

УДК 532.517.3

© 2001 г. С.М. ДРОЗДОВ

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ И ХАОСА
В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ, УПРАВЛЯЕМОЙ НЕБОЛЬШИМ
ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ**

На примере конвекции жидкости в тороидальном канале произведена экспериментальная проверка гипотезы возникновения нестационарности и хаоса в гидродинамической системе в результате нелинейного взаимодействия небольшого количества степеней свободы. Экспериментально получены режимы движения жидкой среды, качественно соответствующие модели Лоренца, – стационарные режимы, их бифуркации, неединственность и потеря устойчивости, нестационарные периодические и стохастические режимы. Исследованы спектральные и статистические характеристики нестационарных процессов, дан анализ природы возникновения хаоса, проведено сопоставление с расчетами. Усовершенствована математическая модель задачи.

Существует несколько гипотетических сценариев перехода от ламинарной к турбулентной форме движения жидкой среды и во всех критерием турбулентности выступает случайность поведения системы во времени [1–3, 8, 9]. Теория Ландау – Хопфа относит появление случайности на счет большого количества взаимодействующих пространственных мод или степеней свободы, возбуждающихся в гидродинамической системе при закритических значениях управляющего параметра (числа Рейнольдса Re , Рэлея Ra и др.) [1]. Однако это лишь один из возможных механизмов возникновения турбулентности, причем далеко не самый общий. Установлено, что общий путь возникновения хаоса – это образование странного аттрактора после конечного числа бифуркаций [2]. Выяснилось также, что для этого не обязательно иметь взаимодействие большого количества мод или степеней свободы системы и стохастическими могут быть решения систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений размерностью три и выше.

Впервые стохастические решения и странный аттрактор были обнаружены в системе Лоренца [3]. Исследования этой и других динамических систем позволили достичь значительного прогресса в разработке механизма возникновения случайности в детерминированной системе. Однако большинство результатов касалось эволюции динамических систем во времени. Для того чтобы выяснить вопрос применимости такого сценария возникновения хаоса к гидродинамике, необходимо исследовать его выполнение на реальной гидродинамической системе, допускающей экспериментальное моделирование и описываемой сравнительно несложной математической моделью, для которой надежно отработаны численные алгоритмы.

Конвекция в подогреваемом снизу тороидальном канале является одной из модельных гидродинамических систем для изучения перехода от ламинарной к турбулентной форме движения жидкости. Как показано в [8, 9], система Лоренца более обоснована именно для этого физического объекта. Но и здесь имеются принципиальные расхождения теоретических и экспериментальных результатов [7]. Попытки экспериментального получения нестационарных и в особенности стохастических режимов конвекции жидкой среды, управляемой лишь тремя степенями свободы,

предпринимались неоднократно. Однако нет ни одного примера, где были бы получены режимы, соответствующие модели изучаемого явления. Например, в примененных в [4–7] установках не выполнялись основные требования – квазипуазейлевский характер течения, слабое изменение температуры в поперечных сечениях канала и др. В результате если и удавалось получить нестационарную конвекцию, то она совершенно не соответствовала малоразмерной динамической модели.

Приведем основные выводы, сделанные на основе полученных ранее результатов [7]. При использовании в экспериментальных установках жидкостей с числом Прандтля $Pr \geq 1$ соответствие поведения гидродинамической системы расчетам по модели Лоренца имеет место лишь при небольшой мощности нагрева W , когда существуют только устойчивые стационарные режимы. При большой мощности, когда должны появиться нестационарные режимы, в экспериментальной установке обнаруживаются физические явления, не соответствующие модели Лоренца. В частности, не выполняются предположения об одномерном квазипуазейлевском течении жидкости в канале и слабом изменении температуры в поперечном сечении канала. Хаос, который удается получить в гидродинамической системе при большой мощности нагрева, не является хаосом трех степеней свободы. В него вовлечены и его определяют и другие моды системы. Аналогичные результаты получены и другими исследователями [5, 6].

Отрицательные результаты экспериментального моделирования возникновения нестационарности и хаоса в гидродинамической системе, управляемой небольшим количеством степеней свободы, поставили под сомнение физическую реализуемость такого механизма перехода к турбулентности. Потребовался углубленный анализ термогидродинамики моделируемых физических процессов, совершенствование математической модели явлений и выработки на этой основе новых принципов конструкции установки. Результаты этих исследований изложены в данной работе.

1. Математическая модель задачи. Рассматривается следующая термогидродинамическая система (фиг. 1). Тор с радиусами средней окружности R_c (диаметр D_c) и поперечного сечения $(r_0 + h_2)$ состоит из трех вложенных областей. Внутренняя тороидальная полость – канал имеет радиусы поперечного сечения r_0 (диаметр d_0) и средней окружности (оси канала) R_c . Канал заполнен несжимаемой жидкостью с линейной зависимостью плотности ρ от температуры T

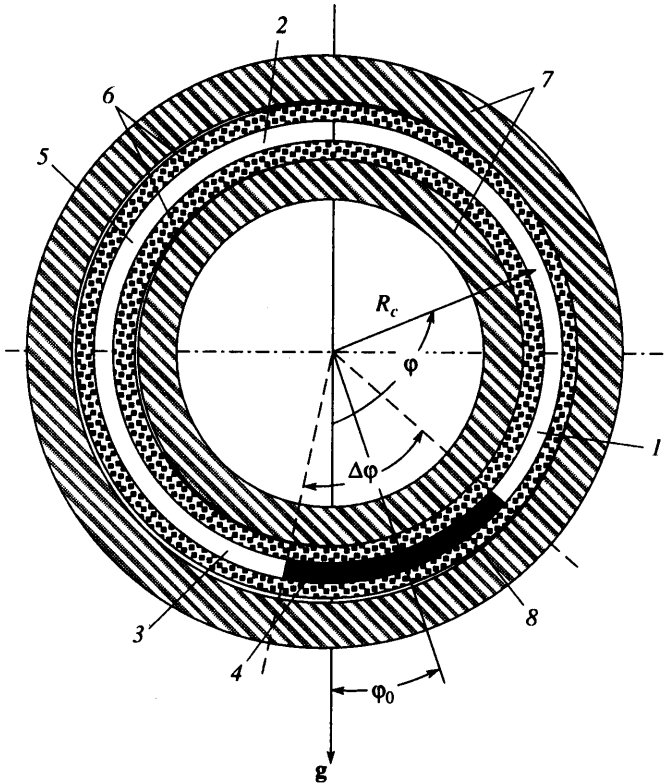
$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)], \quad \alpha \ll 1 \quad (1.1)$$

