

УДК 532.516.013.4: 536.25

© 2000 г. В.Е. ЗАХВАТАЕВ

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ МЕЖФАЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ

Как показывают расчеты [1], изменения внутренней энергии межфазной поверхности, обусловленные локальными приращениями ее площади, для жидкостей с достаточно малой вязкостью могут существенно воздействовать на эволюцию полей температуры и скоростей. В настоящей работе рассматривается возможное влияние этого теоретически предсказанного явления на линейную и слабонелинейную длинноволновую устойчивость плоской границы раздела вязких жидкостей в случае, когда основное состояние изотермично. В рассматриваемом приближении эффект носит дисперсионный характер, способствуя изменению фазовой скорости волн и ламинаризации динамики на нелинейной стадии развития возмущений.

Специфика явлений, происходящих на границе раздела фаз, связана с существованием в межфазном переходном слое избыточных по отношению к объемным фазам энергии и энтропии поверхностной фазы [2]. Однако энергообмен между объемными и поверхностной фазами во многих отношениях изучен недостаточно, что объясняется прежде всего трудностями опытного исследования. В частности, для обычных жидкостей при комнатных температурах влияние изменений внутренней энергии межфазной поверхности на формирование потоков тепла, полей температуры и скоростей в ее окрестности незначительно по отношению к вязкому трению [3], и этот класс задач остается без внимания большинства исследователей. Сравнительно недавно было рассчитано [1], что если используются жидкости с достаточно малой вязкостью, эффекты, связанные с теплотой образования межфазной поверхности, в принципе могут оказывать существенное воздействие на динамику. В настоящей работе рассматриваются некоторые возможные явления, обусловленные влиянием теплоты, поглощаемой или выделяющейся при локальных изменениях площади межфазной поверхности, на формирование напряжений Марангони и волновых режимов на границе раздела.

1. Условия реализуемости рассматриваемого механизма. Свойства вещества в межфазных переходных слоях могут существенно отличаться от его свойств в объемных фазах [2]; в соответствии с методом избыточных величин Гиббса все изменения термодинамических величин в межфазном переходном слое относительно объемных фаз можно относить к условной геометрической разделяющей поверхности, характеризуемой избыточными термодинамическими параметрами.

Избыточная внутренняя энергия межфазной поверхности (поверхностная внутренняя энергия) для индивидуальных веществ характеризуется соотношениями [2, 4]

$$u^s = \sigma + q^s, \quad q^s = \theta s^s \quad (1.1)$$

где u^s , σ , s^s , q^s – соответственно внутренняя энергия, свободная энергия, энтропия и

скрытая теплота образования единицы площади межфазной поверхности, θ – абсолютная температура. Характер упорядоченности атомов и молекул поверхностной фазы и объемной фазы, как правило, качественно различен; энтропийная составляющая обычно вносит значительный вклад во внутреннюю энергию межфазной поверхности (для многих индивидуальных органических веществ на границе с воздухом значение q^s составляет около половины значений u^s) [4]. Величина q^s выражается через непосредственно измеряемые на опыте величины с помощью соотношения

$$q^s = -\theta \frac{d\sigma}{d\theta} \quad (1.2)$$

(зависимостью σ от давления пренебрегаем).

Обе энергетические характеристики межфазной поверхности – поверхностная энергия $\sigma\Sigma$ и теплота образования поверхности $q^s\Sigma$ (Σ – площадь поверхности) – могут быть связаны прямо или косвенно с движением жидкости в окрестности границы раздела.

Локальные изменения свободной энергии единицы площади поверхности раздела (обычно отождествляемой с коэффициентом межфазного натяжения для чистых жидкостей) приводят к возникновению тангенциальных напряжений на межфазной границе и движению поверхностной фазы по направлению к областям, где поверхностная плотность свободной энергии выше. Это может порождать конвективное движение вблизи поверхности посредством различных механизмов развития возмущений. Так, классическая неустойчивость Марангони [5, 6] возникает благодаря самопроизвольному усилению флуктуаций межфазного натяжения за счет согласованного конвективного переноса энергии из объемных фаз к межфазной поверхности при наличии поперечных градиентов температуры или концентрации примеси, внешних воздействий, поддерживающих систему в неравновесном состоянии. Межфазную конвекцию может вызвать также неустойчивость термокапиллярного течения, индуцируемого перепадом температуры вдоль границы раздела, наложенным извне, однако в этом случае соответствующий механизм эволюции возмущений межфазной поверхности является по своей природе гидродинамическим; напряжения Марангони здесь являются фактором, порождающим лишь основное течение жидкости [6].

