МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 2000

УДК 532.529.5 : 532.591

© 2000 г. Г.Г. ОГАНЯН

О ВЛИЯНИИ МЕЖФАЗНОГО ТЕПЛООБМЕНА НА НЕЛИНЕЙНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

Исследуется воздействие межфазного теплообмена на процесс распространения ударной волны. Выведено нелинейное многоволновое уравнение, которое в предельных случаях отсутствия теплообмена распадается на два классических обобщения уравнений Буссинеска. Рассмотрены квазиизотермический и квазиадиабатический режимы распространения, при которых имеет место достаточно интенсивный теплообмен. Для каждого из этих режимов получены нелинейные уравнения, описывающие распространение волны. Подробно исследовано уравнение, описывающее первый режим. Приведены его точные частные аналитические решения, на основе которых исследованы структуры ударных волн и поведение уединенной волны. Получены формулы зависимости величины интенсивности теплообмена от равновесных параметров смеси.

В реальных газожидкостных смесях основным механизмом диссипации может явиться необратимый межфазный теплообмен. Его главенствующая роль в общем механизме диссипации впервые показана методами численного анализа в [1] при изучении воздействия тепловых эффектов на структуру ударных волн. Большой материал по изучению его влияния на нелинейное распространение волн обобщен в монографиях [2, 3], где систематически изложены результаты многих экспериментальных, аналитических и численных исследований. В [4] изучено воздействие межфазного теплообмена на частотную зависимость фазовой скорости волны и выявлено вполне удовлетворительное совпадение с данными эксперимента [5].

1. Исходные уравнения. Рассматривается монодисперсная бесстолкновительная смесь жидкости с пузырьками калорически совершенного газа. Полагается, что внешние источники тепла, а также процессы дробления, слипания и образования новых пузырьков отсутствуют. Поскольку масса и величины теплоемкостей несущей фазы – жидкости существенно превосходят аналогичные характеристики дисперсной фазы – газовых пузырьков, постольку температура жидкости принимается постоянной. Систему уравнений, описывающую односкоростное одномерное течение смеси и учитывающую эффекты сжимаемости, вязкости и межфазного теплообмена, возьмем в виде [6]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x} \tag{1.1}$$

$$\rho\frac{du}{dt}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1\beta\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right],\quad \mu=\mu_1 \tag{1.2}$$

$$P_2-P=(1-\varphi)\rho_1 R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}(1-\psi)\rho_1\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt} \tag{1.3}$$

$$\frac{\rho_2\beta}{\rho_1(1-\beta)}=\text{const},\quad \rho_2R^3=\text{const},\quad P_2=c_{v\,2}(\gamma-1)\rho_2T_2 \tag{1.4}$$

$$\rho = \rho_1(1-\beta)+\rho_2\beta,\quad P = P_1(1-\beta)+P_2\beta,\quad P_1 = P_1(\rho_1, s_1) \tag{1.5}$$

$$\frac{dP_2}{dt}+3\gamma\frac{P_2}{R}\frac{dR}{dt}+\frac{3(\gamma-1)}{2}\frac{k_2\,\mathrm{Nu}}{R^2}(T_2-T_1)=0,\quad T_1=T_0 \tag{1.6}$$

$$\varphi=\frac{1{,}1\beta^{1/3}-\beta}{1-\beta},\quad \psi=\frac{1{,}47\beta^{1/3}-0{,}33\beta}{1-\beta} \tag{1.7}$$

Здесь t – время, x – пространственная координата, u – скорость частиц смеси, ρ – плотность, P – давление, β – объемное газосодержание, R – радиус пузырька, T – температура, s – энтропия, $\gamma = c_{p\,2}/c_{v\,2}$ – показатель адиабаты, c_p и c_v – удельные теплоемкости, μ и k – коэффициенты вязкости и теплопроводности, Nu – безразмерное число Нуссельта, характеризующее величину интенсивности межфазного теплообмена и тем самым термодинамическое поведение газа в пузырьках. Поправочные коэффициенты φ и ψ учитывают конечность (пусть и малую) объемного газосодержания и характеризуют неодиночность пузырька в смеси. Индексы 1 и 2 отнесены соответственно к параметрам жидкой и газовой фаз. Параметры, характеризующие смесь в целом, индексов не имеют.