Предполагается, что теплопроводность λ , теплоемкость c и вязкость μ жидкости не зависят от температуры. В жидкости происходит объемное тепловыделение с полной мощностью $W(t)$. В общем случае объемная плотность мощности нагрева ω – произвольная функция координат и времени t . Здесь рассматривается специальный ее вид, соответствующий эксперименту

$$\omega(t, \varphi) = \Omega(t)f(\varphi) = \Omega(t) \begin{cases} \frac{\chi}{\Delta\varphi}, & \varphi \in \left[-\frac{1}{2}\Delta\varphi; \frac{1}{2}\Delta\varphi\right] \\ \frac{1-\chi}{2\pi-\Delta\varphi}, & \varphi \notin \left[-\frac{1}{2}\Delta\varphi; \frac{1}{2}\Delta\varphi\right] \end{cases} \quad (1.2)$$

Угол φ отсчитывается от фиксированного сечения тора, проходящего через центр сектора нагрева $\Delta\varphi$, а φ_0 – угол положения этого сечения относительно вертикали. Канал окружен двумя тороидальными слоями, каждый из сплошного однородного материала. Теплопроводности λ_1, λ_2 , теплоемкости c_1, c_2 и плотности ρ_1, ρ_2 материалов слоев не зависят от T . Снаружи тор окружен средой с постоянной температурой $T_0 = 0$.

Полная система уравнений термогидродинамики состоит из уравнений Навье – Стокса для движения жидкости в канале ($r \leq r_0$), уравнений баланса тепла в жидкости и теплопроводности в слоях 1 ($r_0 < r \leq r_0 + h_1$) и 2 ($r_0 + h_1 < r \leq r_0 + h_2$). Если сделать



Фиг. 1. Схема задачи: 1-4 – расположение термопар, 5 – канал, 6, 7 – слои, 1, 2, 8 – сектор нагрева $\Delta\varphi$

следующие пять предположений: 1) канал тонкий – $R_c/r_0 = R \gg 1$; 2) ρ – линейная функция T (1.1); 3) подвод тепла и граничные условия для T и скорости симметричны относительно окружности – оси канала (не зависят от угла Ψ в плоскости поперечного сечения канала); 4) температура слабо меняется внутри канала, а весь ее перепад расположен в слое 1 с малой теплопроводностью $\lambda_1 \ll \lambda$; 5) скорость жидкости вдоль оси канала $u \sim 1$, а поперечные компоненты $v \ll 1$, $w \ll 1$. Тогда из полной системы можно получить частный случай, приведенный ниже в безразмерном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial \varphi} + \text{Pr} \Lambda \left[8T \sin(\varphi + \varphi_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \Lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right] + \omega(t, \varphi), \quad y \leq 1 \quad (1.3)$$

В слоях 1 и 2 (i – номер слоя)

$$C_i \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{\lambda} \Lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right] \quad (1.4)$$

Здесь $y = r/r_0$ – радиальная координата в плоскости поперечного сечения канала, $u = u(t, y)$ – скорость жидкости, $T = T(t, y, \varphi)$ – температура, $P = P(t, y, \varphi)$ – давление. Слой 1 соответствует $1 < y \leq 1 + H_1$, слой 2 – $1 + H_1 < y \leq 1 + H_2$, $H_1 = h_1/r_0$, $H_2 = H_1 + h_2/r_0$.

Граничные условия для (1.3), (1.4) представляют собой условия непрерывности температуры и теплового потока на границах раздела слоев и линейной связи температуры и теплового потока на внешней границе. Для скорости – условия прилипания на стенке и нулевая производная при $y = 0$.

В качестве масштаба M_T принимается характерный перепад температуры в слое / при мощности нагрева $W = 1$ Вт: $M_T = 1/(2\pi^2\lambda_1 D_c)$. Остальные масштабы и коэффициенты систем (1.3), (1.4) определяются так

$$M_u = \frac{\rho\alpha g d_0^2}{32\mu} M_T, \quad M_r = \frac{D_c}{2M_u}, \quad \Lambda = \frac{2\lambda D_c}{d_0^2 \rho c M_u} = \frac{\lambda 4}{d_0^2 \rho c} M_r, \quad \text{Pr} = \frac{\mu c}{\lambda}$$

$$\omega(t, \varphi) = \frac{W(t)4f(\varphi)}{\pi d_0^2 \rho c M_T M_u} = \Omega(t)f(\varphi), \quad R = \frac{R_c}{r_0}, \quad C_i = \frac{\rho_i c_i}{\rho c}, \quad i = 1, 2$$

Воспользуемся естественной периодичностью задачи по углу φ и представим функции T, P, ω в виде разложения в ряды Фурье

$$T(t, y, \varphi) = T_0(t, y) + a(t, y) \cos \varphi + b(t, y) \sin \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} [a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi]$$

$$P(t, y, \varphi) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (P_n(t, y) \cos n\varphi + \Pi_n(t, y) \sin n\varphi) \quad (1.5)$$

$$\omega(t, \varphi) = \omega_0 + \omega_1 \cos \varphi + W_1 \sin \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} [\omega_n \cos n\varphi + W_n \sin n\varphi]$$

$$\omega_0 = \frac{\Omega(t)}{2\pi}, \quad \omega_n = \frac{2\Omega(t)}{\pi n} \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2} n\right) \frac{2\pi\chi - \Delta\varphi}{(2\pi - \Delta\varphi)\Delta\varphi}, \quad W_n = 0$$