В принципе источником перепадов температуры вдоль межфазной поверхности может служить также энергообмен между объемными и поверхностной фазами. В частности, известен механизм формирования напряжений Марангони [3], качественно отличный от упомянутых выше, суть которого состоит в том, что градиенты температуры вдоль поверхности раздела могут возникать и поддерживаться вследствие локальных приращений внутренней энергии межфазной поверхности. Изменения поверхностной внутренней энергии индуцируют изменения потоков тепла через поверхность раздела в соответствии с балансом энергии в окрестности границы раздела [7, 8]

$$\frac{\partial u^s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla u^s + (u^s - \sigma) \nabla_s \mathbf{v} + (\mathbf{J}_{q2} - \mathbf{J}_{q1}) \mathbf{n} = 0 \quad (1.3)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности раздела двух жидкостей 1 и 2, \mathbf{v} – поле скоростей, которое предполагается непрерывным на межфазной границе, \mathbf{J}_{qj} – поток тепла в области, занимаемой жидкостью j , $\nabla_s = (\mathbf{U} - \mathbf{n} \times \mathbf{n}) \nabla$ – оператор поверхностного градиента, \mathbf{U} – единичный тензор, символ \times обозначает внешнее произведение двух тензоров.

Для многих чистых жидкостей поверхностная плотность внутренней энергии u^s с хорошей точностью постоянна в широких интервалах изменения температуры [2]. В

этом случае условие энергообмена через межфазную поверхность (1.3) можно с учетом соотношений (1.1) и (1.2) записать в виде

$$q^s \nabla_s \mathbf{v} = -\theta \frac{d\sigma}{d\theta} \nabla_s \mathbf{v} = (k_2 \nabla \theta_2 - k_1 \nabla \theta_1) \mathbf{n} \quad (1.4)$$

Здесь для потоков тепла принят закон Фурье, k_j , θ_j – теплопроводности и поля температур фаз.

В силу [9]

$$\frac{d}{dt} d\Sigma = d\Sigma \nabla_s \mathbf{v}$$

где $d\Sigma$ – элемент площади границы раздела, из (1.4) следует, что приращения внутренней энергии межфазной поверхности, сопряженные с затратами или высвобождением тепловой энергии, в рассматриваемом случае целиком обусловлены локальными изменениями ее площади.

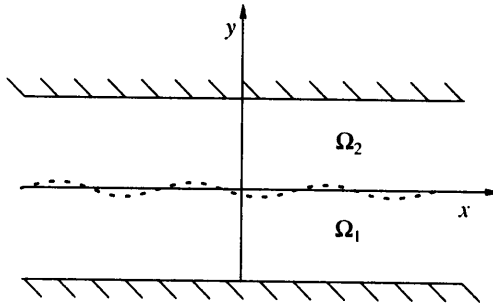
Хотя описанный выше механизм возможен в принципе, в большинстве исследований термокапиллярных явлений эффекты, связанные с локальными изменениями поверхностной внутренней энергии, считаются незначительными. Пусть d , U , Θ – характерные пространственный масштаб, значения скорости и температуры в системе, μ , k – вязкость и теплопроводность. Из (1.4) характерный перепад температуры вследствие локальных изменений поверхностной внутренней энергии оценивается как $\Delta T = \Theta U (d\sigma/d\theta)/k$. Тогда соответствующая характерная величина напряжений Марангони $T_M = (d\sigma/d\theta)\Delta T/d$. Характерная величина вязких напряжений в объемной фазе есть $T_V = \mu U/d$. Отношение величин T_M и T_V

$$E = \frac{T_M}{T_V} = \frac{\Theta}{\mu k} \left(\frac{d\sigma}{d\theta} \right)^2$$

характеризует значимость напряжений Марангони, порождаемых теплотой, выделяющейся или поглощаемой при локальных приращениях площади межфазной поверхности, для формирования конвективного движения.

Конкретные расчеты, указывающие на значимость рассматриваемых эффектов, были, по-видимому, впервые получены в [1] для задачи о влиянии конвективного переноса внутренней энергии поверхности движущегося пузырька на изменения полей температуры и скоростей в окрестности его границы. В случае малых чисел Рейнольдса и Пекле (определяемых обычным образом по скорости движения пузырька в среде) изменяющиеся при переносе поверхностной энергии градиенты температуры вдоль пузырька могут существенно изменить скорость движения отдельного пузырька, если $E = O(1)$. В исследованиях, в которых рассматривались обычные жидкости при комнатной температуре, изменения скорости за счет приращений поверхностной внутренней энергии оказывались совершенно незначительными [3]. Как показали расчеты [1], проведенные на основании данных о физических параметрах различных жидкостей и поверхностей раздела фаз, значения $E = O(1)$ достигаются для жидкостей с достаточно малой вязкостью, например жидкий CO_2 , или жидкостей при достаточно высоких температурах, включая воду. Для ряда веществ проведенные расчеты показывают, что $E \leq 3$. Максимальное значение E достигается вблизи критической точки. Автору не известны экспериментальные работы, в которых исследовалась бы возможность практического осуществления этого теоретически предсказанного эффекта и его свойства.