Полагается, что в любой момент времени и в каждой точке пространства величины всех параметров рассматриваемой газожидкостной смеси мало отклоняются от соответствующих значений в состоянии покоя, представляющего собой состояние полного термодинамического равновесия. Принимается, что возмущения всех параметров имеют тот же порядок малости, что и массовая скорость частиц смеси. Положим ($i = 1, 2$)

$$u=\varepsilon a_0 u',\quad P=P_0(1+\varepsilon P'),\quad P_i=P_0(1+\varepsilon P_i'),\quad \rho=\rho_0(1+\varepsilon\rho'),\quad \rho_i=\rho_{i0}(1+\varepsilon\rho_i')$$

$$R=R_0(1+\varepsilon R'),\quad T_2=T_0(1+\varepsilon T'),\quad \beta=\beta_0(1+\varepsilon\beta'),\quad s_1=s_{10}(1+\varepsilon s_1') \tag{1.8}$$

Здесь ε – безразмерный малый параметр, a_0 – невозмущенная скорость звука в смеси, штрихи обозначают искомые безразмерные возмущения, индекс 0 – состояние термодинамического равновесия. В предельных случаях термодинамического поведения газа в пузырьках различают [2, 7] изотермическую a_e и адиабатическую a_f скорости звука в смеси, которые в состоянии покоя определяются формулами

$$\frac{1}{a_{e0}^2}=\frac{1-\beta_0}{c_{10}^2}+\frac{\beta_0\rho_0}{P_0},\quad \frac{1}{a_{f0}^2}=\frac{1-\beta_0}{c_{10}^2}+\frac{\beta_0\rho_0}{\gamma P_0},\quad c_{10}^2=\frac{\rho_{10}a_{10}^2}{\rho_0} \tag{1.9}$$

Полагая, что величина коэффициента вязкости является малой величиной, т.е. $|\mu|\sim\varepsilon$, и используя разложения (1.8), в приближении линейной акустики из уравнений неразрывности (1.1) и сохранения импульса (1.2) получаем известные [3, 8] соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t}=\mp a_0\frac{\partial}{\partial x},\quad u'=\pm\rho'=\pm r_0P',\quad r_0=\frac{P_0}{\rho_0a_0^2},\quad r_{10}=\frac{P_0}{\rho_{10}a_{10}^2},\quad a_{e0}\leqslant a_0\leqslant a_{f0} \tag{1.10}$$

В том же приближении из уравнений динамики пульсации пузырька (1.3), состояния и сохранения массы калорически совершенного газа (1.4), определений давления и плотности смеси (1.5), а также скоростей (1.9) будем иметь

$$P'=P_1'=P_2',\quad T'=P'+3R',\quad \rho_2'=-3R',\quad b_0=r_0-(1-\beta_0)r_{10}$$

$$R'=-\frac{b_0}{3\beta_0}P'\equiv-\frac{1}{3\beta_0}\left[r_0\left(1-\frac{a_0^2}{a_{f0}^2}\right)+\frac{\beta_0}{\gamma}\right]P'\equiv-\frac{1}{3\beta_0}\left[r_0\left(1-\frac{a_0^2}{a_{e0}^2}\right)+\beta_0\right]P' \tag{1.11}$$

2. Многоволновое уравнение в приближении Буссинеска. При упрощении системы (1.1)–(1.7) в рассмотрении оставляются слагаемые лишь порядка ε (главные члены) и ε^2 (основные члены). Тем самым эффектами нелинейности выше квадратичной, а также взаимовлияния нелинейности, вязкости и дисперсии будем пренебрегать. Последующая подстановка в нелинейные слагаемые соответствующих значений параметров линейной акустики (1.10)–(1.11) позволяет еще более облегчить исследование. Правомочность таких упрощений системы уравнений обоснована предположением о слабом влиянии перечисленных эффектов на процесс распространения ударной волны малой, но конечной интенсивности.

В дальнейшем штрихи над безразмерными искомыми параметрами опущены.

