МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 2001

УДК 533.72

© 2001 г. А.В. ЛАТЫШЕВ, А.А. ЮШКАНОВ

АНАЛИЗ СООТНОШЕНИЙ ОНЗАГЕРА АНАЛИТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ В КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

Выполнена проверка известных соотношений Онзагера $L_{12} = L_{21}$ в кинетической теории газов с учетом потоков массы и тепла, локализованных в слое Кнудсена. С помощью аналитического решения уравнения БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук) показано, что соотношения Онзагера выполняются по крайней мере с точностью до экспоненциальных поправок exp(–1/Kn) по числу Кнудсена Kn.

Вопросы термодинамики необратимых процессов продолжают вызывать большой интерес [1–4]. Это связано как с важным общетеоретическим значением этой теории, так и с многочисленными приложениями в различных разделах науки.

Особый интерес вызывает во многом спорная проблема применимости теории необратимых процессов в газах при таких режимах течения, когда необходим учет поправок по числу Кнудсена Kn [4]. Один из возможных подходов к этой проблеме разработан в [5, 6]. Однако в указанных работах был использован приближенный (моментный) метод решения кинетического уравнения. Поэтому вывод о справедливости соотношений Онзагера, полученный в упомянутых работах, справедлив только в той мере, в которой справедлив используемый приближенный метод.

В то же время по самой сути методов теории необратимых процессов принципиально важным является подтверждение (или опровержение) аналитической (абсолютной) точности ее выводов. Такого рода результаты относительно течений газов в режиме со скольжением до сих пор получены не были. Следовательно, принципиальную важность в получении точных результатов в теории необратимых процессов в газах приобретают точные (аналитические) методы решения кинетических уравнений. К таким методам относится метод Кейза [7], который используется в данной работе. С его помощью могут быть получены аналитические решения "модельных" кинетических уравнений. К таким уравнениям относятся уравнение БГК, уравнение Шахова, эллипсоидально-статистическое уравнение и т.п. Ниже будет использовано БГК-уравнение.

В настоящей работе рассматривается классическая задача о движении газа и переносе тепла в канале под действием перепада температуры и давления [1, 5]. При этом относительные перепады температуры и давления предполагаются малыми. Это условие позволяет провести линеаризацию задачи. Будем предполагать, что число Kn, равное отношению длины свободного пробега молекул газа к толщине канала, мало. Отметим, что некоторые из рассматриваемых потоков локализованы в слое Кнудсена. Поэтому, хотя число Kn и мало, его нельзя считать равным нулю. Цель данной статьи состоит в проверке соотношения Онзагера

$$L_{12} = L_{21} \tag{0.1}$$

в кинетической теории газов с учетом потоков, локализованных в слое Кнудсена.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Возьмем декартову систему координат с центром в середине канала, с плоскостью yz, параллельной верхней и нижней стенкам. Предположим, что потоки массы и тепла параллельны оси z, а также что относительные перепады температуры и давления удовлетворяют неравенствам $|\Delta T|/T \ll 1$, $|\Delta p|/p \ll 1$. Здесь $\Delta T = T_2 - T_1$, $\Delta p = p_2 - p_1$; T_1, p_1 и T_2, p_2 – температура и давление газа соответственно в начале и конце канала. Потоки массы J_M газа и тепла J_Q вдоль канала пропорциональны перепадам давления и температуры и могут быть представлены в следующем виде [1]:

$$J_M = -2L_{11}(aL)\upsilon\,\frac{\Delta p}{p} - 2L_{12}(aL)\frac{\Delta T}{T^2}$$

$$J_Q = -2L_{21}(aL)\upsilon\,\frac{\Delta p}{p} - 2L_{22}(aL)\frac{\Delta T}{T^2}$$

Здесь $\upsilon = 1/\rho = 1/(nm)$ – удельный объем, a – толщина канала, L – ширина канала (вдоль оси y).