Механизм формирования напряжений Марангони через приращения внутренней энергии межфазной поверхности не требует наличия притока в систему извне энергии



Геометрия системы

в тепловой форме. С этим обстоятельством связана одна из важных особенностей рассматриваемого механизма, состоящая в том, что напряжения Марангони в принципе могут формироваться в изотермическом основном состоянии. Эта возможность представляется значимой для лабораторной практики.

В настоящей работе рассматривается возможное влияние изменений внутренней энергии межфазной поверхности, обусловленных локальными приращениями ее площади, на линейную и слабонелинейную длинноволновую устойчивость границы раздела текущих вязких жидкостей в случае, когда основное состояние изотермично. Основное течение является фактором, контролирующим конвективный перенос поверхностной внутренней энергии. Родственная задача для случая, когда межфазная граница является свободной, изучалась в [10].

2. Постановка задачи. Рассмотрим двухслойное течение Пуазейля несмешивающихся несжимаемых жидкостей между плоскими горизонтальными твердыми стенками, вдоль которых поддерживается постоянная температура Θ_s . Ограничимся двумерным случаем. В процессе движения жидкости занимают области $\Omega_1 = \{-d < y < H(x, t), -\infty < x < \infty\}$ и $\Omega_2 = \{H(x, t) < y < d, -\infty < x < \infty\}$, где x и y – прямоугольные декартовы координаты (ось y противоположно направлена ускорению силы тяжести), t – время, d – положительная постоянная (фигура). Условимся обозначать индексами 1 и 2 величины, относящиеся соответственно к области Ω_1 и Ω_2 .

Рассматривая обозначенный выше механизм в его наиболее чистом и простом виде, предположим, что обе жидкости имеют одинаковые постоянные массовые плотности. В этом случае влияние силы тяжести на устойчивость течения несущественно. Система характеризуется следующими постоянными физическими параметрами: ρ – плотность, μ_j – динамические вязкости, k_j – теплопроводности, χ_j – температуропроводности жидкостей. Зависимость коэффициента межфазного натяжения σ от температуры аппроксимируется линейной: $\sigma = \sigma_0 - \kappa(\Theta - \Theta_s)$.

Пусть U_j, V_j – x - и y -компоненты вектора скорости, P'_j – давление, Θ_j – поле температуры в области Ω_j (здесь и далее $j = 1, 2$). Положим $P = P' + \rho gy$, где g – величина ускорения силы тяжести. Эволюцию полей температуры и скоростей описываем следующей системой определяющих уравнений и граничных условий [7, 8].

В области Ω_j

$$\rho(U_{jt} + U_j U_{jx} + V_j U_{jy}) = -P_{jx} + \mu_j(U_{jxx} + U_{jyy})$$

$$\rho(V_{jt} + U_j V_{jx} + V_j V_{jy}) = -P_{jy} + \mu_j(V_{jxx} + V_{jyy})$$

$$U_{jx} + V_{jy} = 0$$

$$\Theta_{jt} + U_j \Theta_{jx} + V_j \Theta_{jy} = \chi_j(\Theta_{jxx} + \Theta_{jyy}) \quad (2.1)$$

$$y = \mp d: \Theta_j = \Theta_s, \quad U_j = 0, \quad V_j = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (2.2)$$

$$y = H(x, t): [U] = 0, [V] = 0, [\Theta] = 0 \quad (2.3)$$

$$-[P] + \frac{2[\mu\{V_y - H_x(U_y + V_x) + H_x^2 U_x\}]}{1 + H_x^2} = \frac{(\sigma_0 - \kappa(\Theta_1 - \Theta_s))H_{xx}}{\sqrt{(1 + H_x^2)^3}} \quad (2.4)$$

$$\frac{[\mu\{2H_x(V_y - U_x) + (1 - H_x^2)(U_y + V_x)\}]}{\sqrt{1 + H_x^2}} = -\kappa(\Theta_{1x} + H_x \Theta_{1y}) \quad (2.5)$$

$$[k(\Theta_y - H_x \Theta_x)] = \frac{-\kappa \Theta_1(-V_{1y} + H_x(U_{1y} + V_{1x}) - H_x^2 U_{1x})}{\sqrt{1 + H_x^2}} \quad (2.6)$$

$$H_t + U_1 H_x = V_1 \quad (2.7)$$

Здесь $[\cdot] \equiv (\cdot)_1 - (\cdot)_2$ – скачок величины на межфазной поверхности.

Условие энергообмена между объемными и поверхностной фазами (2.6) выражает баланс между скачком плотности потока тепла по нормали к границе раздела и изменением поверхностной плотности внутренней энергии. Баланс нормальных и касательных напряжений определяется соотношениями (2.4) и (2.5). Соотношение (2.7) – кинематическое условие непротекания.

