

УДК 532.546

© 2001 г. Д.В. ВОСКОВ, О.В. ГАЛАМАЙ, В.М. ЕНТОВ

ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОЙ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ

Рассматриваются автомодельные решения уравнений физико-химической подземной гидромеханики, отвечающие одномерному вытеснению нефти раствором активной примеси. Предложен и реализован подход, в котором автомодельное решение гиперболической задачи получается как предел автомодельного решения параболической задачи при стремлении к нулю коэффициентов переноса. Приведены примеры регулярного предельного перехода в случае единственности предела и нерегулярного, когда предел зависит от отношения малых коэффициентов переноса. Обсуждается физический смысл нерегулярности в случае вытеснения нефти раствором амбивалентной активной примеси.

Автомодельные решения задачи о распаде разрыва постоянно используются в физико-химической подземной гидромеханике для исследования процессов вытеснения нефти растворами активных примесей или смесями газов, лежащих в основе методов повышения нефтеотдачи пластов [1–3]. В сочетании с методом жестких трубок тока эти решения используются и в наиболее удачных моделях прогноза повышения нефтеотдачи для пластов сложного строения.

Однако само по себе построение автомодельного решения оказывается не всегда простым. Для задач физико-химической подземной гидромеханики характерна многофронтная структура со сложным чередованием простых волн и разрывов, причем в ряде случаев для отыскания реализующихся разрывов оказывается недостаточно условий эволюционности разрывов.

В некоторых случаях решение, найденное по обычным правилам построения автомодельного решения, удовлетворяющего условиям эволюционности, оказывается не единственным [4–6].

Все эти особенности, по-видимому, связаны с тем, что система уравнений, описывающих вытеснение нефти растворами активных примесей в крупномасштабном приближении [1, 2], не является строго гиперболической. Характеристические скорости волн различных семейств по-разному упорядочены в различных областях пространства неизвестных, так что волны "более быстрые" при одних значениях переменных оказываются "более медленными" при других.

Из-за этого построение искомым глобальных автомодельных решений, опирающееся на характеристическое условие эволюционности разрывов ("число характеристик, уходящих со скачка, на единицу меньше числа неизвестных") [7–9], оказывается технически сложным.

Результаты работ [10, 11]¹ указывают на то, что "правильное" автомодельное решение ряда задач физико-химической подземной гидромеханики вообще имеет смысл лишь постольку, поскольку данная система законов сохранения рассматривается как "гиперболический предел" вырождающейся параболической системы, учитывающей

¹ См. также Керимов З.А. Диссипативные эффекты при вытеснении нефти растворами активных примесей: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: М., ИПМ РАН, 1989. 179 с.

малые диссипативные эффекты (диффузия, теплопроводность, капиллярный перенос). Важно, что этот предел может быть различным, если малые диссипативные члены стремятся к пределу (нулю) по-разному.

На необходимость рассмотрения разрывных решений гиперболических систем как предельных для их "параболических прототипов" указывалось еще в классической статье [7]. Явный пример системы двух уравнений, для которой "гиперболический предел" зависит от характера матрицы вязкостей, указан в [12]. В [13] показано, что и в случае одного уравнения с невыпуклой функцией потока допустимый разрыв зависит от характера вырождения, если в качестве возмущающих допускаются наряду с вторыми производными ("вязкость") производные третьего порядка. Подробное изложение этих и примыкающих к ним результатов имеется в книге [14]. Таким образом, в данном случае речь идет о еще одном примере нетривиально "гиперболического вырождения" с иным физическим содержанием.

Если это так, то в строгом смысле "гиперболическая" постановка задачи не вполне корректна, а на практике она будет вести к неконтролируемой зависимости от численной дисперсии или от естественно присущих системе диссипативных свойств, не учитываемых в крупномасштабном приближении.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы предложить простой метод эффективного построения автомодельных решений задач физико-химической подземной гидромеханики и с его помощью исследовать вытеснение нефти активной примесью, в частности особый случай вытеснения нефти раствором амбивалентной активной примеси [10–11]. Одновременно те же решения описывают процесс вытеснения при осесимметричном течении в окрестности скважины с учетом диссипативных процессов переноса.