Подставив (1.5) в (1.3), (1.4), получим (1.6)–(1.8)

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \Lambda \left(\frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) + \omega_0(t), \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$C_i \frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{\lambda} \Lambda \left[\frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right], \quad i = 1, 2 \quad (1.6)$$

Система для $u(t, y), a(t, y), b(t, y)$ имеет вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} + ub - \Lambda \left[\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{a}{R^2} \right] - \omega_1 = 0$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} - ua - \Lambda \left[\frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{b}{R^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \text{Pr} \Lambda \left[4a \sin \varphi_0 + 4b \cos \varphi_0 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (1.7)$$

$$C_i \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{\lambda} \Lambda \left[\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{a}{R^2} \right]$$

$$C_i \frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{\lambda} \Lambda \left[\frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{b}{R^2} \right]$$

$$i = 1, \quad 1 \leq y \leq 1 + H_1; \quad i = 2, \quad 1 + H_1 \leq y \leq 1 + H_2$$

Системы для $a_n(t, y), b_n(t, y)$ ($n = 2, 3, 4, \dots$)

$$\frac{\partial a_n}{\partial t} + nb_n u - \Lambda \left[\frac{\partial^2 a_n}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial a_n}{\partial y} - \left(\frac{n}{R} \right)^2 a_n \right] - \omega_n = 0$$

$$\frac{\partial b_n}{\partial t} - na_n u - \Lambda \left[\frac{\partial^2 b_n}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial b_n}{\partial y} - \left(\frac{n}{R} \right)^2 b_n \right] = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (1.8)$$

$$C_i \frac{\partial a_n}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{\lambda} \Lambda \left[\frac{\partial^2 a_n}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial a_n}{\partial y} - \left(\frac{n}{R} \right)^2 a_n \right], \quad i = 1, 2$$

$$C_i \frac{\partial b_n}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{\lambda} \Lambda \left[\frac{\partial^2 b_n}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial b_n}{\partial y} - \left(\frac{n}{R} \right)^2 b_n \right]$$

Граничные условия для (1.6)–(1.8) получаются разложением Фурье граничных условий для (1.3), (1.4).

Итак, в результате фурье-представления (1.5) система термогидродинамических уравнений (1.3), (1.4) распалась на подсистемы для коэффициентов Фурье (1.6)–(1.8), из которых замкнуты и независимы от других система для $T_0(t, y)$ (1.6) и система для трех пространственно-временных функций (степеней свободы) $u(t, y), a(t, y), b(t, y)$ (1.7). Подсистемы для всех остальных степеней свободы (1.8) $a_n(t, y), b_n(t, y)$ ($n > 1$) содержат в качестве множителя $u(t, y)$ и тем самым зависят от решений (1.7). Таким образом, подобно модели Лоренца в данной модели тоже образуется генератор (1.7), представляющий все временные изменения в термогидродинамической системе (1.3), (1.4). Если решения (1.7) стационарны, то и решения (1.3), (1.4) будут в конечном итоге стационарны. Если в (1.7) появляются случайные по времени решения, то случайность передается всем остальным модам (1.8) и возникает не только временной, но и пространственный хаос. Совокупность систем (1.6)–(1.8) примем в качестве базовой математической модели конвекции жидкости в замкнутом тороидальном канале. Она уточняет и обобщает модель конвекции, предложенную в [12]. Установим связь (1.6)–(1.8) с моделью Лоренца. Введем средние по сечению канала величины

$$U(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \int_0^1 u(t, y) y dy = 2 \int_0^1 u(t, y) y dy$$

$$A(t) = 2 \int_0^1 a(t, y) y dy, \quad B(t) = 2 \int_0^1 b(t, y) y dy$$

Осреднив (1.7) по сечению канала, получим незамкнутую систему, где появляются новые функции – тепловые потоки на стенках канала q_a, q_b , и сила сопротивления F . Для замыкания нужно связать q_a, q_b, F с имеющимися в системе функциями. При выводе модели Лоренца делаются предположения о пропорциональности тепловых потоков q_a, q_b средним величинам $A(t), B(t)$, а силы сопротивления F – расходу U (последнее эквивалентно пуазейлевскому профилю скорости жидкости в канале)

$$u = 2U(t)[1 - y^2], \quad q_a = \beta A(t), \quad q_b = \beta B(t), \quad F = -8U(t), \quad \beta = \text{const} \quad (1.9)$$

Кроме этого, предполагается слабая зависимость $a(t, y), b(t, y)$ от y в сечении канала и при осреднении (1.7) принято приближение

$$2 \int_0^1 (ub) y dy \approx B(t) 2 \int_0^1 u y dy = B(t) U(t) \quad (1.10)$$

С учетом (1.9) и (1.10) система (1.7) после осреднения по сечению канала превращается в систему, которая при $\varphi_0 = 0$ эквивалентна системе Лоренца

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} + BU + \Lambda \left(\frac{1}{R^2} + 2\beta \right) A - \omega_1 &= 0 \\ \frac{dB}{dt} - AU + \Lambda \left(\frac{1}{R^2} + 2\beta \right) B &= 0 \\ \frac{dU}{dt} - \sigma \left[\frac{A}{2} \sin \varphi_0 + \frac{B}{2} \cos \varphi_0 - U \right] &= 0, \quad \sigma = 8 \text{Pr} \Lambda \end{aligned} \quad (1.11)$$

Аналогичные выражения можно получить и для высших гармоник a_n, b_n при $n > 1$.

Система (1.11) замкнута и интегрируется, например, численно. В модели Лоренца варьируется параметр ω_1 , соответствующий в эксперименте первому коэффициенту Фурье при синусе из разложения функции распределения мощности нагрева W (1.5). Свойства (1.11) изучены достаточно хорошо [3, 8, 9]. В частности, известно, что по мере увеличения ω_1 сначала имеются только стационарные решения, которые затем теряют устойчивость и реализуются нестационарные периодические и стохастические режимы.