Как уже указывалось, целью данной работы является доказательство соотошений Онзагера (0.1). Задача рассматривается в линейной постановке. Линеаризованную функцию распределения представим в виде $f = f_0(1 + \varphi)$ (f_0 – абсолютный максвеллиан) и введем безразмерную скорость газовых молекул $\mathbf{c} = \sqrt{\beta}\mathbf{v}$, $\beta = m/2kT$.

Выразим потоки массы и тепла через функцию φ

$$\sqrt{\beta}J_M = nm\pi^{-3/2}\int dxdy\int \exp(-c^2)c_z\varphi d^3c$$

$$\sqrt{\beta}J_Q = nkT\pi^{-3/2}\int dxdy\int \exp(-c^2)c_z\left(c^2 - \frac{5}{2}\right)\varphi d^3c$$

$$\int dxdy = \int dy\int_{-a}^{a} dx = \frac{L}{\nu\sqrt{\beta}}\int_{-b}^{b} dx'$$

$$b = a\sqrt{\beta}\nu \sim 1/\mathrm{Kn}$$

Безразмерные потоки массы и тепла выражаются равенствами

$$J'_M = \frac{\nu}{4aLnkT}J_M, \quad J'_Q = \frac{m\nu}{4aLnk^2T^2}J_Q$$

или, в терминах L_{ij}

$$J'_M = -\frac{\upsilon\nu}{2}L_{11}\frac{\Delta p}{p} - \frac{\nu}{2Tp}L_{12}\frac{\Delta T}{T}$$

$$J'_Q = -\frac{\nu}{2pT}L_{21}\frac{\Delta p}{p} - \frac{\rho\nu}{2p^2T}\frac{\Delta T}{T}$$

Перепишем эти потоки через безразмерные коэффициенты Онзагера L'_{ij}

$$J'_M = -L'_{11}\frac{\Delta p}{p} - L'_{12}\frac{\Delta T}{T}$$

$$J'_Q = -L'_{12}\frac{\Delta p}{p} - L'_{22}\frac{\Delta T}{T}$$

$$L'_{12} = \frac{\nu}{2Tp}L_{12}, \quad L'_{21} = \frac{\nu}{2Tp}L_{21}$$

а также в терминах функции φ

$$J'_M = \pi^{-3/2} \int_{-b}^{b} dx' \int \exp(-c^2) c_z \varphi d^3c$$

$$J'_Q = \pi^{-3/2} \int_{-b}^{b} dx' \int \exp(-c^2) c_z \left(c^2 - \frac{5}{2}\right) \varphi d^3c$$

Тогда имеем

$$J'_M = -S_{11}k_p - S_{12}k_t, \quad J'_Q = -S_{21}k_p - S_{22}k_t$$

$$k_t = \frac{\partial \ln T}{\partial z'}, \quad k_p = \frac{\partial \ln p}{\partial z'}$$

$$\frac{\Delta p}{p} = z'_0 k_p, \quad \frac{\Delta T}{T} = z'_0 k_t, \quad z'_0 = \nu\sqrt{\beta} z_0, \quad S_{ij} = L'_{ij} z'_0$$

где z'_0 – безразмерная, а z_0 – размерная длина канала, ν – частота столкновений.

Теперь требуется доказать, что $S_{12} = S_{21}$. Разложим функцию φ на два слагаемых, пропорциональных соответственно k_p и k_t: $\varphi = \varphi_p k_p + \varphi_t k_t$. Тогда потоки массы и тепла выражаются равенствами

$$-S_{12} = \pi^{-3/2} \int_{-b}^{b} dx' \int \exp(-c^2) c_z \varphi_t d^3c \tag{1.1}$$

$$-S_{21} = \pi^{-3/2} \int_{-b}^{b} dx' \int \exp(-c^2) c_z \left(c^2 - \frac{5}{2}\right) \varphi_p d^3c \tag{1.2}$$