1. Постановка задачи. Одномерная задача вытеснения нефти раствором химического реагента, способствующего повышению нефтеотдачи ("активной примеси"), описывается в крупномасштабном приближении гиперболической системой законов сохранения [1–3]

$$\frac{\partial ms}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} F(s, c) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial [msc + m(1-s)\varphi(c) + a(c)]}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} [cF(s, c) + \varphi(c)(1 - F(s, c))] = 0$$

Здесь m – пористость, s – насыщенность вытесняющей фазой, c и $\varphi(c)$ – концентрации растворенной примеси в водной и нефтяной фазах, $a(c)$ – сорбированное количество примеси, F – функция распределения потоков, характеризующая долю водной фазы в суммарном потоке, U – скорость фильтрации суммарного потока, предполагаемая постоянной.

Процессу вытеснения отвечает автомодельное решение задачи о распаде разрыва с начальными данными

$$\begin{aligned} s(0, t) = S^0, \quad c(0, t) = C^0, \quad s(x, 0) = S_0 \\ c(x, 0) = C_0, \quad 0 \leq x < \infty \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для того чтобы эффективно построить автомодельное решение, в крупномасштабном приближении рассмотрим более общую систему уравнений [1, 2]

$$\frac{\partial ms}{\partial t} + (U \nabla) F(s, c) = \nabla (A \nabla s) \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial [msc + m(1-s)\varphi(c) + a(c)]}{\partial t} + (U \cdot \nabla) [cF(s, c) + \varphi(c)(1 - F(s, c))] = \\ = \nabla \cdot ((c - \varphi(c))A \nabla s) + \nabla \cdot (D_1 \nabla c + D_2 \nabla \varphi(c)) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$F \equiv \frac{k_1}{k_1 + \mu k_2}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}; \quad \psi = k \frac{k_1 k_2}{\mu_2 k_1 + \mu_1 k_2} \quad (1.5)$$

$$A(s) = -\psi(s) \frac{\partial P_c}{\partial s} > 0 \quad (1.6)$$

Здесь $P_c(s)$ – капиллярное давление; k_i – относительные фазовые проницаемости, μ_i – вязкости фаз, k – абсолютная проницаемость среды. В дальнейшем P_c , A и D_i предполагаются функциями насыщенности s . Индекс 1 относится к воде, индекс 2 – к нефти.

Эта система описывает общую задачу вытеснения в потоке с суммарной скоростью U при наличии диссипативных эффектов – диффузии примеси и капиллярного потока. Поле U здесь считается заданным. В крупномасштабном приближении коэффициенты капилляропроводности A и диффузии D_1 и D_2 полагаются равными нулю.

Рассмотрим радиальное осесимметричное течение в окрестности точечного источника интенсивности Q с полем скоростей

$$U_r = \frac{Q}{2\pi r}; \quad U_\varphi = U_z = 0 \quad (1.7)$$

Здесь $\{r, \varphi, z\}$ – цилиндрические координаты, Q – суммарная обильность источника в расчете на единицу длины его оси. В предположении, что в первоначально невозмущенный пласт закачивается раствор активной примеси постоянной концентрации, имеем из уравнений (1.3) и (1.4)

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{Q}{2\pi r} \frac{\partial F(s, c)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rA \frac{\partial s}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial [m s c + m(1-s)\varphi(c) + a(c)]}{\partial t} + \frac{Q}{2\pi r} \frac{\partial [cF(s, c) + \varphi(c)(1-F(s, c))]}{\partial r} = \quad (1.8)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(c - \varphi(c))A \frac{\partial s}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rD_1 \frac{\partial c}{\partial r} + rD_2 \frac{\partial \varphi(c)}{\partial r} \right) \\ s(0, t) = S^0, \quad c(0, t) = C^0, \quad s(r, 0) = S_0, \quad c(r, 0) = C_0 \quad (1.9)$$

Легко видеть, что начально-краевая задача с данными (1.9) допускает автономное решение вида

$$s = S(\eta), \quad c = C(\eta), \quad \eta = \sqrt{\frac{\pi r^2 m}{Qt}} \quad (1.10)$$

где $S(\eta)$ и $C(\eta)$ – решение краевой задачи для системы двух уравнений второго порядка.

