

УДК 532.516.5:532.69

© 2000 г. С.В. СМЕТАНИН, Г.Р. ШРАГЕР, В.А. ЯКУТЕНОК

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СЛИЯНИЯ КАПЕЛЬ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрен процесс слияния двух одинаковых капель вязкой жидкости в невесомости под действием сил поверхностного натяжения. Течение внутри капель описывается уравнениями Навье – Стокса и Пуассона для давления. На свободной поверхности жидкости, граничащей с неподвижной средой, используются динамическое и кинематическое условия. Задача решена конечно-разностным методом. Проведено исследование слияния капель с последующими колебаниями образующейся капли. Полученные результаты сопоставлены с известными данными.

В химической технологии, порошковой металлургии, гидрометеорологии широко применяются жидкости в капельном состоянии. Дальнейший прогресс в этих областях сдерживается отсутствием достаточно глубоких представлений о поведении капель в различных условиях. Традиционное представление о капле, как о жидкой сфере, оказывается недостаточным, в связи с чем актуальным является изучение процессов, происходящих в капле, в широком диапазоне изменения определяющих параметров.

Сложность задачи заключается в решении нелинейной системы уравнений Навье – Стокса при нетривиальных граничных условиях. С другой стороны, далеко непросто изучить этот процесс экспериментально, так как отсутствуют способы измерения поля скорости и давления внутри капель для получения полной картины явления.

1. Рассматривается процесс слияния двух одинаковых капель вязкой несжимаемой жидкости в невесомости под действием сил поверхностного натяжения с учетом инерционных эффектов в предположении, что течение имеет осевую симметрию. В начальный момент времени капли имеют сферическую форму, за исключением окрестности контактного перешейка, которая является поверхностью вращения дуги соприкасающейся с каплями окружности с заданным радиусом.

Используется сферическая система координат, связанная с каплями так, что ее начало находится в центре масс, а полярная ось направлена по оси симметрии. Течение описывается полными уравнениями Навье – Стокса, которые в безразмерном виде представляются как

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} +$$

$$+ \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - v_\theta \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} +$$

$$+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (1.2)$$

Здесь r – радиальная координата; θ – полярный угол; v_r, v_θ – компоненты скорости; p – давление.

Безразмерный параметр, играющий роль числа Рейнольдса, определяется как

$$\text{Re} = \frac{\sqrt{d\rho\sigma}}{\mu}$$

где μ – коэффициент динамической вязкости; d – диаметр капель; ρ – плотность; σ – коэффициент поверхностного натяжения.

К уравнениям движения присоединяется уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\theta \frac{\text{ctg} \theta}{r} + \frac{2v_r}{r} = 0 \quad (1.3)$$

На свободной поверхности жидкости, граничащей с неподвижной средой, используются условия

$$p_{nn} = \text{Re} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.4)$$

$$p_{ns} = 0 \quad (1.5)$$

Здесь p_{nn}, p_{ns} – нормальное и касательное напряжения на свободной поверхности; R_1, R_2 – радиусы главных кривизн границы капель. Граница капли изменяется в соответствии с кинематическим условием

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad (1.6)$$

где $F(r, \theta, t) \equiv r - \delta(\theta, t) = 0$ – уравнение, описывающее свободную поверхность. На осях симметрии ($\theta = 0, \theta = \pi/2$) используются условия симметрии.

В начальный момент времени капли находятся в состоянии покоя и соединены заданным контактным перешейком. Из уравнений (1.1), (1.2) с учетом (1.3) получается уравнение Пуассона для давления

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{2 \text{Re}}{r} \left[\frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \right. \\ \left. - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - v_\theta \frac{\text{ctg}^2 \theta}{r} \right) - v_r \left(\frac{v_r}{r} - \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta \frac{2 \text{ctg} \theta}{r} \right) \right] \quad (1.7) \end{aligned}$$

Вместо уравнений (1.1) – (1.3) решается система уравнений (1.1), (1.2) и (1.7). Для эквивалентности их решений необходимо выполнение уравнения неразрывности на границах, что обеспечивает соленоидальность поля вектора скорости [1].