2. Аналитическое решение задачи. Возьмем БГК-уравнение в безразмерных переменных

$$c_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + c_z k_p + c_z \left(c^2 - \frac{5}{2}\right) k_t + \varphi(x, \mathbf{c}) = 2 c_z \pi^{-3/2} \int \exp(-c'^2) c'_z \varphi(x, \mathbf{c}') d^3c \tag{2.1}$$

Будем считать, что молекулы отражаются диффузно от стенок канала, тогда на верхней и нижней границах канала

$$\varphi(\pm b, c_x) = 0, \qquad \pm c_x > 0 \tag{2.2}$$

Разложим задачу (2.1), (2.2) по двум ортогональным направлениям, полагая

$$\varphi = c_z \psi(x, \mu) + c_z (c_y^2 + c_z^2 - 2) \xi(x, \mu), \quad \mu = c_x$$

Ортогональность понимается как равенство нулю скалярного произведения

$$(f, g) = \pi^{-3/2} \int \exp(-c^2) f(x, \mathbf{c}) g(x, \mathbf{c}) d^3c$$

Получим следующие две задачи:

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_p + k_t \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) + \psi(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) \psi(x, \mu') d\mu' \tag{2.3}$$

$$\psi(\pm b, \mu) = 0, \qquad \pm\mu > 0 \tag{2.4}$$

и

$$\mu \frac{\partial \xi}{\partial x} + \xi(x, \mu) + k_t = 0, \quad \xi(\pm b, \mu) = 0, \quad \pm\mu > 0 \tag{2.5}$$

Задача (2.5) имеет очевидное решение

$$\xi(x,\mu) = -k_t + k_t \exp\left(-\frac{x+b}{\mu}\right)\theta_+(\mu) + k_t \exp\left(-\frac{x-b}{\mu}\right)\theta_+(\mu)$$

где $\theta_+(\mu)$ – функция Хэвисайда; $\theta_+(\mu) = 1$, $\mu > 0$, $\theta_+(\mu) = 0$, $\mu < 0$.

Рассмотрим задачу (2.3), (2.4). Уравнение (2.3) имеет частное решение

$$\psi_0(x,\mu) = 2U + (2\mu^2 - 1 + x^2 - 2x\mu)k_p - \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right)k_t$$

Поэтому возьмем однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (2.3)

$$\mu\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2)\psi(x,\mu')d\mu' \tag{2.6}$$

Разделение переменных в уравнении (2.6)

$$\psi_\eta(x,\mu) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)F(\eta,\mu)$$

где η – спектральный параметр, или параметр разделения, приводит к характеристическому уравнению

$$(\eta - \mu)F(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta \tag{2.7}$$

в котором принята следующая нормировка:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2)F(\eta,\mu)d\mu = 1 \tag{2.8}$$

Решение двух последних уравнений возьмем в классе обобщенных функций [8]

$$F(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta P\frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2)\lambda(\eta)\delta(\eta - \mu) \tag{2.9}$$

Здесь символ Px^{-1} означает распределение – главное значение интеграла при интегрировании x^{-1}, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака

$$\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau\exp(-\tau^2)}{\tau - z}d\tau \tag{2.10}$$

есть дисперсионная функция Черчиньяни [9].

Ниже понадобится равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2)\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right)F(\eta,\mu)d\mu = -\frac{1}{2} \tag{2.11}$$

которое выводится на основании (2.7)–(2.9).

Покажем, что решение граничной задачи (2.3), (2.4) можно найти в виде разложения по собственным функциям (2.9) характеристического уравнения (2.7)

$$\varphi(x,\mu) = \psi_0(x,\mu) + \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta,\mu)a(\eta)d\eta \tag{2.12}$$

Здесь неизвестными являются постоянная U, входящая в выражение для $\psi_0(x, \mu)$, и функция $a(\eta)$. Отметим, что постоянная U – скорость скольжения газа вдоль стенок канала.