$$-\frac{\eta}{2} \frac{ds}{d\eta} + \frac{1}{2\eta} \frac{dF}{d\eta} = \frac{\sigma}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta A \frac{ds}{d\eta} \right), \quad \sigma = \frac{\pi}{Q} \quad (1.11)$$

$$-\frac{\eta}{2} \frac{d[sc + (1-s)\varphi(c) + a(c)/m]}{d\eta} + \frac{1}{2\eta} \frac{d[cF(s, c) + \varphi(c)(1-F(s, c))]}{d\eta} = \\ = \frac{\sigma}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left((c - \varphi(c))\eta A \frac{ds}{d\eta} \right) + \frac{\sigma}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \left(D_1 \frac{dc}{d\eta} + D_2 \frac{d\varphi(c)}{d\eta} \right) \right) \quad (1.12)$$

$$c(0) = C^0, \quad c(\infty) = C_0, \quad s(0) = S^0, \quad s(\infty) = S_0$$

Соответствующее решение должно быть гладким и может быть построено с помощью любого стандартного алгоритма, например методом установления, как это сделано ниже.

Автомодельные решения вида (1.10) описывают локальные процессы в окрестности нагнетательной скважины и позволяют детально исследовать влияние на них диффузии и капиллярной пропитки. Эти вопросы, представляющие значительный интерес для приложений, здесь не рассматриваются.

Нетрудно видеть также, что при $A \rightarrow 0$, $D \rightarrow 0$ задача (1.8), (1.9) с точностью до замены r^2 на x эквивалентна задаче (1.1), (1.2). Поэтому можно пытаться искать автомодельное решение задачи (1.1), (1.2) как предел решения задачи (1.8), (1.9) при малых значениях коэффициентов переноса A и D .

Поскольку речь идет о построении автомодельного решения гиперболической системы как предела решения параболической системы, такой метод далее называется методом вложения. В известном смысле, это "правильный метод", поскольку принятая регуляризация гиперболической задачи соответствует ее физическому смыслу и в особых случаях сама должна выделять правильное решение.

2. Численный алгоритм. Вводя новые переменные, перепишем задачу (1.8)–(1.9) в виде

$$\frac{\partial s}{\partial \lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial \xi} + \frac{1}{2e^{2\xi}} \frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{\sigma}{e^{2\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(A \frac{\partial s}{\partial \xi} \right) \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial [sc + (1-s)\varphi(c) + a(c)/m]}{\partial \lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial [sc + (1-s)\varphi(c) + a(c)/m]}{\partial \xi} + \\ & + \frac{1}{2e^{2\xi}} \frac{\partial [cF(s, c) + \varphi(c)(1-F(s, c))]}{\partial \xi} = \\ & = \frac{\sigma}{e^{2\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((c - \varphi(c))A \frac{\partial s}{\partial \xi} \right) + \frac{\delta}{e^{2\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_1 \frac{\partial c}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \varphi(c)}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\lambda = \ln \tau, \quad \xi = \frac{1}{2} \ln \eta \quad (2.3)$$

Искомое автомодельное решение является стационарным пределом решений задачи (2.1), (2.2) при произвольных начальных данных, удовлетворяющих условиям

$$s(-\infty, 0) = S^0, \quad c(-\infty, 0) = C^0, \quad s(\infty, 0) = S_0, \quad c(\infty, 0) = C_0 \quad (2.4)$$

Это решение отыскивалось методом установления. При этом уравнения (2.2) и (2.3) аппроксимировались конечно-разностной схемой с явной аппроксимацией младших членов и неявной аппроксимацией вторых производных. Конвективные члены аппроксимировались уголкового первого порядка с ориентацией по потоку. Возникающие на каждом временном шаге трехдиагональные линейные системы решались методом прогонки. Счет велся до установления с заданной точностью, исходя из требования

$$\max_j \|c_i^j - c_i^{j-1}\|, \|s_i^j - s_i^{j-1}\| \leq \epsilon \quad (2.5)$$