Условия (1.4), (1.5) записываются в локальной декартовой системе координат (n, s), связанной со свободной границей капель

$$-p + 2 \frac{\partial v_n}{\partial n} = p_\sigma \text{Re} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} = 0 \quad (1.9)$$

где p_σ – капиллярное давление; v_n, v_s – нормальная и касательная составляющие скорости.

Уравнение неразрывности в системе координат (n, s) на границе капли представляется как

$$\frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \frac{v_n}{r} + \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \frac{v_s}{r} = 0 \quad (1.10)$$

где ϕ – угол между нормалью к границе капли и полярной осью.

С использованием функций $Q = v_s + v_n$, $R = v_s - v_n$ условия (1.9), (1.10) представляются в удобном для последующей разностной аппроксимации виде

$$\frac{\partial Q}{\partial n} + \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \frac{v_n}{r} + \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \frac{v_s}{r} = 0 \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial R}{\partial s} - \frac{\partial R}{\partial n} + \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \frac{v_n}{r} + \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \frac{v_s}{r} = 0 \quad (1.12)$$

С целью построения регулярной разностной сетки проводится преобразование координат, которое переводит границу области в окружность единичного радиуса

$$\theta = \theta, \quad \xi = \frac{r}{\delta(\theta, t)}$$

где $\delta(\theta, t)$ – функция, описывающая границу капли. Уравнения (1.1), (1.2), (1.7), (1.11) и (1.12) используются в новых координатах.

2. Поставленная задача решается разностным методом. Расчетная сетка внутри области определяется как

$$\xi_i = ih_\xi, \quad i = 0, \dots, k, \quad h_\xi = \frac{1}{k}, \quad \theta_j = jh_\theta, \quad j = 0, \dots, m, \quad h_\theta = \frac{\pi}{2m}$$

где k, m – количество узлов, а h_ξ, h_θ – шаги по координатам ξ и θ .

Для расчета скоростей из уравнений движения применяются схемы переменных направлений. Давление вычисляется из уравнения Пуассона методом установления, который также основан на схемах переменных направлений. Разностные уравнения на каждом полушаге по времени решаются методом прогонки.

Из уравнений (1.11), (1.12) определяются функции Q и R по схемам бегущего счета [1]. Эти схемы позволяют устойчивым образом вести расчет Q в направлении возрастания индекса j , R – в направлении убывания индекса j .

Общий порядок расчета следующий:

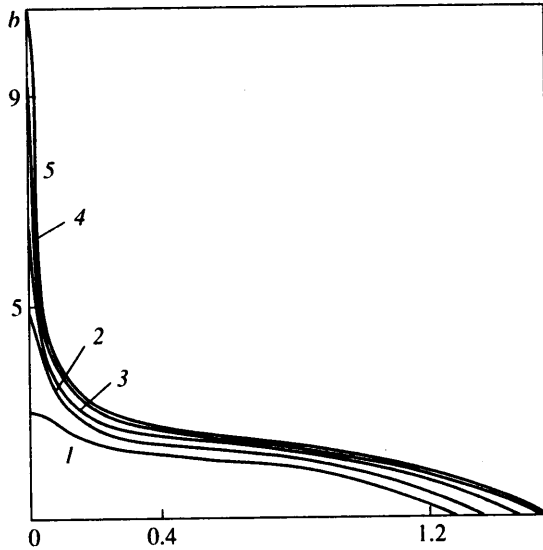
1) из разностных аналогов уравнения Пуассона и уравнения (1.8) рассчитывается давление внутри и на границе расчетной области;

2) с использованием разностных аналогов уравнений движения, а также уравнений (1.11) и (1.12) рассчитываются скорости внутри и на границе области. Для согласования на каждом шаге по времени решения уравнений движения с условиями (1.11), (1.12) организуется итерационный процесс;