Подставим разложение (2.12) в граничные условия (2.4). Будем иметь

$$2U+(2\mu^2-1+b^2+2b\mu)k_p-\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)k_t+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \exp\left(\frac{b}{\eta}\right)\frac{\eta a(\eta)}{\eta-\mu}d\eta+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{b}{\eta}\right)\frac{\eta a(\eta)}{\eta-\mu}d\eta+\exp\left(\frac{b}{\mu}+\mu^2\right)\lambda(\mu)a(\mu)=0,\quad \mu>0 \tag{2.13}$$

$$2U+(2\mu^2-1+b^2-2b\mu)k_p-\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)k_t+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{b}{\eta}\right)\frac{\eta a(\eta)}{\eta-\mu}d\eta+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{b}{\eta}\right)\frac{\eta a(\eta)}{\eta-\mu}d\eta+\exp\left(-\frac{b}{\mu}+\mu^2\right)\lambda(\mu)a(\mu)=0,\quad \mu<0 \tag{2.14}$$

В силу предположения, что $\mathrm{Kn} \ll 1$, вторым интегралом в уравнении (2.13) можно пренебречь, так как он имеет малость порядка $\exp(-1/\mathrm{Kn})$ (напомним, что $b \sim 1/\mathrm{Kn}$). Аналогично можно пренебречь первым слагаемым в уравнении (2.14). Решим уравнение (2.13). Уравнение (2.14) решается аналогично; кроме того, решение одного уравнения заменой переменных преобразуется в решение другого.

Введем вспомогательную функцию

$$N(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \exp\left(\frac{b}{\eta}\right)\frac{\eta a(\eta)}{\eta-\mu}d\eta \tag{2.15}$$

С помощью граничных значений $\lambda(z)$ и $N(z)$ сверху и снизу на действительной полуоси $\mu>0$ сведем уравнение (2.13) к неоднородной краевой задаче Римана [10]

$$\lambda^+(\mu)\left[N^+(\mu)+2U+(2\mu^2-1+b^2+2b\mu)k_p-\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)k_t\right]=$$

$$=\lambda^-(\mu)\left[N^-(\mu)+2U+(2\mu^2-1+b^2+2b\mu)k_p-\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)k_t\right],\quad \mu>0 \tag{2.16}$$

Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)}=\frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)},\quad \mu>0 \tag{2.17}$$

В качестве ограниченного в нуле решения задачи (2.17) возьмем функцию

$$X(z)=\frac{1}{z}\exp(V(z)),\quad V(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\theta(\tau)-\pi}{\tau-z}d\tau \tag{2.18}$$

где $\theta(\tau)=\arg\lambda^+(\tau)$ – регулярная ветвь аргумента функции $\lambda^+(\tau)$, фиксированная условием $\theta(0)=0$.

С помощью однородной задачи (2.17) сведем неоднородную задачу (2.16) к задаче определения аналитической функции по нулевому скачку

$$X^+(\mu)\left[N^+(\mu)+2U+(2\mu^2-1+b^2+2b\mu)k_p-\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)k_t\right]=$$

$$=X^-(\mu)\left[N^-(\mu)+2U+(2\mu^2-1+b^2+2b\mu)k_p-\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)k_t\right],\quad \mu>0$$

Общее решение этой задачи имеет вид

$$N(z)=-2U-(2z^2-1+b^2+2bz)k_p+\left(z^2-\frac{1}{2}\right)k_t+\frac{c_0+c_1z}{X(z)} \tag{2.19}$$

где c_0 и c_1 – произвольные постоянные.