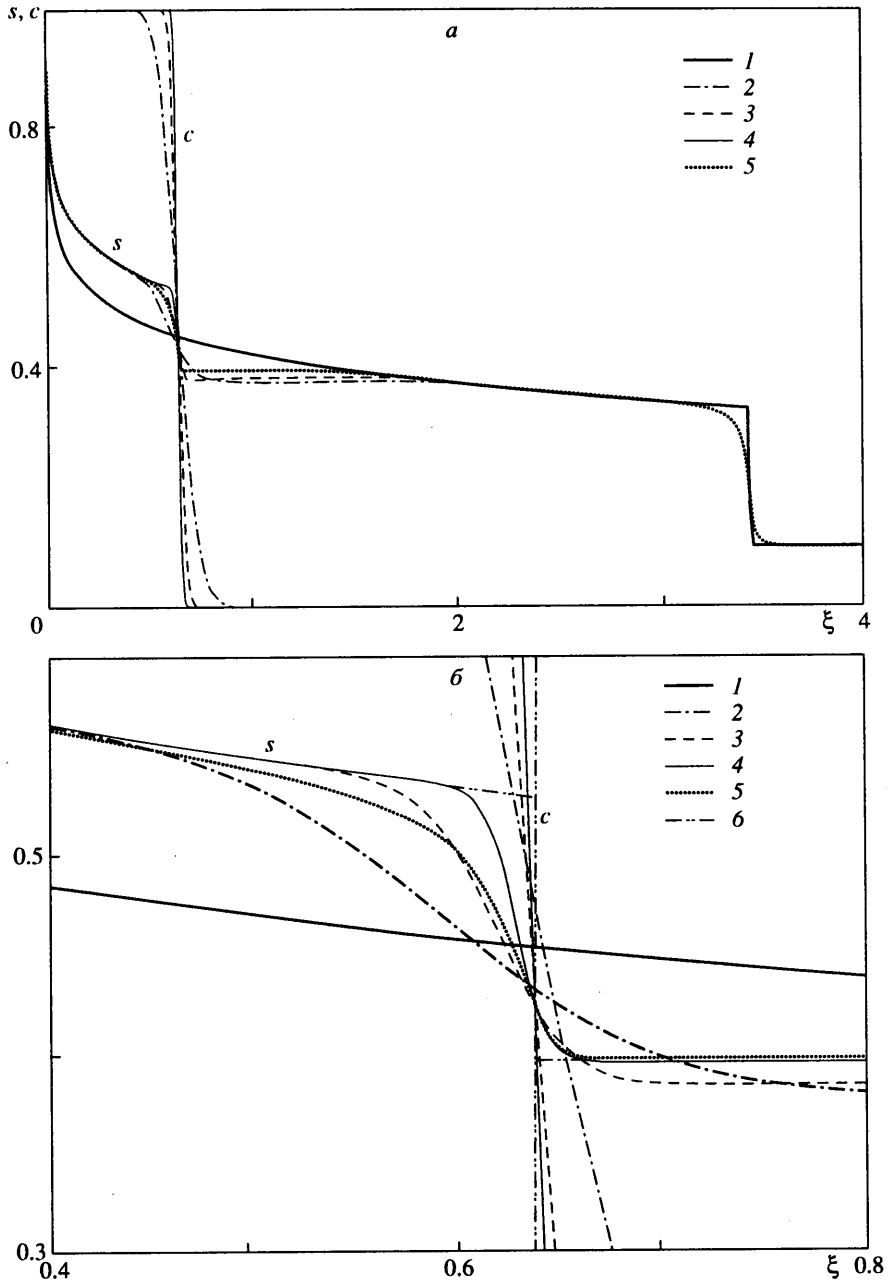
Приводимые ниже результаты относятся к $\epsilon = 10^{-7}$. Такой алгоритм устойчиво и достаточно быстро работает на современных ПК в широком диапазоне параметров.

3. Результаты расчетов. Для оценки точности и эффективности результатов была выбрана задача вытеснения нефти раствором активной примеси, растворимой только в воде ($\varphi(c) \equiv 0$) и влияющей только на отношение вязкостей фаз.