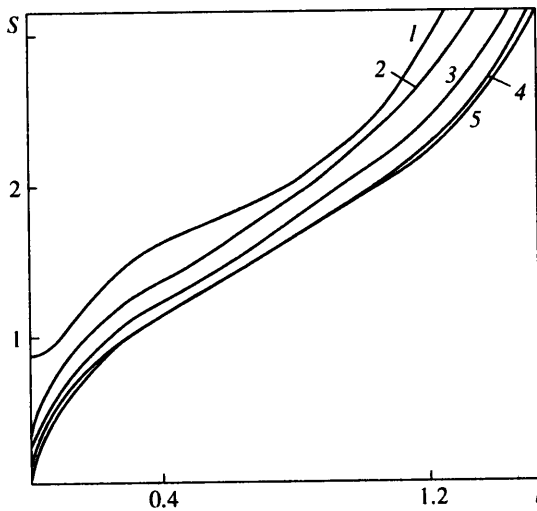
3) из кинематического условия (1.6) находится новая форма капли. Для этого применяется разностная схема с разностями против потока.

3. Согласно существующим скоростным киносъемкам, процесс слияния принято разделять на три этапа [2]. На первом этапе движение жидкости происходит в окрестности контактного перешейка, а в удаленных от него областях течение практически не наблюдается. На втором этапе жидкость приходит в движение в областях, удаленных от контактного перешейка. Первые два этапа заканчиваются в момент достижения сферической формы образующейся капли. На третьем этапе реализуются затухающие колебания вязкой капли.

В начальный момент времени предполагается, что капли соприкасаются друг с другом контактным перешейком, величина которого определяется радиусом соприкасающихся с каплями сфер R_0 . Так как данный параметр является произвольно задаваемым, необходимо выяснить его влияние на процесс слияния. Зависимости от времени отношения продольного и поперечного размеров сливающихся капель ($h =$



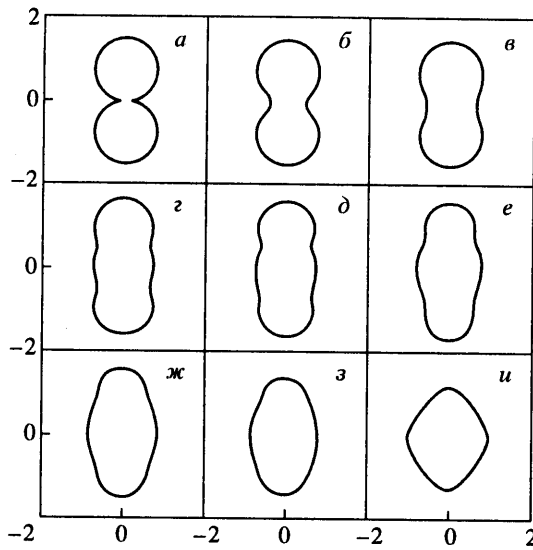
Фиг. 1. Зависимости отношения h от t для $Re = 100$:
 1-5 - $R_0 = 0,5, 0,1, 0,05, 0,02, 0,01$



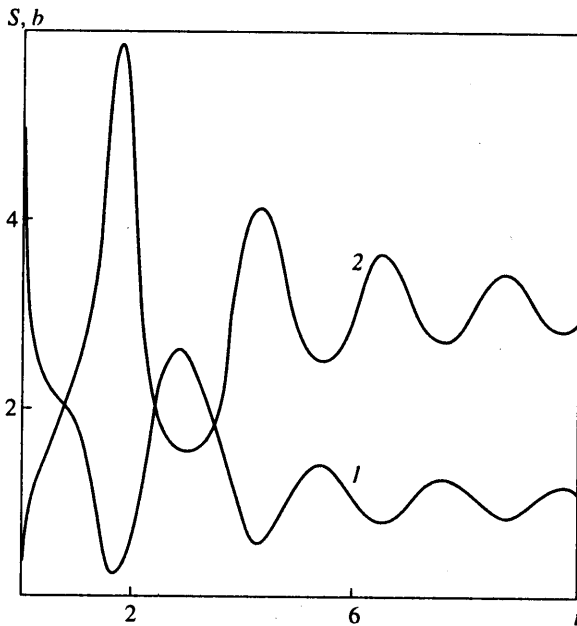
Фиг. 2. Зависимости площади S от t для $Re = 100$,
 обозначения, как на фиг. 1