Рассмотрим два асимптотических разложения

$$V(z)=1+\frac{V_1}{z}+\frac{V_2}{z^2}+\frac{V_3}{z^3}+o\left(\frac{1}{z^3}\right),\quad |z|\to\infty \tag{2.20}$$

$$\exp(-V(z))=1-\frac{V_1}{z}+\frac{V_2^*}{z^2}+\frac{V_3^*}{z^3}+o\left(\frac{1}{z^3}\right),\quad |z|\to\infty \tag{2.21}$$

$$V_k=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [\Theta(\tau)-\pi]\tau^{k-1}d\tau \quad (k=1,2,\ldots)$$

Выразим коэффициенты V_2^* и V_3^* через V_1, V_2 и V_3. Для этого следует прологарифмировать равенство (2.21), воспользоваться разложением (2.20), продифференцировать полученное равенство и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях z. В результате находим

$$V_2^*=\frac{1}{2}V_1^2-V_2,\quad V_3^*=-V_3+\frac{2}{3}V_1V_2-\frac{1}{3}V_1V_2^* \tag{2.22}$$

Функция $N(z)$, определенная равенством (2.15), исчезает в бесконечно удаленной точке. Потребуем, чтобы этим свойством обладало решение (2.19). В результате получаем систему уравнений, из которых находим

$$c_0=2(b+V_1)k_p-V_1k_t,\quad c_1=2k_p-k_t,$$

$$2U=\left(-\frac{1}{2}+V_1^2-V_2^*\right)k_t+[1-b^2-2(b+V_1)V_1+2V_2^*]k_p \tag{2.23}$$

Неизвестная функция $a(\eta)$ находится из формулы Сохоцкого

$$N^+(\mu)-N^-(\mu)=2\sqrt{\pi}i\mu\exp\left(\frac{b}{\mu}\right)a(\mu),\quad \mu>0$$

если в эту формулу подставить решение (2.19). Тогда получаем

$$2\sqrt{\pi}i\mu\exp\left(\frac{b}{\mu}\right)a(\mu)=[2(b+V_1)+2\mu]\left[\frac{1}{X^+(\mu)}-\frac{1}{X^-(\mu)}\right]k_p+$$

$$+(-V_1-\mu)\left[\frac{1}{X^+(\mu)}-\frac{1}{X^-(\mu)}\right]k_t \tag{2.24}$$

Все неизвестные коэффициенты разложения (2.12) найдены. Коэффициент дискретного спектра U вычисляется согласно (2.23), а коэффициент непрерывного спектра $a(\eta)$ – согласно (2.24). Представим функцию $a(\mu)$ в виде

$$\exp\left(\frac{b}{\mu}\right)a(\mu)=a_p(\mu)k_p+a_t(\mu)k_t$$

$$a_p(\mu)=\frac{2(b+V_1)+2\mu}{2\sqrt{\pi}i\mu}\left[\frac{1}{X^+(\mu)}-\frac{1}{X^-(\mu)}\right] \tag{2.25}$$

$$a_t(\mu)=\frac{-V_1-\mu}{2\sqrt{\pi}i\mu}\left[\frac{1}{X^+(\mu)}-\frac{1}{X^-(\mu)}\right] \tag{2.26}$$

Решение (2.12) можно представить в виде такой же суммы

$$\psi(x,\mu)=\psi_p(x,\mu)k_p+\psi_t(x,\mu)k_t$$

$$\psi_p(x,\mu)=-b^2-2(b+V_1)V_1+2V_2^*+2\mu^2+x^2-2x\mu+$$

$$+\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x+b}{\eta}\right)F(\eta,\mu)a_p(\eta)d\eta \tag{2.27}$$

$$\psi_t(x,\mu)=V_1^2-V_2^*-\mu^2+\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x+b}{\eta}\right)F(\eta,\mu)a_t(\eta)d\eta \tag{2.28}$$

В равенствах (1.1) и (1.2) выполним интегрирование по c_y и c_z. В результате получаем

$$-S_{12}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-b}^{b}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu'^2)\psi_t(x,\mu')d\mu' \tag{2.29}$$

$$-S_{21}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-b}^{b}dx'\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu'^2)\left(\mu'^2-\frac{1}{2}\right)\psi_p(x,\mu')d\mu' \tag{2.30}$$