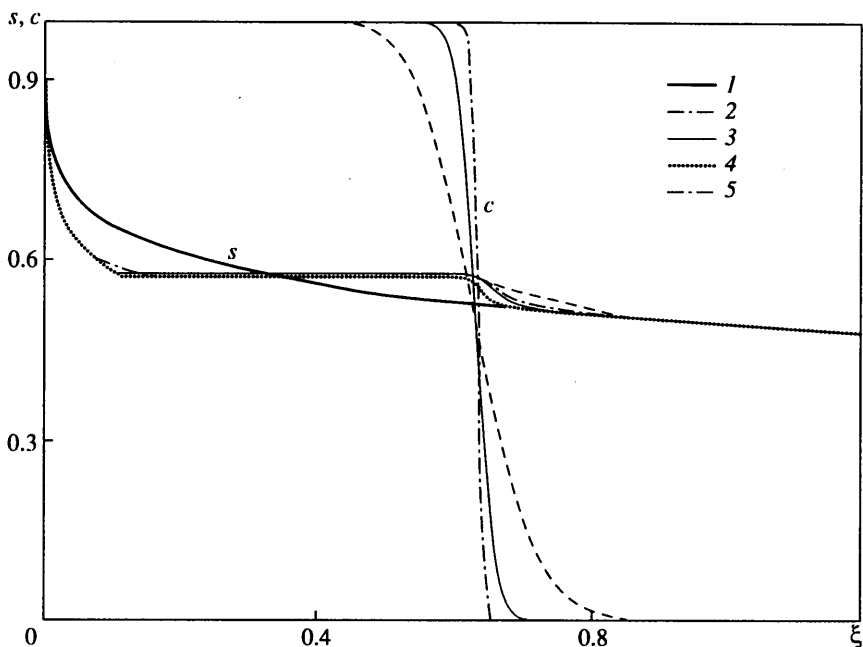
При этом относительные фазовые проницаемости и зависимость отношения вязкости от концентрации примеси c брались в виде

$$k_1 = \frac{(s - s_0)^3}{(1 - s_0)^3}, \quad k_2 = \frac{(s^0 - s)^3}{(s^0)^3} \quad (3.1)$$

$$\mu(c) = \frac{\mu_1}{\mu_2(1 + \gamma(c - C_*)^2)^\beta} \quad (3.2)$$



Фиг. 1. Расчет вытеснения нефти раствором полезной водорастворимой активной примеси для всей области решения (а) и в окрестности фронта вытеснения раствором примеси (б). Показаны: кривая 1 – решение задачи вытеснения в отсутствие примеси (решение Баклея – Леверетта), кривые 2-5 соответствуют $(\lg A; \lg D) = (-6; -3), (-7; -4), (-7; -5), (-3; -5)$, 6 – точное решение для $A = 0, D = 0$



Фиг. 2. Расчет вытеснения нефти раствором вредной водорастворимой активной примеси. Показаны: 1 – решение задачи вытеснения в отсутствие примеси (решение Баклея – Леверетта), кривые 2–5 соответствуют $(\lg A; \lg D) = (-7; -3), (-7; -4), (-7; -5), (-3; -5)$

Такой выбор позволяет смоделировать случай полезной ($\mu'(c) > 0$), вредной ($\mu'(c) < 0$) и амбивалентной ($\mu'(c)$ меняет знак в рабочем диапазоне концентраций, $c_0 < c < c^0$) примесей. При этом полезной называется примесь, увеличивающая долю нефти в суммарном потоке, а вредной – снижающая ее. Изотерма адсорбции примеси и распределения примеси в фазах считались линейными. Это наиболее трудный для численных расчетов случай из-за сложности воспроизведения контактного разрыва [16].

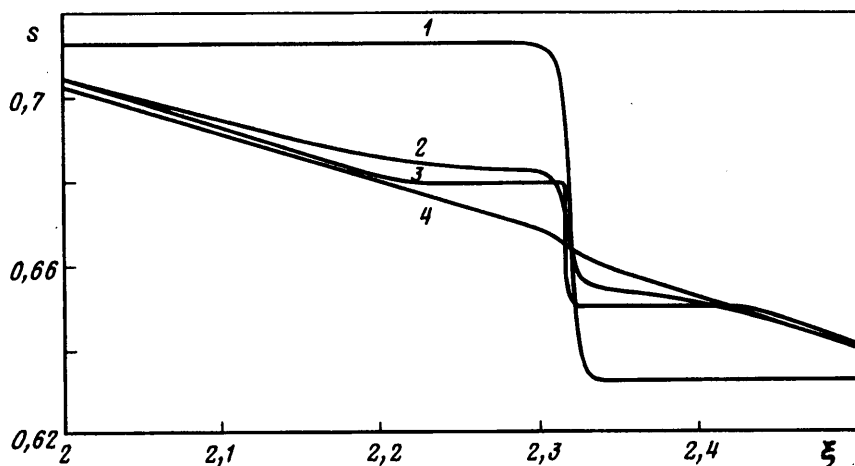
В модельных расчетах коэффициенты переноса A и D полагались постоянными, значения которых варьировались в широких пределах.