Рассмотрим устойчивость изотермического ламинарного плоскопараллельного течения, индуцируемого постоянным градиентом давления вдоль оси x , равным $-F$, $F > 0$, и определяемого решением задачи (2.1)–(2.7):

$$U_{0j} = -\frac{F}{2\mu_j} y^2 - \frac{Fd(m-1)}{2\mu_j(m+1)} y + \frac{Fd^2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad m = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad V_{0j} = 0, \\ P_{0j} = -Fx + \text{const}, \quad \Theta_{0j} = \Theta_s, \quad H_0 = 0 \quad (2.8)$$

Положим

$$U = U_0(0) = \frac{Fd^2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad U_j - U_{0j} = U\psi_{jx}, \quad V_j = -U\psi_{jx}$$

$$P_j - P_{0j} = \rho U^2 p_j, \quad \Theta_j - \Theta_{0j} = -\kappa^{-1} \mu_1 U \theta_j, \quad H = dh$$

$$\frac{x}{d} \rightarrow x, \quad \frac{y}{d} \rightarrow y, \quad \frac{Ut}{d} \rightarrow t$$

Тогда эволюция возмущений основного состояния (2.8) описывается следующей системой:

$$\text{Re}_j(\nabla^2 \psi_{ji} + (u_{0j} + \psi_{jy})\nabla^2 \psi_{jx} - \psi_{jx}(u_{0jyy} + \nabla^2 \psi_{jy})) = \nabla^4 \psi_j \\ \text{Re}_j(\theta_{ji} + u_{0j}\theta_{jx} + \psi_{jy}\theta_{jx} - \psi_{jx}\theta_{jy}) = \nabla^2 \theta_j \quad (2.9)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad u_{0j} = b_j y^2 + a_j y + 1$$

$$a_1 = \frac{1-m}{2}, \quad a_2 = \frac{1-m}{2m}, \quad b_1 = -\frac{m+1}{2}, \quad b_2 = -\frac{m+1}{2m}$$

$$y = \mp 1: \theta_j = 0, \quad \psi_{jy} = 0, \quad \psi_{jx} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (2.10)$$

$$y = h(x, t): [u_0 + \psi_y] = 0, [\psi_x] = 0, [\theta] = 0 \quad (2.11)$$

$$-[m'(\psi_{yxx} + \psi_{yyy})] + \text{Re}_1[\psi_{yx} + u_0 \psi_{yx} + \psi_y \psi_{yx} - u_{0y} \psi_x - \psi_x \psi_{yy}] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2[m' \{-(1-h_x^2)\psi_{yx} - h_x(u_{0y} + \psi_{yy} - \psi_{xx})\}]}{1+h_x^2} - \frac{(We+\theta_1)h_{xx}}{\sqrt{(1+h_x^2)^3}} \right) = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{[m' \{-4h_x\psi_{yx} + (1-h_x^2)(u_{0y} + \psi_{yy} - \psi_{xx})\}]}{\sqrt{1+h_x^2}} = \theta_{1x} + h_x\theta_{1y} \quad (2.13)$$

$$[k'(\theta_y - h_x\theta_x)] = \frac{(E+E'\theta_1)\{(1-h_x^2)\psi_{1yx} + h_x(u_{01y} + \psi_{1yy} - \psi_{1xx})\}}{\sqrt{1+h_x^2}} \quad (2.14)$$

$$h_t + (u_{01} + \psi_{1y})h_x = -\psi_{1x} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \text{Re}_j &= \frac{\rho U d}{\mu_j}; \quad \text{Pe}_j = \frac{U d}{\chi_j}; \quad \text{We} = \frac{\sigma_0}{\mu_1 U}; \quad E = \frac{\kappa^2 \Theta_s}{\mu_1 k_1} \\ E' &= \frac{-\kappa U}{k_1}; \quad m'_j = \frac{\mu_j}{\mu_1}; \quad k'_j = \frac{k_j}{k_1} \end{aligned} \quad (2.16)$$

3. Асимптотический линейный анализ устойчивости. Рассмотрим вопрос об устойчивости определенного выше основного течения относительно длинноволновых возмущений в линейном приближении. Предположим, что вязкости и теплопроводности жидкостей различны: $m = \mu_2/\mu_1 \neq 1$, $k = k_2/k_1 \neq 1$. Аналогичная задача в изотермическом случае была исследована в [12]; ниже используется методика, разработанная в [11, 12].

