемы, опираясь на аналогии, накопленный опыт и интуицию. Особенно эффективен такой метод при опросе группы исследователей и осреднении их прогноза [7]. Мысленный эксперимент незаменим при установлении топологии течения, поскольку здесь не требуется количественных оценок [8].

При  $\sigma \gg 1$  узкая струя будет огибать переднюю кромку крыла в течение всего времени взаимодействия. При  $\sigma \ll 1$  струя быстро отстанет от передней кромки. Следовательно, существует критическое значение  $\sigma^*$ , разделяющее два типологически различных режима: с огибанием струей передней кромки и без него. На фиг. 6 представлены в последовательные моменты времени схемы обтекания ножа в режиме с огибанием передней кромки ( $v > 0$ ). В начальный момент времени  $t = 0$  передняя кромка соприкасается с порывом. В момент времени  $t = t_1$  правый фронт пристеночной струи *A* достигает задней кромки, с которой сходит спиральный вихрь Прандтля. (На соответствующих фигурах течение изображено только на нижней поверхности.) В момент времени  $t = t_2$  струя расщепляется – толщина обтекающей нижнюю поверхность ножа струи обращается в ноль в некоторой точке, которая затем разделяется на отдаляющиеся друг от друга вершину правого куска струи *C*, достигающую при  $t = t_3$  задней кромки, и вершину левого куска *B*, прибывающую при  $t = t_4$  в переднюю кромку. В конечном итоге порыв оказывается разорванным на две части: от нижнего куска отходит спиральный вихрь и вихревая пелена, соединяющая этот кусок с задней кромкой ножа, от верхнего куска отходит вихревая пелена, связывающая его с передней кромкой.

Смена топологии при  $\sigma < \sigma^*$  более проста. В течение короткого промежутка времени  $u_\infty t/l = O(\epsilon)$  струя огибает переднюю кромку (фиг. 7), а затем оба ее фронта *A*



Фиг. 6. Топология течения в узком порыве при  $\sigma > \sigma^*$

и  $C$  движутся по направлению к задней кромке. В этой задаче только две точки бифуркации:  $t = t_1$ , когда задней кромки достигает точка  $A$ , и  $t = t_3$ , когда туда же прибывает точка  $C$ . Конечная картина такая же, как и при  $\sigma > \sigma^*$ .

Задача о поперечной дифракции тонкого вихря ставится следующим образом: разрезанная вихреструя движется по крылу параллельно оси  $x$ , создавая момент крена (фиг. 8,  $a$ ). Картина аналогична представленным на фиг. 6, 7. Ввиду пространственного характера течения добавляется растекание по третьей координате (ось  $z$ ), как показано на фиг. 8,  $b$  и  $в$ , где условно изображены предельные траектории на нижней поверхности крыла, разрезающей струю.

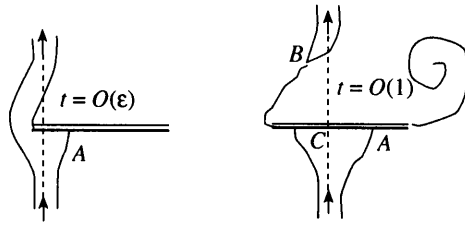
4. Для получения количественных оценок следует принять дополнительные упрощающие задачи предположения. Примем, что течение в вихреструе (или в воздушном порыве) высоконапорное.

Рассмотрим сначала задачу о плоском порыве (фиг. 5,  $a$ ). Критическая точка струи движется относительно крыла со скоростью  $u_\infty$ . Действующая на пластину сила при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равна [9]

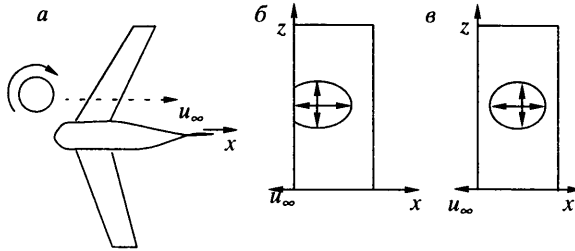
$$Y = \varepsilon \rho v^2 l f\left(\frac{u_\infty t}{l}\right)$$

где  $f$  — известная функция. Следовательно, созданный воздушным порывом коэффициент подъемной силы определится как