В случае полезной или вредной активной примеси точное автомодельное решение задачи вытеснения в крупномасштабном приближении легко строится стандартными методами. Соответствующее решение единственно, и асимптотическая теория [1, 2] показывает, что при малых коэффициентах переноса A и D диссипативные эффекты будут малы.

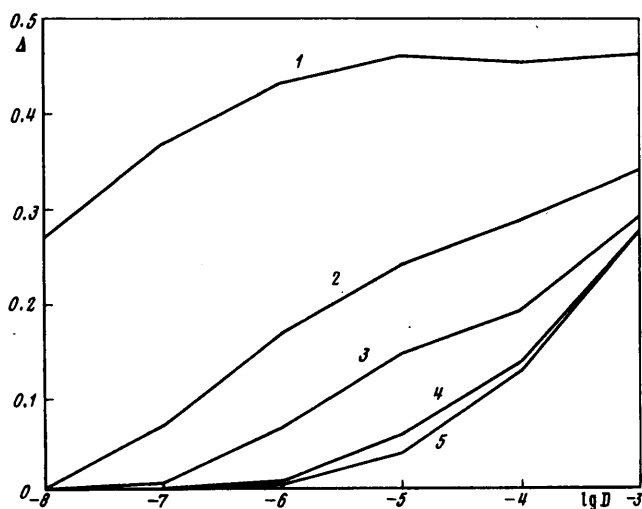
Этот вывод хорошо согласуется с результатами расчетов. Данные для случая полезной примеси приведены на фиг. 1, а для случая вредной примеси – на фиг. 2. Во всех расчетах, обсуждаемых ниже, полагалось $C^0 = 1; C_0 = 0; S^0 = 0,9; S_0 = 0,1; \gamma = 1,5; \beta = 1; \mu_1/\mu_2 = 0,1; Q = 1; m = 0,1$. Значение $C_* = 1,5$ в случае полезной примеси, $C_* = -0,5$ для вредной примеси и $C_* = 0,5$ для амбивалентной примеси.

Видно, что по мере уменьшения диссипативных коэффициентов A и D численные решения достаточно быстро приближаются к точным автомодельным решениям гиперболической задачи, имеющим типичную структуру, детально описанную в [1, 2]. Для сопоставления на фиг. 1 и 2 показаны также решения задачи вытеснения нефти водой в пренебрежении капиллярными потоками (решение Баклея – Леверетта).

Фигура 3 показывает пример результатов расчета для случая амбивалентной активной примеси. При этом был выбран особый случай, когда функция распределения потоков $F(s, c)$ принимает одинаковые значения при начальном (C_0) и конечном (C^0)



Фиг. 3. Расчет вытеснения нефти раствором амбивалентной водорастворимой активной примеси (особый случай). Поведение распределения насыщенности в окрестности скачка концентрации при фиксированном значении коэффициента диффузии и различных значениях капиллярного переноса. Кривые 1-4 соответствуют $(\lg A; \lg D) = (-6; -4), (-4; -4), (-7; -4), (-3; -4)$

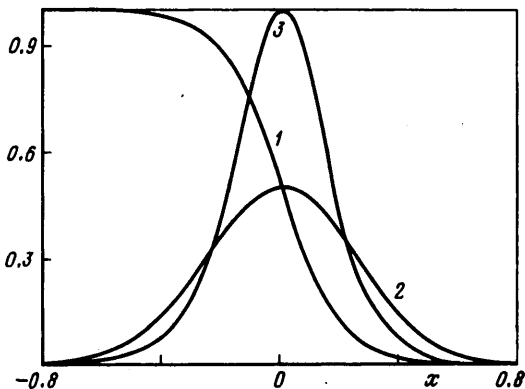


Фиг. 4. Влияние параметров диссипативного переноса на интегральные характеристики решения. Кривые 1-5 соответствуют значениям отношения $A/D = 0,01; 0,1; 1; 10; 100$

значениях концентрации активной примеси. С этой целью полагалось $C_0 = 0, C^0 = 2C_* = 1$.

При этом задача гиперболического вырождения имеет тривиальное решение, в котором распространение фронта примеси не сказывается на распределении насыщенности, а само это распределение дается решением Баклея - Леверетта. Это единственное решение гиперболического приближения, для которого разрыв является эволюционным. Результаты расчетов с не равными нулю коэффициентами переноса ясно демонстрируют сильную зависимость от них вплоть до самых малых значений, еще разрешимых численным методом.