Рассмотрим возмущения вида нормальных мод

$$(\psi_j, \theta_j) = (\psi_j(y), \theta_j(y)) \exp i\alpha(x - ct)$$

Линеаризация уравнений и граничных условий (2.9)–(2.15) на определенном выше основном состоянии дает задачу на собственные значения, заключающуюся в поиске значений c при фиксированных значениях определяющих параметров (2.16) и волнового числа α , при которых существует нетривиальное решение. Из (2.9) получаем

$$\begin{aligned} \psi_j^{IV} - 2\alpha^2\psi_j'' + \alpha^4\psi_j &= i\alpha \text{Re}_j \{ (u_{0j} - c)(\psi_j' - \alpha^2\psi_j) - u_{0j}'\psi_j \} \\ \theta_j'' - \alpha^2\theta_j &= i\alpha \text{Pe}_j (u_{0j} - c)\theta_j \end{aligned} \quad (3.1)$$

где штрихами обозначаются производные по y .

Из условия (2.15) находим $h = (\psi_1(0)/c^*) \exp i\alpha(x - ct)$, где $c^* = c - 1$. Тогда граничные условия (2.10)–(2.14) принимают вид

$$y = \mp 1: \quad \psi_j = 0, \quad \psi_j' = 0, \quad \theta_j = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (3.2)$$

$$y = 0: \quad \psi_1' - \psi_2' = \frac{\psi_1}{c^*} (a_2 - a_1); \quad \psi_1 = \psi_2; \quad \theta_1 = \theta_2 \quad (3.3)$$

$$m(\psi_2'' - 3\alpha^2\psi_2') - (\psi_1''' - 3\alpha^2\psi_1') = -i\alpha^3 \text{We} \frac{\psi_1}{c^*} \quad (3.4)$$

$$\psi_1'' + \alpha^2\psi_1 - m(\psi_2'' + \alpha^2\psi_2) = i\alpha\theta_1 \quad (3.5)$$

$$\theta_1' - k\theta_2' = i\alpha E \left(\psi_1' + a_1 \frac{\psi_1}{c^*} \right) \quad (3.6)$$

Представим искомые величины ψ_j, θ_j и c в виде рядов по волновому числу α ($\alpha \ll 1$)

$$c = c^{(0)} + \alpha c^{(1)} + O(\alpha^2), \quad \psi_j = \psi_j^{(0)} + \alpha \psi_j^{(1)} + O(\alpha^2), \quad \theta_j = \theta_j^{(0)} + \alpha \theta_j^{(1)} + O(\alpha^2) \quad (3.7)$$

Предположим, что

$$\text{Re}_j = O(1), \quad \text{Pe}_j = O(1), \quad \text{We} = O(\alpha^{-2}), \quad E = O(\alpha^{-1}) \quad (3.8)$$

Обычно коэффициенты межфазного натяжения достаточно велики и третье условие (3.8) часто используется при исследовании задач о гидродинамической устойчивости поверхностей раздела. Четвертое условие (3.8) представляется достаточно жестким, поскольку во всех рассчитанных к настоящему времени случаях величина E невелика и не превышает трех [1]. Следует отметить, однако, что некоторые качественные свойства волновых режимов, индуцируемых длинноволновыми неустойчивостями межфазных поверхностей, могут сохраняться в более широком диапазоне значений определяющих параметров, чем тот, который постулируется при асимптотическом анализе устойчивости [13, 14].

После подстановки (3.7) в (3.1)–(3.6) получим в порядке $O(1)$

$$c^{(0)} = 1 + \frac{2(m-1)^2}{m^2 + 14m + 1} \quad (3.9)$$

$$\theta_1^{(0)} = -\frac{2i\alpha E(m+1)}{(1+k)(m-1)}(y+1), \quad \theta_2^{(0)} = \frac{2i\alpha E(m+1)}{(1+k)(m-1)}(y-1)$$

$$\psi_j^{(0)} = 1 + B_j y + C_j y^2 + D_j y^3 \quad (3.10)$$

$$B_1 = \frac{7+m}{4}, \quad B_2 = \frac{-1-7m}{4m}, \quad C_1 = \frac{1+m}{2}, \quad C_2 = \frac{1+m}{2m}$$

$$D_1 = \frac{-1+m}{4}, \quad D_2 = \frac{-1+m}{4m} \quad (3.11)$$

Отметим, что величины $\psi_j^{(0)}$ и $c^{(0)}$ определяются независимо от $\theta_j^{(0)}$ и формула (3.9) совпадает с формулой (46), полученной в [12].

В следующем порядке $O(\alpha)$ находим

$$c^{(1)} = \frac{2i \text{Re}_1(m-1)^2}{(m^2 + 14m + 1)^2} H(m) - \frac{2\alpha E(m+1)(m-1)^2}{(1+k)(m^2 + 14m + 1)^2} - \frac{i\alpha^2 \text{We}(1+m)}{3(m^2 + 14m + 1)} \quad (3.12)$$

$$H(m) = -h_1(-1) - h_1'(-1) - 7h_2(1) + 3h_2'(1) - 7mh_1(-1) - 3mh_1'(-1) - mh_2(1) + mh_2'(1) \quad (3.13)$$