С точки зрения возможности экспериментального моделирования предположения (1.9), на которых базируется система Лоренца, оказываются слишком ограничивающими. Это подтверждается сравнением результатов расчета конвекции жидкости в канале по системе Лоренца (1.11) и базовой модели (1.6)–(1.8). С теоретической точки зрения предположения (1.9) разрушают связь модели Лоренца с полной системой термогидродинамических уравнений, тогда как базовая модель (1.6)–(1.8) является частным случаем полной системы при сформулированных выше условиях 1)–5). Благодаря этому можно получить критерии ее физической реализуемости, исследовав устойчивость данного решения по отношению к малым возмущениям, нарушающим основные предположения 1)–5).

Самым принципиальным и трудно реализуемым в эксперименте является предположение 5) об одномерности течения жидкости вдоль оси канала. Именно оно первым нарушается в экспериментах, приводя к возбуждению большого числа пространственных степеней свободы, нелинейно взаимодействующих друг с другом [4–7]. С разрушением одномерности течения тесно связано и нарушение предположения о слабом изменении температуры в поперечном сечении канала.

Представим результаты исследования двух главных механизмов разрушения одномерности течения, которые следуют из анализа имеющихся экспериментальных данных. Первый механизм – это разрушение квазипуазейлевского течения в канале из-за превышения критической скорости движения. Здесь в качестве оценки можно принять критерий Рейнольдса $Re \leq 2000$. Но это будет лишь оценка сверху, потому что она получена для течения Пуазейля по горизонтальной трубе. Необходимо учесть кривизну оси трубы. Если принять профиль скорости в трубе параболическим, то, начиная от оси канала, скорость убывает и это может привести к неустойчивости типа Тейлора слоев, лежащих ближе к внешней стенке канала. Для потери устойчивости течения жидкости в малом зазоре между двумя цилиндрами имеется оценка критического числа Тейлора Te [9]

$$Te = Re \left(\frac{r_0}{R_c} \right)^{1/2} = \frac{\rho u d_0}{\mu} \left(\frac{1}{R} \right)^{1/2} \leq 84 \quad (1.12)$$

Заметим, что это ограничение значительно более жесткое. Но в то же время (1.12) является оценкой снизу, так как дает критерий потери устойчивости течения в бесконечном слое с критической длиной волны $L \approx 2r_0$, а такое возмущение в данной геометрии невозможно. В канале могут развиваться вторичные течения с размером порядка r_0 .

Но одного критерия (1.12) для реализации базового течения недостаточно. Анализ экспериментов показал, что разрушение одномерности течения происходит через образование большой зоны возвратного течения на той части канала, где жидкость поднимается [7]. И здесь основным механизмом разрушения становится неблагоприятный градиент температуры $\partial T/\partial \varphi < 0$. Рассмотрев модельную задачу об устойчивости течения вязкой и теплопроводной жидкости по вертикальной цилиндрической трубе, окруженной слоем теплоизоляции, при уменьшении температуры с увеличением высоты можно получить критерий

$$Ra = \frac{\alpha g \rho^2 c d_0^4}{\mu \lambda D} \left| \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right| \leq 544$$

Таким образом, для физической реализации конвекции жидкости в тороидальном канале, описываемой частным случаем (1.6)–(1.8) общей термодинамической системы, необходимо выполнение следующих критериев:

$$K1: Te = Re \sqrt{\frac{r_0}{R_c}} \leq 84 \quad (1.13)$$

$$K2: Ra \leq 544$$

Неудачи экспериментального моделирования нестационарных режимов конвекции, соответствующих системе Лоренца и даже более общей термогидродинамической системе (1.6)–(1.8), были вызваны именно нарушением $K2$ и развитием устойчивости Рэлея.

2. Экспериментальная установка и измерительная система. Общий вид экспериментальной установки соответствует схеме, показанной на фиг. 1. Главная часть представляет собой тор, состоящий из трех вложенных друг в друга областей. Внутренняя полость тора образует канал с диаметрами поперечного сечения $d_0 = 4$ мм и окружности средней оси $D = 200$ мм. Канал заполнен ртутью через дренажную трубку в верхней части. Он окружен слоем 1 из пенопласта толщиной $h_1 = 3$ мм, который в свою очередь окружен слоем 2 из алюминия толщиной $h_2 = 5$ мм. Последний слой служит для выравнивания температуры на внешней поверхности тора. Этой же цели служит жидкость – вода, в которую помещен весь тор. Нагрев ртути в канале осуществляется пропусканием тока по ртути в секторе $\Delta \varphi = 60^\circ$ в нижней части канала. Конечно, ток проходит и по верхней части, но основная часть мощности W_i выделяется в нижнем секторе $W_i = \chi W$, где $\chi = 5/6$.

Главная часть установки – тороидальная область с каналом, внутри которого находится рабочая жидкость, должна удовлетворять требованиям 1)–5), сформулированным выше для базовой модели (1.6)–(1.8). Проверим выполнение этих требований в экспериментальной установке.

$$1. R = D/d_0 = 50 \gg 1.$$

2. В качестве рабочей жидкости используется ртуть $\rho = 13600$ кг · м³; $\alpha = 1,8 \cdot 10^{-4}$ 1/°С.

3. Подвод тепла и граничные условия для скорости и температуры рабочей жидкости осесимметричны относительно центра поперечного сечения тора (фиг. 1). Данное условие обеспечивается объемным тепловыделением по закону (1.2), осевой симметрией слоев 1, 2 и постоянством температуры внешней среды (воды) $T_0 = \text{const}$.