Например, для результатов, показанных на фиг. 3, при фиксированном малом зна-



Фиг. 5. Схема, поясняющая роль диффузии в особом случае вытеснения. Кривая 1 — профиль концентрации амбивалентной примеси $c(x, t)$; 2 — распределение относительной подвижности вытесняемой фазы в переходной зоне, 3 — эквивалентный профиль концентрации полезной активной примеси, обеспечивающий то же соотношение подвижностей

чении коэффициента диффузии D при больших значениях коэффициента капиллярного переноса A решение весьма близко к решению задачи Баклея — Леверетта. С уменьшением A оно приближается к решению с явно выраженным "скачком довытеснения", как это и подсказывает асимптотический анализ [1, 2]; наконец, при дальнейшем уменьшении A скачок вновь уменьшается, по-видимому, из-за проявления неконтролируемых численных эффектов.

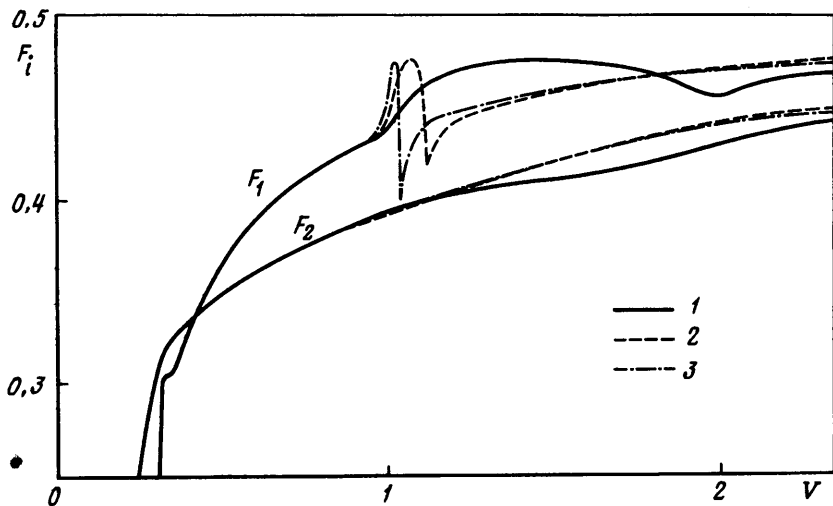
Такой характер зависимости от параметров является общим для многочисленных расчетов.

Общую тенденцию суммирует фиг. 4, где показана зависимость среднего квадрата отклонения Δ (в условных единицах) распределения насыщенности от решения Баклея — Леверетта.

Основную роль играет соотношение между параметрами A и D . Если капиллярный перенос "опережает" диффузионный, $D \ll A$, то решение близко к решению Баклея — Леверетта. Если $D \gg A$, то даже при весьма малых значениях D имеется значительная разница между решениями "параболической" и "гиперболической" задач, численное решение существенно отличается от решения Баклея — Леверетта вплоть до самых малых значений $D \gg A$, для которых еще удастся провести расчеты.

Легко дать качественное объяснение данному результату. Наличие диффузии ведет к размыванию фронта примеси и образованию переходной диффузионной зоны, в которой концентрация изменяется непрерывно (см. фиг. 5, кривая 1). В этой зоне отношение вязкостей $\mu(c)$ меняется, проходя через максимум (кривая 2), и поэтому эта ситуация полностью эквивалентна вытеснению оторочкой (т.е. конечной порцией) полезной примеси с плавным распределением концентрации (кривая 3). Чем больше коэффициент диффузии, тем шире эта "эффективная оторочка", и тем больше ее положительный эффект. Таким образом, в данном случае окончательный эффект вытеснения зависит от отношения A/D .

Приведенное качественное рассуждение подсказывает, что в случае "амбивалентной" примеси можно увеличить степень вытеснения, искусственно растягивая переходную зону. Это можно сделать, например, постепенно (а не скачком) увеличивая концентрацию добавки в закачиваемой жидкости. Это соображение подтверждается результатами численного расчета. На фиг. 6 показаны зависимости нефтеотдачи (F_2) и доли воды в потоке (F_1) от объема жидкости (V) для разных режимов закачки.