$$h_1 = -\frac{m^2-1}{1680}y^7 - \frac{(m-1)^2}{480}y^6 - \frac{m^4+18m^3-156m^2-98m-21}{480(m^2+14m+1)}y^5 -$$

$$-\frac{m^3-17m^2-17m+1}{24(m^2+14m+1)}y^4$$

$$h_2 = -\frac{m^2-1}{1680m^2}y^7 - \frac{(m-1)^2}{480m^2}y^6 - \frac{21m^4+98m^3+156m^2-18m-1}{480m^2(m^2+14m+1)}y^5 -$$

$$-\frac{m^3-17m^2-17m+1}{24m(m^2+14m+1)}y^4$$

Величина $H(m)$, определяемая формулой (3.13), положительна и, следовательно, межфазная поверхность неустойчива при любых значениях чисел Рейнольдса, если $m \neq 1$ и $\text{We} < O(\alpha^{-2})$, вследствие различия градиентов скоростей основного течения на межфазной поверхности [12].

Согласно полученным результатам в исследуемой системе эффект, связанный с изменениями внутренней энергии межфазной поверхности, по характеру является дисперсионным. Как видно из (3.12), в рассматриваемом случае этот эффект может про-

являться только при развитии неустойчивости Йи [12], обусловленной вязкостной стратификацией ($m \neq 1$).

4. Слабонелинейная устойчивость. Перейдем к изучению рассматриваемых термокапиллярных эффектов на слабонелинейной стадии эволюции возмущений. При анализе следуем подходу, используемому в [15–17]. В работах [15, 18] исследовалась аналогичная задача в изотермическом случае.

Согласно результатам асимптотического линейного анализа, в диапазоне изменений определяющих параметров (3.8) эволюция длинноволновых возмущений определяется фактором $\exp \{i\alpha(x - c^{(0)}t) - i\alpha^2 c^{(1)}t\}$, где α достаточно мало, $c^{(0)}$ – действительное число. В соответствии с этим положим

$$\xi = \varepsilon(x - c^{(0)}t), \quad \tau = \varepsilon^2 t, \quad h = \varepsilon A(\xi, \tau)$$

$$\psi_j(x, y, t) = \varepsilon \psi_j^{(0)}(\xi, y, \tau) + \varepsilon^2 \psi_j^{(1)}(\xi, y, \tau) + O(\varepsilon^3) \quad (4.1)$$

$$\theta_j(x, y, t) = \varepsilon \theta_j^{(0)}(\xi, y, \tau) + \varepsilon^2 \theta_j^{(1)}(\xi, y, \tau) + O(\varepsilon^3)$$

$$\text{Re}_j = O(1), \quad \text{Pe}_j = O(1), \quad \text{We} = O(\varepsilon^{-2}), \quad E = O(\varepsilon^{-1}) \quad (4.2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Считаем также, что порядок параметра E' , определенного в (2.16), ниже, чем $O(\varepsilon^{-2})$, что не является сколько-нибудь существенным ограничением.

Подстановка (4.1) в (2.9)–(2.15) с учетом (4.2) приводит к последовательности задач в различных порядках по параметру ε . Решение задачи в порядке $O(\varepsilon)$ определяется следующим образом:

$$\psi_j^{(0)}(\xi, y, \tau) = A(\xi, \tau)(\alpha_j + \beta_j y + \gamma_j y^2 + \delta_j y^3)$$

$$\theta_1^{(0)}(\xi, y, \tau) = -A_\xi T(y+1), \quad \theta_2^{(0)}(\xi, y, \tau) = A_\xi T(y-1) \quad (4.3)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = c^{(0)} - 1 = \frac{2(m-1)^2}{m^2 + 14m + 1}$$

$$\beta_j = (c^{(0)} - 1)B_j, \quad \gamma_j = (c^{(0)} - 1)C_j, \quad \delta_j = (c^{(0)} - 1)D_j$$

$$T = (c^{(0)} - 1) \frac{2\varepsilon E(m+1)}{(1+k)(m-1)}$$

величины B_j, C_j, D_j определены формулами (3.11), величина $c^{(0)}$ – соотношением (3.9); решение (4.3) соответствует (3.10).

В следующем порядке $O(\varepsilon^2)$ в уравнениях и граничных условиях появляются величины $A_\xi, A^2, A_{\xi\xi}$ и $A_{\xi\xi\xi}$, поэтому решение задачи в этом порядке ищем в виде

$$\psi_j^{(1)}(\xi, y, \tau) = A_\xi \phi_{1j}(y) + A_{\xi\xi} \phi_{2j}(y) + A_{\xi\xi\xi} \phi_{3j}(y) + A^2 \phi_{4j}(y)$$