4. Температура незначительно изменяется в поперечном сечении канала, а весь ее перепад по отношению к T_0 сосредоточен в слое 1 с малой теплопроводностью $\lambda_1 \ll \lambda$. Перевод основного температурного перепада из жидкости в слой 1 является одним из принципиальных отличий данной установки от установок из [4–7]. Использование теплоизолирующего слоя впервые предложено в [10]. В установке соотношение $\lambda_1/\lambda = 0,00655 \ll 1$. Кроме того, слой 1 должен иметь небольшую эффективную теп-

емкость ζ .

$$\zeta = C_1[\beta^2(2H_1 + H_1^2) - 2\beta - 2] = 0,12 < 1$$

$$H_1 = \frac{h_1}{r_0} = 1,5, \quad \beta = (\ln(1 + H_1))^{-1} = 1,09$$

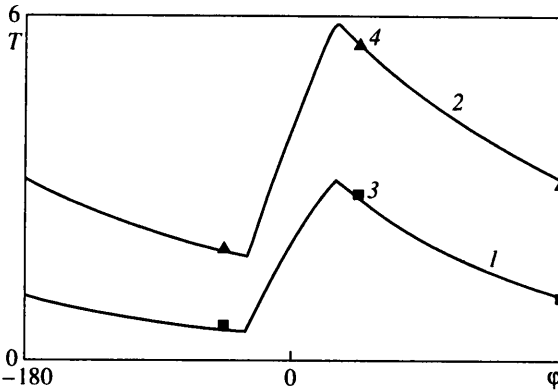
5. Обеспечение устойчивости движения жидкости вдоль стенок канала на всех исследуемых режимах конвекции. Полученные выше критерии по числам Te и Ra (1.13) в установке можно свести к ограничениям на скорость U и осевой градиент температуры $dT/d\varphi$ в рабочей жидкости: $U \leq 1,7$ см/с; $dT/d\varphi \leq 114^\circ\text{C}/\text{рад}$.

Напомним, что величина $U = 1,7$ см/с является нижней оценкой критической скорости. Скорость жидкости в канале не должна значительно превышать ее (скажем, в 3–4 раза), что эквивалентно приближению к числу $Re = 2000$. Таким образом, в экспериментальной установке выполняются все требования, необходимые для моделирования искомого физического явления.

Информация о процессах в установке получается с помощью измерения температуры в точках 1–3 внутри канала и в одной точке 4 на внешней поверхности тора термопарными датчиками, непосредственно контактирующими с ртутью (фиг. 1). Собственная теплоемкость датчиков мала вследствие их очень малых размеров ($2 \times 0,5 \times 0,05$ мм). Постоянная времени реакции датчика не превышает 0,2 с. После индивидуальной градуировки датчиков погрешности измерений температуры равны в диапазоне $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, $\delta T = \pm 0,1^\circ\text{C}$; в диапазоне $\Delta T = 100^\circ\text{C}$, $\delta T = \pm 0,2^\circ\text{C}$. Датчики измерения температуры (на фиг. 1 обозначены 1–3) расположены в сечениях $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 180^\circ$, $\varphi_3 = -45^\circ$ относительно центра области нагрева.

3. Анализ результатов экспериментов и сравнение их с расчетами. Главной задачей исследований являлись экспериментальная реализация режимов движения жидкой среды, качественно и количественно соответствующих базовой модели (1.6)–(1.8), – стационарных состояний, их бифуркаций и неединственности, явления потери устойчивости стационарными состояниями и получение нестационарных периодических и стохастических режимов.

Если мощность нагрева W меньше критической ($W^* \approx 7,5$ Вт), то, в согласии с теорией, в эксперименте реализуются устойчивые стационарные режимы с конвекцией либо в положительном (стационарный режим I), либо в отрицательном (стационарный режим II) направлениях. По расчетам должен существовать и третий стационарный режим III с нулевой скоростью $U_{III} = 0$ при $\varphi_0 = 0$ или малой отрицательной скоростью $|U_{III}| \ll 1$ при небольших $\varphi_0 \ll 1$. Однако он неустойчив и в эксперименте не реализуется. При стационарной конвекции температура уменьшается от выхода из области нагрева к входу (и наоборот при режиме II). Распределения температуры по оси канала для стационарных режимов $W = 0,804$ и $1,75$ Вт (при $\varphi_0 = 0$) показаны на фиг. 2 (точки 3, 4) вместе с результатами расчетов (кривые 1, 2) по базовой модели (1.6)–(1.8). На фиг. 3 представлены кривые 1–3 эволюции температуры в точках 1–3 (фиг. 1) из нулевых начальных условий – отсутствие движения и полное тепловое равновесие с внешней средой. При $t = 50$ с была включена мощность нагрева $0,804$ Вт. Угол φ_0 центра области нагрева составлял около $+1^\circ$, поэтому реализовался стационарный режим I с положительной скоростью движения $U_I > 0$. Колебания температуры, вызванные колебаниями скорости (период $\tau = 250$ с), быстро затухают. Заметим, что эти колебания происходят около значения U_I стационарной скорости и не приводят к смене знака скорости, что сопровождалось бы пересечением кривых 1 и 3. На направление скорости $U > 0$ указывает последовательность изменения температур датчиков – сначала T_1 , далее T_2 и T_3 . Переходный процесс от одного стационарного режима $W = 0,804$ к другому после увеличения мощности до $W = 1,79$ Вт сопровождается колебаниями температур в точках 1–3 с периодом $\tau_0 \approx 136$ с.



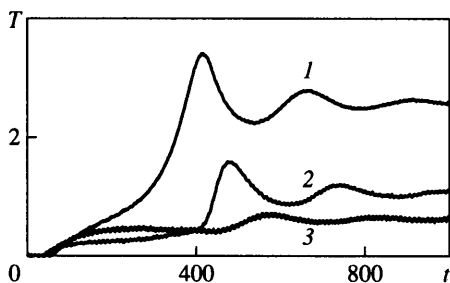
Фиг. 2. Распределение температуры по оси канала для стационарных режимов при $W = 0,804$ (1) и $1,75$ Вт (2) (при $\varphi_0 = 0$). Кривые 1, 2 – расчеты по базовой модели, 3, 4 – эксперимент

Увеличение W привело к уменьшению периода собственных колебаний и ослаблению декремента затухания.