Фиг. 6. Влияние программированной закачки на эффективность вытеснения в особом случае. Показаны зависимости нефтеотдачи (F_2) и доли воды в потоке (F_1) от объема закачанной жидкости для разных режимов закачки. Кривым 1–3 отвечает различный суммарный объем закачанной жидкости, выраженный в долях порового объема: для кривой 1 – 0,0005; 2 – 0,005; 3 – 0,05

Значения параметров: $C^0 = 1$; $C_0 = 0$; $S^0 = 0,8$; $S_0 = 0,2$; $\gamma = 1,5$; $\beta = 1$; $\mu_1/\mu_2 = 0,1$; $Q = 1$; $m = 0,1$; $C_* = 0,5$. Кривым 1–3 отвечает различная скорость нарастания концентрации примеси в оторочке от нулевого до максимального значения.

Рассмотренный пример является достаточно искусственным. Однако он моделирует те случаи, когда амбивалентная ситуация возникает вследствие сложных физико-химических процессов, протекающих в пласте.

Наиболее близкий пример – щелочное заводнение, когда активная примесь генерируется в пласте при взаимодействии щелочи с жирными кислотами нефти и имеется выраженный оптимум концентрации щелочи.

Последняя ситуация заслуживает особого исследования, однако некоторые из выводов, в частности относительно целесообразности постепенного повышения концентрации реагента в закачиваемой жидкости, могут оказаться применимыми и к ней.

Заключение. Для эффективного построения автомодельных решений задач физико-химической подземной гидромеханики в крупномасштабном приближении развит метод вложения, состоящий в том, что автомодельное решение задачи для гиперболической системы уравнений строится как предел автомодельных решений задачи для параболической системы, включающей малые диссипативные эффекты – диффузию и капиллярный транспорт.

Исследована роль диссипативных эффектов в поведении решений задачи вытеснения. Показано, что в особых случаях влияние диссипативных эффектов – капиллярных и диффузионных – сохраняется даже при формальном преобладании конвективного переноса. Результаты могут найти применение в теории методов повышения нефтеотдачи и в задачах экологии грунтовых вод.

Авторы признательны А.А. Бармину за полезное обсуждение и конструктивную критику.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00748) и проекта МНТЦ 714.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
2. *Ентов В.М., Зазовский А.Ф.* Гидродинамика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Недра, 1989. 232 с.
3. *Басниев К.С., Бедриковецкий П.Г.* Многофазное вытеснение смешивающихся жидкостей из пористых сред // *Итоги науки и техники. Сер. Комплексные и специальные разделы механики.* М.: ВИНТИ, 1988. Т. 3. С. 81–162.
4. *Брагинская Г.С., Ентов В.М.* О неізотермическом вытеснении нефти раствором активной примеси: Препринт № 112. М.: ИПМ АН СССР, 1978. 60 с.
5. *Брагинская Г.С., Ентов В.М.* О неізотермическом вытеснении нефти раствором активной примеси // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1980. № 6. С. 99–107.
6. *Брагинская Г.С.* О структуре фронта довытеснения нефти раствором активной примеси в неізотермических условиях // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1982. № 1. С. 176–180.
7. *Гельфанд И.М.* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // *Успехи мат. наук.* 1959. Т. 14. Вып. 2. С. 87–158.
8. *Kulikovskiy A.G.* On the discontinuous solutions in mechanics of continuous media // *Theoretical and Applied Mechanics: Proc. 14th IUTAM Congress, Delft. Amsterdam etc.: North-Holland, 1977. P. 407–421.*
9. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
10. *Ентов В.М., Керимов З.А.* О вытеснении нефти раствором активной примеси, немонотонно влияющей на функцию распределения потоков // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1986. № 1. С. 76–82.
11. *Entov V.M.* Dissipative effects in chemical flooding // *Proc. Intern. Conf. "Flow Through Porous Media: Fundamentals and Reservoir Engineering Applications". Moscow, Inst. Probl. Mech. Russ. Acad. Sci. 1992. P. 22–25.*
12. *Годунов С.К.* О понятии обобщенного решения // *ДАН СССР.* 1960. Т. 134. № 6. С. 1279–1282.
13. *Куликовский А.Г.* О возможном влиянии колебаний в структуре разрыва на множество допустимых разрывов // *ДАН СССР.* 1984. Т. 275. № 6. С. 1349–1352.
14. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. *Московский Лицей.* М., 1998. 412 с.
15. *Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.VII.1998