После некоторых алгебраических выкладок из кинематического условия (2.15) окончательно находим уравнение на функцию $A(\xi, \tau)$, являющееся необходимым условием разрешимости задачи в рассматриваемом порядке и определяющее эволюцию межфазной поверхности

$$A_\tau + 2QAA_\xi + UA_{\xi\xi} + DA_{\xi\xi\xi} + SA_{\xi\xi\xi\xi} = 0 \quad (4.4)$$

$$U = \phi_{11}(0) = \frac{2 \text{Re}_1(m-1)^2}{(m^2 + 14m + 1)^2} H(m) > 0$$

$$D = \phi_{21}(0) = \frac{2\varepsilon E(m+1)(m-1)^2}{(1+k)(m^2 + 14m + 1)^2}$$

$$S = \phi_{31}(0) = \frac{\varepsilon^2 \text{We}(1+m)}{3(m^2 + 14m + 1)} > 0$$

$$Q = \frac{1}{2}(u_{01,x}(0) + u_{01,y}(0)) + \phi_{41}(0) = \frac{(m-1)(m^2 + 6m - 7)}{4(m^2 + 14m + 1)}$$

величина $H(m)$ определяется формулами (3.13).

Уравнение (4.4) отличается от уравнения, выведенного в [15] для изотермического случая, наличием только слагаемого с третьей производной, появление которого обусловлено исследуемыми термокапиллярными эффектами.

Линеаризуя уравнение (4.4) на основном состоянии $A = 0$, имеем дисперсионное соотношение (для гармоник вида $\exp(i\omega t + ikx)$)

$$\omega = Uk^2 + iDk^3 - Sk^4 \quad (4.5)$$

которое, как и следовало ожидать, полностью соответствует (3.12). Таким образом, в рассматриваемом приближении эффект приращения поверхностной внутренней энергии имеет чисто дисперсионный характер.

Остановимся кратко на том, какое влияние на динамику межфазной поверхности могут оказать исследуемые эффекты. Из (4.5) видно, что в случае малых отклонений от основного состояния гармоники с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ больше критической $\lambda_c = 2\pi\sqrt{S/U}$ экспоненциально нарастают; длина волны, соответствующая максимальному инкременту неустойчивости, равна $\lambda_m = \sqrt{2}\lambda_c$. С другой стороны, энергетическое уравнение для L -периодических решений уравнения (4.4) имеет вид

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L A^2 dx = \int_0^L (U(A_x)^2 - S(A_{xx})^2) dx \quad (4.6)$$

С помощью неравенства Пуанкаре можно получить следующую оценку [15]:

$$\frac{4S\pi^2}{UL^2} = \min \left\{ \left(\int_0^L S(A_{xx})^2 dx \right) \left(\int_0^L U(A_x)^2 dx \right)^{-1} \right\} \quad (4.7)$$

Здесь минимум берется по всем L -периодическим функциям. Из (4.6) и (4.7) вытекает, что области линейной и глобальной устойчивости совпадают.

Наблюдаемые в численных расчетах нестационарные режимы, описываемые уравнением (4.4), ограничены и весьма многообразны. Механизм стабилизации роста длинноволновых возмущений заключается в последовательном переносе энергии квадратично-нелинейным взаимодействием мод от неустойчивых длинноволновых гармоник к устойчивым коротковолновым. Важным параметром, определяющим конкретный характер динамики, является (конечное) число линейно неустойчивых фурье-компонент. В случае периодических граничных условий $A(t, 0) = A(t, L)$ удобно использовать бифуркационный параметр $\gamma = (L/2\pi)\sqrt{U/S} > 0$. При $\gamma < 1$ состояние $A \equiv 0$ является линейно и глобально устойчивым (см. (4.5) – (4.7)). Вместе с тем, единственным установившимся состоянием в классе периодических функций при $\gamma < 1$ может быть только $A \equiv 0$ [19]. С возрастанием значения γ растет число неустойчивых фурье-компонент, что приводит к последовательному усложнению динамики.

При $D = 0$ в случае периодических граничных условий по мере роста бифуркационного параметра γ наблюдаются удивительно разнообразные регулярные типы динамики, перемежаемые областями нерегулярного поведения, при достаточно больших значениях γ устанавливаются неупорядоченные осцилляции во времени с элементами пространственной когерентности [19–21]. Для значений γ таких, что поведение решений уравнения (4.4) при $D = 0$ носит нерегулярный характер, по мере роста величины D появляются элементы упорядоченности. При достаточно больших зна-

чениях коэффициента D после переходного процесса формируется цепочка уединенных волн с приблизительно одинаковыми профилями и расстояниями между соседними экстремумами, движущихся как единое целое; амплитуда этих импульсов растет вместе с величиной D [22, 23]. Численные расчеты, проведенные методом Галеркина в случае периодических граничных условий, когда величина параметра γ достаточно мала, так что уравнение (4.4) при $D = 0$ имеет регулярные периодические решения, показывают, что дисперсионные эффекты существенно расширяют многообразие регулярных предельных режимов [10].