Если в начальный момент создать небольшую асимметрию в подводе тепла – сделать $\varphi_0 \approx -1^\circ$, то движение начнется в отрицательном направлении и получится некоторый стационарный режим. После восстановления угла $\varphi_0 = +1^\circ$ движение в отрицательном направлении сохраняется и реализуется стационарный режим II. Как следует из теории, этот режим симметричен режиму I (фиг. 2) относительно сечения $\varphi = 0$. Он имеет те же динамические характеристики: $\tau_0 = 250$ с и высокий декремент затухания колебаний. Увеличив мощность с $W = 0,81$ до $1,76$, получим стационарный режим II, симметричный режиму 2 (фиг. 2).

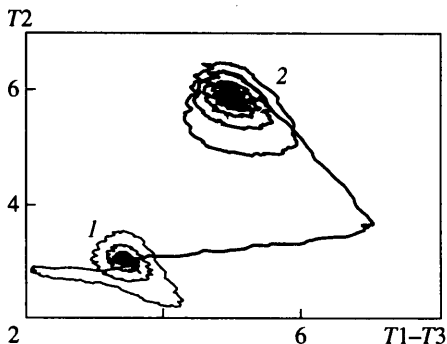
Для исследования устойчивости стационарных режимов производилось кратковременное (10–15 с) отключение мощности нагрева с последующим восстановлением до прежнего значения. С помощью таких испытаний определялись собственные частоты и декременты затухания (или нарастания) колебаний. При анализе поведения динамических систем много информации дает исследование фазовых траекторий. Для системы Лоренца фазовое пространство трехмерное (A, B, U) и часто рассматривают проекции фазовой траектории на плоскости (A, U) или (A, B). Устойчивые стационарные решения изображаются на них точками, к которым сходятся все переходные процессы.

К сожалению, по результатам эксперимента нельзя непосредственно получить динамические функции (A, B, U). Однако можно построить фазовую плоскость, качественно соответствующую (A, B). Отложим по оси ординат температуру датчика T_2 , а по оси абсцисс разность ($T_1 - T_3$). Согласно представлению Фурье (1.7), диаграмма $T_2 = f(T_1 - T_3)$ есть зависимость четной составляющей распределения температуры по φ от нечетной. И это качественно соответствует диаграмме $A(B)$ в системе Лоренца (1.11). Но в $T_2 = f(T_1 - T_3)$ присутствуют и все высшие степени свободы ($n > 1$) (1.5). На фиг. 4 показаны две фазовые траектории: 1 соответствует переходному процессу после возмущения стационарного режима $W = 1,75$ Вт 10-секундным отключением нагрева, 2 – переходный процесс из стационарного состояния $W = 1,75$ Вт в новое стационарное состояние с большей мощностью нагрева $3,1$ Вт. Видно, что фазовая точка стремится к равновесию по спирали. Высокий уровень взаимной корреляции температур T_1, T_2, T_3 в разных точках канала, указывает на существование у системы



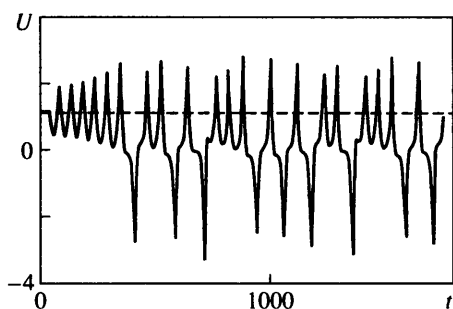
Фиг. 3

Фиг. 3. Переходный процесс к стационарному режиму $W = 0,8$ Вт, $\varphi_0 = +1^\circ$, экспериментальные кривые 1–3 – эволюция температуры по времени (c) в точках 1–3 (фиг. 1)



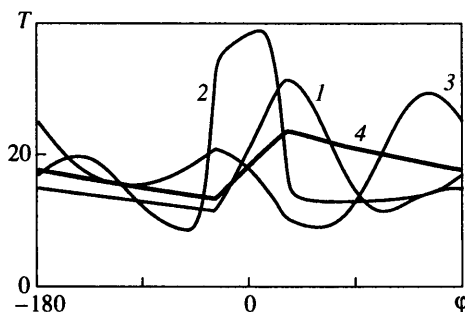
Фиг. 4

Фиг. 4. Фазовые диаграммы переходных процессов в окрестности стационарных режимов: 1, 2 – $W = 1,75$, 3, 1 Вт при $\varphi_0 = 0$



Фиг. 5

Фиг. 5. Расчетная зависимость скорости движения жидкости в канале по времени (c) при $W = 8,6$ Вт, $\varphi_0 = 0$



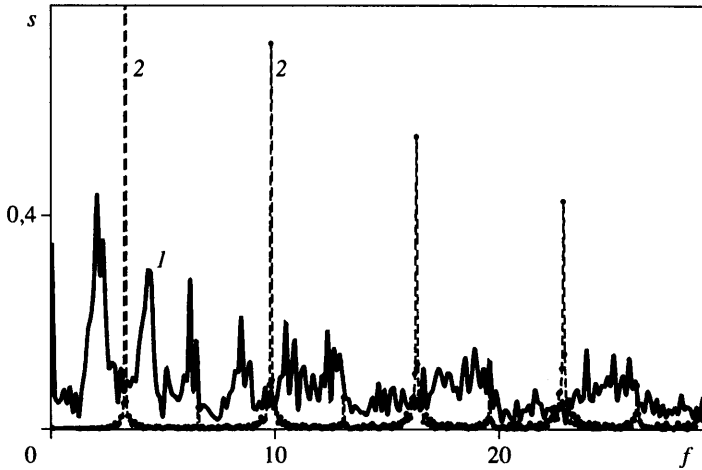
Фиг. 6

Фиг. 6. Расчетные распределения температуры по оси канала после внесения возмущения в моменты времени: 1 – $t = 34$, 2 – 343, 3 – 1050 с, 4 – стационарный режим

единого генератора изменений по времени. Небольшие резкие изломы кривых вызваны погрешностью измерений.