Осталось подставить выражения (2.27) и (2.28) соответственно в (2.30) и (2.29). При этом следует удвоить слагаемые, отвечающие непрерывной части спектра (интегральные слагаемые). Это отвечает вкладу верхней пластины в функцию распределения, в точности равному вкладу нижней пластины, если пренебречь членами порядка exp(–1/Kn). При интегрировании по μ следует воспользоваться соотношениями (2.8) и (2.11). В результате получаем

$$-S_{12}=b\left(-\frac{1}{2}+V_1^2-V_2^*\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \eta a_t(\eta)d\eta \tag{2.31}$$

$$-S_{21}=b-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \eta a_p(\eta)d\eta \tag{2.32}$$

Вычислим интегралы

$$J_t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \eta a_t(\eta)d\eta,\quad J_p=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \eta a_p(\eta)d\eta$$

Согласно (2.25) и (2.26), имеем

$$J_t=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left[\frac{1}{X^+(\eta)}-\frac{1}{X^-(\eta)}\right](V_1+\eta)d\eta$$

$$J_p=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left[\frac{1}{X^+(\eta)}-\frac{1}{X^-(\eta)}\right](b+V_1+\eta)d\eta$$

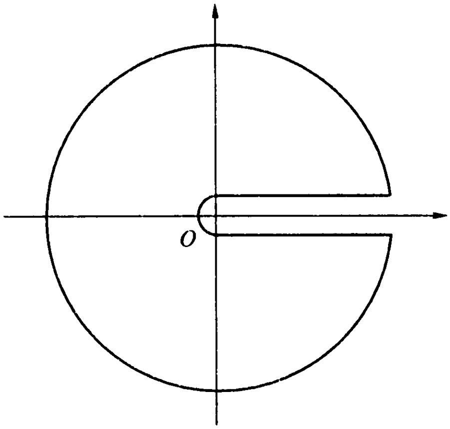
Для вычисления этих интегралов потребуются два интегральных представления

$$\frac{z^2}{X(z)}-z^3+V_1z^2-V_2^*-V_3^*=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left[\frac{1}{X^+(\eta)}-\frac{1}{X^-(\eta)}\right]\frac{\eta^2}{\eta-z}d\eta \tag{2.33}$$

$$\frac{z}{X(z)}-z^2+V_1z-V_2^*=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left[\frac{1}{X^+(\eta)}-\frac{1}{X^-(\eta)}\right]\frac{\eta}{\eta-z}d\eta \tag{2.34}$$

Для вывода (2.34) заметим, что функция

$$\varphi(z)=\frac{z}{X(z)}-z^2+V_1z-V_2^*$$



Контур интегрирования в комплексной плоскости

имеет асимптотику: $\varphi(z) = o\ (1)$, $|z| \to \infty$; эта функция аналитична везде в комплексной плоскости, за исключением положительной действительной полуоси. Возьмем контур Γ_ε, изображенный на фигуре.

Этот контур охватывает положительную действительную полуось. Радиус большой окружности равен $R = 1/\varepsilon$, радиус малой полуокружности равен ε. Согласно интегральной формуле Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

где функция $\varphi(z)$ введена предыдущим равенством. Перейдем в формуле Коши к пределу при $\varepsilon \to 0$. Интеграл по большой окружности в пределе пропадает благодаря указанной выше асимптотике, а интегралы по верхнему и нижнему берегам разреза дают представление (2.34). Представление (2.33) выводится аналогично.

Из представлений (2.33) и (2.34) при $z = 0$ получаем следующие равенства:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)}\right] d\eta = -V_2^*$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)}\right] \eta\, d\eta = -V_3^*$$

Значит, $J_t = V_1 V_2^* + V_3^*$, $J_n = -bV_2^* - V_1 V_2^* - V_3^*$. Подставляя эти равенства в (2.33) и (2.34), находим

$$-S_{12} = V_1 V_2^* + V_3^* + b\left(-\frac{1}{2} + V_1^2 - V_2^*\right), \quad -S_{21} = V_1 V_2^* + V_3^* + b(1 + V_2^*)$$