$= \delta_0/\delta_m$) и площади контактного перешейка S для различных R_0 приведены на фиг. 1 и 2. Следует отметить качественно одинаковое поведение кривых. Количественно же время слияния, под которым понимается время, затраченное на образование сферической формы ($h = 1, S = 3,14$), отличается на 13% для $R_0 = 0,5$ и $0,01$ и на 3% для $R_0 = 0,05$ и $0,01$. В начале процесса слияния скорость формирования контактного перешейка значительно выше, чем в последующем. Как видно из фиг. 2, длительность данного промежутка оценивается $t = 0,1$. Таким образом, подтверждается правомерность разделения процесса на три этапа [2].

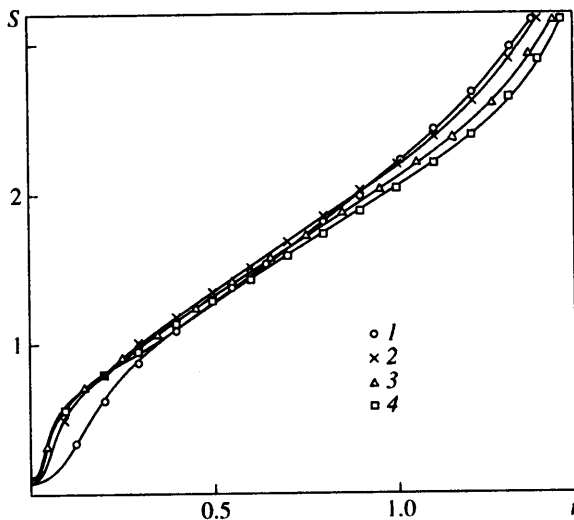
Формы свободной поверхности, которые приобретают сливающиеся капли, от первоначальной до близкой к сферической показаны на фиг. 3. Качественно конфи-



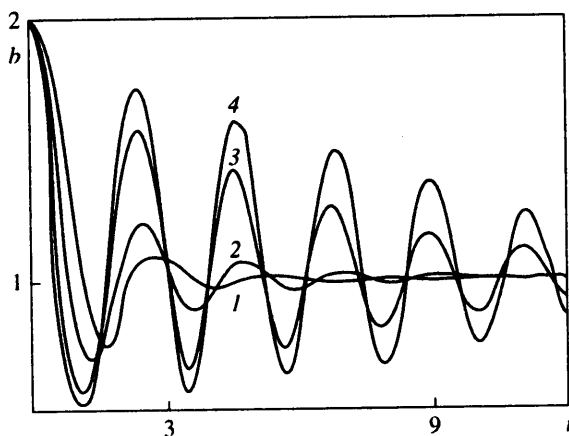
Фиг. 3. Формы свободной поверхности при слиянии двух капель для $Re = 100$, $R_0 = 0,01$: $a - t = 0,073$, $б - 0,292$, $в - 0,511$, $г - 0,73$, $д - 0,876$, $е - 1,022$, $ж - 1,168$, $з - 1,314$, $и - 1,46$



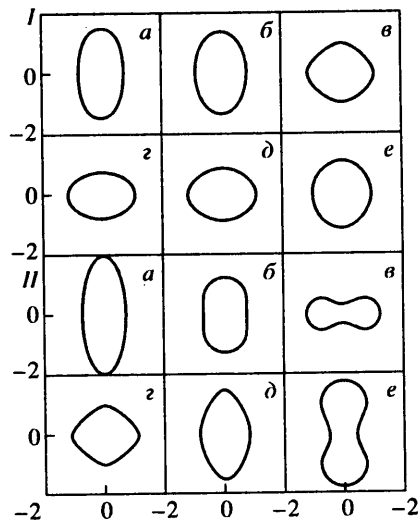
Фиг. 4. Зависимости отношения b (1) и площади S (2) от t в случае затухающих колебаний для $Re = 100$, $R_0 = 0,1$



Фиг. 5. Зависимости площади S от t для $R_0 = 0,1$: 1-4 - $Re = 10, 50, 70, 100$



Фиг. 6



Фиг. 7

Фиг. 6. Зависимости отношения b от t для $h_0 = 2$: 1-4 - $Re = 5, 10, 40, 100$

Фиг. 7. Формы свободной поверхности колеблющейся капли: I - $h_0 = 2, Re = 10, a - t = 0,12, б - 0,6, в - 1,08, з - 1,32, д - 1,8, e - 2,28$ и II - $h_0 = 3, Re = 100, t = 0,159, 0,795, 1,431, 1,749, 2,067, 2,703$

гурации свободной поверхности подобны тем, что наблюдаются при скоростной киносъемке [2]. Количественное сравнение затруднено отсутствием в экспериментальных данных свойств используемой жидкости.