Обобщая материал изучения стационарных режимов, можно сделать вывод о хорошем качественном соответствии результатов эксперимента с известными свойствами модели Лоренца и количественном соответствии с расчетами по базовой модели (1.6)–(1.8).

При стационарных внешних условиях и постоянной мощности нагрева, превышающей некоторое критическое значение W^* , возможно появление нестационарных периодических и стохастических режимов конвекции. Это явление характерно как для системы Лоренца, так и для расчетов в рамках базовой модели (1.6)–(1.8). Пример расчета закритического режима $W = 8,7$ Вт, $\varphi_0 = 0$, выполненного по (1.6)–(1.8), представлен на фиг. 5, 6. Начальными условиями для этого процесса был неустойчивый стационарный режим со скоростью конвекции $U \approx 1,15$ см/с. Возмущение в виде отключения мощности на 10 с сразу разрушило его, и начиная с $t \approx 400$ с возник нестационарный режим, характеризующийся сменой направления движения жидкости (фиг. 5). Пространственное распределение температуры тоже стало хаотическим



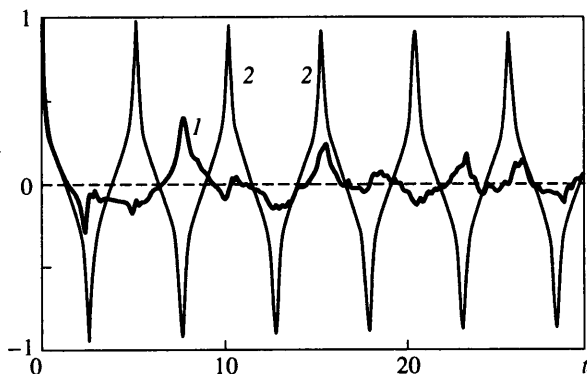
Фиг. 9. Модуль спектральной плотности для: 1 – хаотического С и 2 – периодического P2 процессов (f мГц)

являются образом периодических решений. Итак, есть достаточно оснований утверждать, что экспериментально получен случайный процесс конвекции. Он был неоднократно повторен.

Стохастические (хаотические) процессы являются примером недетерминированных решений системы Лоренца или базовой модели. Однако у этих систем имеются и устойчивые периодические решения, которые являются строго детерминированными и предсказуемыми на любой промежуток времени. Эффективный метод получения таких решений предложен в [11]. В настоящем эксперименте удалось получить детерминированные периодические решения. На фиг. 8 показаны две гладкие замкнутые кривые, представляющие два различных периодических режима, полученные при близких значениях параметров: 1 – P1 ($W = 9,1$ Вт, $\varphi_0 = 0$) и 2 – P2 ($W = 8,96$ Вт, $\varphi_0 = 0$). Процесс P1 представляет собой периодические ($\tau = 161$ с) пульсации скорости конвекции только в отрицательном направлении, процесс P2 ($\tau = 308$ с) – в обоих направлениях. Периодические режимы P1 и P2 имеют слабую устойчивость и разрушаются, переходя в случайные при небольших возмущениях угла φ_0 или мощности W . Так как случайный режим близок к периодическим по параметрам W и φ_0 , то его, видимо, следует отнести к хаотическим процессам в смысле терминологии [8].

Выводы о том, является ли режим детерминированным или хаотическим, сделаны на основе качественного анализа временных и фазовых диаграмм. Рассмотрим две количественные характеристики, позволяющие классифицировать процессы. На фиг. 9 приведены кривые $S(f)$ – модуля спектральной плотности величины $(T_1 - T_3)/W$ для двух процессов: 1 – С и 2 – P2. При расчете спектральной плотности были взяты выборки длительностью $1,6 \cdot 10^3$ с с дискретизацией одно измерение в секунду по каждому датчику и выполнено численное преобразование Фурье. Спектр процесса P2 состоит из набора дискретных частот, кратных главной $f_1 = 3,25 \cdot 10^{-3}$ Гц с амплитудой $A_1 = 1,25$. Спектр С – сплошной, с нерегулярными размытыми пиками. Процесс P2 – детерминированный периодический ($\tau = 308$ с), процесс С – хаотический. Заметим, что появление сплошного спектра всегда связывают с возникновением турбулентности в гидродинамических системах [8, 9].

Вторым количественным критерием классификации процессов являются корреляционные функции. На фиг. 10 представлены автокорреляционные функции процессов С и P2. Автокорреляционная функция процесса С (кривая 1) быстро, хотя и немонотонно, убывает до уровня 0,15 (после $t = 15$ мин). Автокорреляционная функция



Фиг. 10. Автокорреляционные функции: 1, 2 для хаотического *C* и *P2* процессов (*t* – в мин)

периодического процесса *P2* – периодическая незатухающая функция с амплитудой 0,95, что близко к теоретическому пределу – единице. И такой она остается даже через 3,5 ч. Следовательно, процесс *P2* является детерминированным и предсказуемым на время не менее 3–4 ч. Высокая взаимная корреляция температур в различных точках канала может служить хорошим аргументом того, что у системы имеется единый генератор временных изменений и его число степеней свободы невелико.