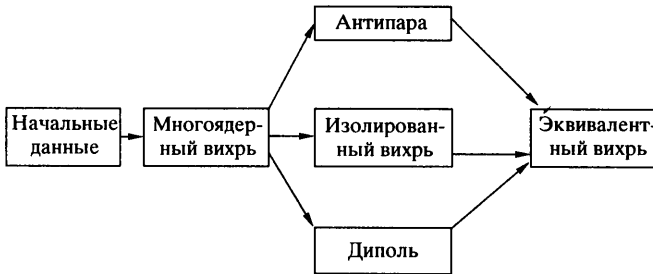
$$c_y = Y \left(\frac{1}{2} \rho u_\infty l\right)^{-1} = 2\varepsilon \sigma^2 f\left(\frac{u_\infty t}{l}\right) \quad (4.1)$$



Фиг. 7. То же при  $\sigma < \sigma^*$



Фиг. 8. Вход крыла в вихрь (вид в плане): а – общая схема, б и в – режимы с огибанием передней кромки и без огибания



Фиг. 9. Схема расчета самолетного следа

Практический интерес представляет случай, когда коэффициент  $c_y$ , конечен, т.е. конечен импульс тонкого высоконапорного порыва. Из (4.1) находится необходимое для этого асимптотическое соотношение между  $\sigma$  и  $\epsilon$

$$\sigma = O(\epsilon^{-1/2}) \gg 1$$

В пространственной задаче о разрезании вихреструи (фиг. 8) априори неизвестное, зависящее от формы крыла в плане значение  $c_y$  конечно при условии

$$\sigma = O(\epsilon^{-1})$$

В приближении низконапорной струи ( $\sigma \ll 1$ ) индуцированная порывом подъемная сила  $Y$  равна  $a\Delta p$ , где  $\Delta p$  – разница между полным давлением в струе и давлением в невозмущенном воздухе. Коэффициент подъемной силы мал

$$c_y = 2\epsilon \frac{\Delta p}{\rho u_\infty^2} = O(\epsilon \sigma^2)$$

В задаче о разрезании низконапорной струи имеем

$$Y = \frac{\pi a^2}{4} \Delta p, \quad c_y = O(\epsilon^2 \sigma^2)$$

**Заключение.** Изолированный колоннообразный вихрь имеет сложную структуру как в продольном направлении, так и в поперечном. Моделирование неосесимметричного вихря осложняется тем обстоятельством, что в общем случае неприменимо приближение пограничного слоя.

Маршевый расчет слутного следа за самолетом по начальным данным, взятым непосредственно за крылом, должен включать задачу о сворачиваемости сходящих с механизации крыла многоядерных вихревых структур в антипараллельную пару, эволюцию этой пары под действием различных факторов с учетом возможного вырождения ее в диполь или изолированный вихрь (фиг. 9). В каждый момент времени  $t$  рассчитанному следу должен быть поставлен в соответствие эквивалентный вихрь как необходимый объект для расчета задачи о его дифракции на самолете-использере.

В отличие от рассмотренных идеализированных схем, когда действие завихренности и продольного импульса проявляется раздельно, в реальных условиях их действие неразделимо, поэтому необходимо применение численных методов [1, 10].

Автор благодарен А.В. Зубцову за стимулирующие дискуссии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Investigation of Vortex Wake Evolution and Flight Safety Problems / Ed. V.V. Vyshinsky, V.A. Yaroshevsky // Coll. Paper TsAGI. Moscow: Publ. Dept. TsAGI, 1997. V. 2627. 228 p.
2. Никольский А.А. Теоретические исследования по механике жидкости и газа / Тр. ЦАГИ. 1981. Вып. № 2122. 285 с.
3. Жуковский Н.Е. К вопросу о разрезании вихревых шнуров // Полное собр. соч. М.; Л.: ОНТИ, 1936. Т. 3. С. 387–405.
4. Sears W.R. Small Perturbation Theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 1960. 63 p.
5. Miles J.W. The Potential Theory of Unsteady Supersonic Flow. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1959. 220 p.
6. Peierls R. Model-making in Physics // Contemp. Phys. 1980. V. 21. № 1. P. 3–17.
7. Бетяев С.К. Научный прогноз: сущность и возможности // Вестн. МГУ. Сер. 7. Философия. 1999. № 2. С. 49–61.
8. Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas / Ed. H.K. Moffatt e.a Dordrecht e.a.: Kluwer, 1992. 606 p.
9. Birkhoff G., Zarantonello E.H. Jets, Wakes, and Cavities. N.Y.: Acad. Press, 1957. 353 p.
10. Исследование эволюции вихревого следа за самолетом и безопасность полета / Ред. В.В.Вышинский и В.А. Ярошевский // Тр. ЦАГИ. 1996. Вып. № 2622. 213 с.

Москва

Поступила в редакцию  
11.1.2000