Зависимости b и S от времени на фиг. 4 включают этап затухающих колебаний. Для $Re = 100$ характерна значительная длительность данного процесса, на порядок превышающая время слияния.

Результаты расчетов для различных чисел Рейнольдса показаны на фиг. 5, где из зависимостей площади контактного перешейка S от времени видно, что время слия-

Номер периода	b	b_1	Различие, %
1	1,750	1,783	1,85
2	1,610	1,667	3,42
3	1,500	1,567	4,28

ния слабо зависит от числа Re в рассматриваемом диапазоне, что подтверждается приводимыми ниже результатами исследования нелинейных колебаний капли.

На конечной стадии слияния, после формирования свободной поверхности, близкой к сфере, наблюдаются затухающие колебания под действием сил поверхностного натяжения. Для случая малых колебаний невязкой жидкости имеет место известное решение Рэлея [3]. Начальные возмущения сферической поверхности задаются в виде сферических функций порядка n . В соответствии с этим решением выражение для периода колебаний имеет вид

$$T = 2\pi(n(n-1)(n+1))^{-1/2}$$

Так, для $n = 2$ период $T = 2,221$. На фиг. 6 показаны зависимости отношения b от времени для различных чисел Рейнольдса. Длительность первого периода колебаний возрастает незначительно с уменьшением числа Re . Это является подтверждением сделанного выше вывода о малой зависимости времени слияния от числа Re в диапазоне его изменения от 10 до 100. Кроме того, результаты, представленные на фиг. 6, показывают универсальность решения Рэлея для случая существования периодических колебаний капли (по крайней мере для $Re > 5$) при оценке длительности первого периода колебаний.

Формы свободной поверхности l , которые принимает колеблющаяся капля при начальной деформации $b_0 = 2$ для $Re = 10$, представлены на фиг. 7. В процессе колебаний свободная граница капли всюду выпуклая. При $b_0 = 3$ и $Re = 100$ капля // принимает гантелеобразную форму, которая уже наблюдалась при рассмотрении процесса слияния на фиг. 3.

В таблице представлено сравнение полученных отношений b с b_1 [4]. Согласование с решением Рэлея и данными [4] подтверждает достоверность результатов.

Заключение. Сформулирована математическая постановка задачи о слиянии двух вязких капель в условиях невесомости, которая решена конечно-разностным методом. Получены зависимости от времени отношения продольного и поперечного размеров сливающихся капель и площади контактного перешейка для соприкасающейся с каплями сферы различных радиусов и чисел Рейнольдса. Оценено время слияния капель и сделан вывод о слабой зависимости от числа Re . Подтверждена правомерность разделения процесса слияния на три этапа. Приведены формы свободной поверхности, которые приобретают сливающиеся капли, от первоначальной до близкой к сферической. Для процесса затухающих колебаний получены зависимости от времени отношения полуосей эллипсоида при различных числах Re и формы капли в случаях отсутствия и наличия гантелеобразных конфигураций свободной поверхности. Результаты сопоставлены с известными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васенин И.М., Сидонский О.Б., Шрагер Г.Р. Численное решение задачи о движении вязкой жидкости со свободной поверхностью // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. № 2. С. 295–298.
2. Гегузин Я.Е. Слияние вязких сфер под влиянием сил поверхностного натяжения // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 5. С. 1051–1054.
3. Рэлей Д. Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1944. 476 с.
4. Basaran O.A. Nonlinear oscillations of viscous liquid drops // J. Fluid Mech. 1992. V. 241. 169–198.