Анализ спектральных и корреляционных характеристик подтверждает, что экспериментально получены как детерминированные периодические, так и непредсказуемые хаотические процессы. К последним естественно применять вероятностное описание. По теореме Пуанкаре, динамическая система, фазовые траектории которой находятся в ограниченной области фазового пространства, в процессе своей эволюции ($t \rightarrow \infty$) бесконечное число раз возвращается в малую окрестность любой начальной точки траектории установившегося движения. Определим на установившейся траектории начальную точку с компонентами (T_1^H, T_2^H, T_3^H) . Назовем событием возвращение вектора $T = (T_1, T_2, T_3)$ в δ -окрестность (T_1^H, T_2^H, T_3^H)

$$\sqrt{(T_1 - T_1^H)^2 + (T_2 - T_2^H)^2 + (T_3 - T_3^H)^2} \leq \delta$$

Радиус окрестности начальной точки выберем из условий точности эксперимента $\delta = 0,4^\circ\text{C}$ (гарантия различия точек). С событием связана величина промежутка времени Δ между двумя последовательными возвращениями. Если процесс периодический, то $\Delta = \tau$ (τ – период процесса). Если процесс хаотический, то событие случайное и величина Δ имеет некоторое распределение вероятности. По результатам эксперимента были рассчитаны плотности вероятности величины Δ . Для периодических процессов *P1* и *P2* (фиг. 8) гистограммы величины вероятности попадания Δ в 10-секундные интервалы $P(\Delta)$ представляют собой столбики высотой единица на временах соответственно 160–170 и 300–310 с. Для хаотического процесса *C* имеется уже широкое распределение $P(\Delta)$, приведенное ниже (полное время, на котором произведен анализ процессов, $2,2 \cdot 10^3$ с):

Δ , с	<300	310	330	460	470	480	490	500
<i>P</i> , %	0	5,1	2,6	10,3	15,5	20,5	12,8	12,8
Δ , с	630	640	670	680	820	830	>840	>840
<i>P</i> , %	2,6	5,1	2,6	5,1	2,6	2,6	0	0

В экспериментах получено подтверждение и свойство глобальной неединственности состояний изучаемой термогидродинамической системы. Выше уже отмечалось

наличие двух устойчивых стационарных режимов при одинаковых параметрах эксперимента. Но оказывается, кроме них у системы могут быть и устойчивые периодические режимы. Рассмотрим результаты следующего экспериментального цикла. При нулевых начальных условиях на установку подается мощность нагрева $W = 1,76$ Вт. После установления стационарного состояния мощность увеличивается до 3,1 Вт. Система "обрабатывает" переходный процесс и успокаивается в новом стационарном состоянии (фиг. 4). Действуя таким образом, проходим режимы $W = 4,8$ и 6,9 Вт. Стационарный режим $W = 8,6$ Вт оказывается неустойчивым и после его разрушения система выходит на хаотическую фазовую траекторию (фиг. 8). Когда же мощность начинает снижаться, переходя на уровень $W = 6,9$ Вт, система не возвращается в стационарное состояние, а реализуется устойчивый периодический цикл с пульсациями скорости в положительном направлении ($\tau = 140$ с). Дальнейшее снижение до 4,8 Вт опять не дает стационарного режима, а снова реализуется односторонний периодический ($\tau = 179$ с) режим. При опускании на уровень 3,1 Вт реализуется двусторонний периодический режим $\tau = 414$ с. И только когда нагрев уменьшается до $W \leq 2$ Вт, система "сваливается" в стационарное состояние. Таким образом, на отрезке $W = 2-8$ Вт в системе наряду с устойчивыми стационарными имеются и устойчивые периодические режимы и, следовательно, существует гистерезис.

Заключение. Для термогидродинамической системы, состоящей из тороидального канала, заполненного жидкостью и окруженного слоями из однородных материалов, получена базовая математическая модель, обладающая свойством разделения угловых степеней свободы с формированием замкнутой системы нелинейных дифференциальных уравнений относительно трех пространственно-временных функций. Показано, что подобно системе Лоренца базовая модель имеет нестационарные решения при стационарных внешних условиях и способна генерировать периодические и хаотические режимы движения жидкой среды.

Определены основные критерии (числа Рэлея и Тейлора) физической реализуемости режимов конвекции, соответствующих базовой модели задачи. Сформулированы условия корректного моделирования в экспериментальной установке изучаемого механизма возникновения хаоса в гидродинамической системе, управляемой небольшим числом эффективно взаимодействующих степеней свободы.

Экспериментально получены режимы движения жидкой среды, соответствующие базовой модели задачи, – стационарные состояния, их бифуркации и явления потери устойчивости, возникновение нестационарных периодических и хаотических режимов. Обнаружены неединственность режимов конвекции и связанный с этим гистерезис при изменении мощности нагрева в достаточно широком диапазоне ($W = 2-8$ Вт).

Автор благодарит директора А/О "ПРОМЭЛЕКТРОНИКА" Е.М. Быкова, осуществляющего спонсорскую поддержку настоящих исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
2. Ruelle D. Sensitive dependence on initial condition and turbulent behavior of dynamical systems // Ann. N.Y. Acad. Sci. 1979. V 316. № 408.
3. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. № 2. P. 130–141.
4. Welander P. On the oscillatory instability of a differentially heated fluid loop // J. Fluid Mech. 1967. V. 29. Pt 1. P. 17–30.
5. Gorman M., Widman P.J., Robbins K.A. Chaotic flow regimes in a convection loop // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. № 25. P. 2241–2244.
6. Wang Y., Singer I., Bau H. Controlling chaos in thermal convection loop // J. Fluid Mech. 1992. V. 237. P. 479–498.

7. Дроздов С.М. Экспериментальное исследование конвекции жидкости в замкнутом торoidalном канале // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 4. С. 20–28.
8. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 423 с.
9. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности / Под ред. Х. Суинни Голлаб Дж. М.: Мир, 1984. 334 с.
10. Жигулев В.Н. О конвекции жидкости в кольцевом канале // Вопросы динамики неустойчивостей. М: МФТИ, 1995. С. 4–14.
11. Дроздов С.М. Хаотические и периодические решения задачи о конвекции жидкости в замкнутом канале // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 6.
12. Yorke J.A., Yorke E.D., Maller-Paret J. Lorenz-like chaos in partial differential equation for heated fluid loop // Physica D. 1987. V. 24. № 1–3. P. 279–291.

Москва

Поступила в редакцию
23.IX.1999