Отсюда следует

$$S_{12} - S_{21} = b\left(\frac{3}{2} - 2V_2\right)$$

Осталось доказать, что $V_2 = {}^3/_4$. Воспользуемся (см. [10]) формулой факторизации дисперсионной функции $\lambda(z) = {}^1/_2 X(z) X(-z)$, где функции $\lambda(z)$ и $X(z)$ введены равенствами (2.10) и (2.18). Подставляя в формулу факторизации равенство (2.18) и логарифмируя, имеем $\ln(-2z^2\lambda(z)) = V(z) + V(-z)$. Разложим левую и правую части этого равенства в асимптотические ряды

$$\ln\left(1+\frac{3}{2z^2}+\frac{15}{4z^4}+\ldots\right)=\frac{2V_2}{z^2}+\frac{2V_4}{z^4}+\ldots \quad (|z|\to\infty)$$

Дифференцируя и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем бесконечную систему уравнений, из которых находим последовательно все четные коэффициенты V_{2k} $(k = 1, 2, \ldots)$, в частности $V_2 = {}^3/_4$. Следовательно, $S_{12} = S_{21}$.

3. Отметим, что величины S_{12} и S_{21} можно представить в виде

$$S_{ij} = 2br_{ij} \qquad (i, j = 1, 2;\ i \neq j)$$

$$r_{ij} = r_{ij}^{(0)} + \frac{1}{b} r_{ij}^{(1)} \tag{3.1}$$

Величины $r_{ij}^{(0)}$ и $r_{ij}^{(1)}$ соответствуют потокам на единицу ширины канала, так как $2b$ – безразмерная ширина канала. При этом выполняются равенства

$$r_{12}^{(0)} = r_{21}^{(0)}, \quad r_{12}^{(1)} = r_{21}^{(1)} \tag{3.2}$$

Соотношения (3.1) являются разложениями величин r_{12} и r_{21} в ряд по степеням числа Kn, так как $1/b \sim$ Kn. В разложениях (3.1) приведены все отличные от нуля степени; опущены только члены, пропорциональные exp(–1/Kn), которые неразложимы в степенной ряд по степеням Kn.

Из двух соотношений (3.2) ранее в [5, 6] было рассмотрено с использованием приближенного моментного метода только первое. Доказательство второго соотношения из (3.2) приводится в данной работе. Следует отметить, что справедливость и первого соотношения из (3.2), и второго доказана аналитически.

Заключение. Соотношения Онзагера строго выполняются для кинетического БГК-уравнения с точностью по крайней мере до экспоненциальных поправок exp(–1/Kn) по числу Кнудсена.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00336).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
2. *Базаров И.П., Геворкян Э.В., Николаев П.Н.* Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. М.: Изд-во МГУ, 1989. 240 с.
3. *Vestner H., Waldmann I.* Generalized hydrodynamics of thermal transpiration, thermal force and friction force // Physica A. 1977. V. 86. № 2. P. 303–336.
4. *Жданов В.М., Ролдугин В.И.* О неравновесной термодинамике слаборазреженной газовой смеси // ЖЭТФ. 1996. Т. 109. № 4. С. 1267–1287.
5. *Яламов Ю.И., Гайдуков М.Н.* Два метода построения теории термофореза крупных аэрозольных частиц // Коллоид. журн. 1976. Т. 38. № 6. С. 1149–1155.
6. *Яламов Ю.И., Гайдуков М.Н., Голиков А.М.* Два метода построения теории диффузиофореза крупных аэрозольных частиц // Коллоид. журн. 1977. Т. 39. № 6. С. 1132–1138.
7. *Кейз К.М., Цвайфель П.Ф.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
8. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
9. *Cercignani C.* Elementary solutions of the linearized gas-dynamics Boltzmann equation and their applications to the slip-flow problem // Ann. Phys. (USA). 1962. V. 20. № 2. P. 219–233.
10. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.XII.1999