Заключение. Проведенный анализ обнаруживает, что напряжения Марангони, формирующиеся вследствие локальных приращений внутренней энергии межфазной поверхности, могут существенно воздействовать на развитие неустойчивости Ии [12] двухслойного течения Пуазейля, обусловленной вязкостной стратификацией. Градиенты сил межфазного натяжения, возникающие под влиянием теплоты, поглощаемой или выделяющейся при локальных изменениях площади межфазной поверхности, могут, в частности, индуцировать регуляризацию слабонелинейной динамики возмущений, формирование волновых режимов типа последовательности импульсов и изменение фазовой скорости волн. Эти результаты соответствуют полученным в [10] при исследовании устойчивости пленочного течения тонкого слоя жидкости по твердой стенке. Область применимости проведенного асимптотического анализа устойчивости существенно ограничена условием использования жидкостей с достаточно малой вязкостью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00738) и Красноярского краевого фонда науки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Torres F.E., Helberzheimer E. Temperature gradients and drag effects produced by convection of interfacial internal energy around bubbles // *Phys. Fluids*. A. 1993. V. 5. № 3. P. 537–549.
2. Адамсон А. Физическая химия поверхностей. М.: Мир, 1979. 568 с.
3. Harper J.F., Moore D.W., Pearson J.R.A. The effect of the variation of surface tension with temperature on the motion of bubbles and drops // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 27. Pt. 2. P. 361–366.
4. Фролов Ю.Г. Курс коллоидной химии. Поверхностные явления и дисперсные системы. М.: Химия, 1988. 464 с.
5. Pearson J.R.A. On convective cells induced by surface tension // *J. Fluid Mech.* 1958. V. 4. Pt 5. P. 489–500.
6. Davis S.H. Thermocapillary instabilities // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1987. V. 19. P. 403–435.
7. Bedeaux D., Albano A.M., Mazur P. Boundary conditions and nonequilibrium thermodynamics // *Physica*. A. 1976. V. 82. № 3. P. 438–462.
8. Пухначев В.В. Движение вязкой жидкости со свободными границами. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1989. 96 с.
9. Stone H.A. A simple derivation of the time-dependent convective-diffusion equation for surfactant transport along a deforming interface // *Phys. Fluids*. A. 1990. V. 2. № 1. P. 111–112.
10. Захватяев В.Е. О возможном влиянии изменения внутренней энергии свободной поверхности тонкого слоя жидкости на его волновое течение // *ПМТФ*. 1999. Т. 40. № 1. С. 10–21.
11. Yih C.-S. Stability of liquid flow down an inclined plane // *Phys. Fluids*. 1963. V. 6. № 3. P. 321–334.
12. Yih C.-S. Instability due to viscosity stratification // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 27. Pt 2. P. 337–352.
13. Liu J., Paul J.D., Gollub J.P. Measurements of the primary instabilities of film flows // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 250. P. 69–101.
14. Chang H.-C. Wave evolution on a falling film // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1994. V. 26. P. 103–136.
15. Hooper A.P., Grimshaw R. Nonlinear instability at the interface between two viscous fluids // *Phys. Fluids*. 1985. V. 28. № 1. P. 37–45.
16. Hooper A.P. Long-wave instability at the interface between two viscous fluids: Thin layer effects // *Phys. Fluids*. 1985. V. 28. № 6. P. 1613–1618.

17. *Charru F., Fabre J.* Long waves at the interface between two viscous fluids // *Phys. Fluids*. 1994. V. 6. № 3. P. 1223–1235.
18. *Shlang T., Sivashinsky G.I., Babchin A.J., Frenkel A.L.* Irregular wavy flow due to viscous stratification // *J. Physique*. 1985. V. 46. № 6. P. 863–866.
19. *Kevrekidis I.G., Nicolaenko B., Scovel J.C.* Back in the saddle again: a computer assisted study of the Kuramoto – Sivashinsky equation // *SIAM J. Appl. Math.* 1990. V. 50. № 3. P. 760–790.
20. *Hyman J.M., Nicolaenko B.* The Kuramoto – Sivashinsky equation: a bridge between PDE's and dynamical systems // *Physica. D*. 1986. V. 18. № 1–3. P. 113–126.
21. *Hyman J.M., Nicolaenko B., Zaleski S.* Order and complexity in the Kuramoto – Sivashinsky model of weakly turbulent interfaces // *Physica. D*. 1986. V. 23. № 1–3. P. 265–292.
22. *Kawahara T.* Formation of saturated solutions in a nonlinear dispersive system with instability and dissipation // *Phys. Rev. Lett.* 1983. V. 51. № 5. P. 381–383.
23. *Oron A., Edwards D.A.* Stability of a falling liquid film in the presence of interfacial viscous stress // *Phys. Fluids. A*. 1993. V. 5. № 2. P. 506–508.

Красноярск

Поступила в редакцию
7.X.1999