Подставляя разложения (1.8) в (1.1) и (1.2) и в соответствии с приближением Буссинеска используя соотношения (1.10), скомбинируем полученные уравнения с целью исключения из рассмотрения возмущения массовой скорости. Вне зависимости от направления распространения волны получим

$$\frac{P_0}{\rho_0}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0}\frac{\partial^3\rho}{\partial t\partial x^2}+\left(\frac{P_0}{\rho_0 a_0^2}\right)^2\frac{\partial^2 P^2}{\partial t^2}=0 \qquad (2.1)$$

Подстановка (1.8) в определение (1.5), а также в первое соотношение из (1.4), характеризующее односкоростное течение, и последующее их комбинирование позволяют исключить из рассмотрения избыточное газосодержание. Учитывая (1.11), в рассматриваемом приближении будем иметь

$$\begin{aligned}\rho&=(1-\beta_0)\rho_1+\beta_0\rho_2-\beta_0(1-\beta_0)(\rho_1-\rho_2)^2\\ P&=(1-\beta_0)P_1+\beta_0P_2\end{aligned} \qquad (2.2)$$

В том же приближении из уравнений (1.4) находим

$$\rho_2=-3R+6R^2,\quad P_2=T-3R-3\left(R^2+PR\right) \qquad (2.3)$$

Из уравнения притока тепла для жидкой фазы (1.7) следует, что в рассматриваемом приближении изменения энтропии не происходит: $s_1=0$. Поэтому разложение уравнения состояния жидкости (1.5) в ряд Тейлора в окрестности положения локального термодинамического равновесия (покоя) дает

$$\begin{aligned}P_1&=\frac{1}{r_{10}}\rho_1+(m-1)\frac{1}{r_{10}}\rho_1^2,\\ m&=\frac{1}{a_{10}}\left[\frac{\partial}{\partial\rho_1}(\rho_1a_1)\right]_0\end{aligned} \qquad (2.4)$$

Комбинируя уравнения (2.2)–(2.4), исключим из рассмотрения избыточные парциальные давления и плотности фаз

$$\begin{aligned}\rho&=r_{10}\left[P+3\beta_0\left(1-\frac{1}{r_{10}}\right)R-\beta_0T\right]+\\ &+\left[r_{10}(1-\beta_0)(r_0-mr_{10})-r_{10}b_0\left(\beta_0-\frac{b_0}{3\beta_0}\right)-\frac{1}{3}\frac{b_0^2}{\beta_0}+b_0^2\right]P^2\end{aligned} \qquad (2.5)$$

Полученное соотношение представляет собой нелинейное уравнение состояния для рассматриваемой смеси. В этом же приближении упрощение уравнений притока тепла для газовой фазы (1.6), состояния (1.4) и последующее их комбинирование с использованием соотношений (1.10), (1.11), (2.3) дают

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{T+3(\gamma-1)R+\frac{1}{2}\left[(1-r_0)\left(1-\gamma\frac{b_0}{\beta_0}\right)-1+\frac{2b_0}{\beta_0}-\frac{\gamma+2}{3}\frac{b_0^2}{\beta_0^2}\right]P^2\right\}=$$

$$=-\frac{\gamma}{\nu_T}\left[T+\frac{2}{3}\frac{b_0}{\beta_0}\left(1-\frac{b_0}{\beta_0}\right)P^2\right],\quad \nu_T=\frac{1}{3}\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Nu}}\frac{1}{\omega_r} \tag{2.6}$$

Здесь ω_r в зависимости от термодинамического режима колебания пузырька равна или адиабатической ω_{ar}, или изотермической ω_{ir} резонансной частоте Миннаерта

$$\omega_{ir}^2=\frac{3P_0}{\rho_{10}R_0^2},\quad \omega_{ar}^2=\gamma\omega_{ir}^2,\quad \mathrm{Pe}=\frac{2R_0^2}{\lambda_2}\omega_r,\quad \lambda_2=\frac{k_2}{c_{p_2}\rho_{20}}$$

где Pe – безразмерное число Пекле, λ_2 – коэффициент температуропроводности. Зависимость Pe от числа Nu, входящая в определение коэффициента ν_T, характеризующего интенсивность межфазного теплообмена, получена в [6, 9]

$$\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}=\frac{2\left(\sqrt{\mathrm{Pe}/2}\,\mathrm{cth}\sqrt{\mathrm{Pe}/2}-1\right)}{\mathrm{Pe}-6\left(\sqrt{\mathrm{Pe}/2}\,\mathrm{cth}\sqrt{\mathrm{Pe}/2}-1\right)} \tag{2.7}$$

Упрощая уравнение Рэлея – Лэмба (1.3), исключим посредством (2.3) избыточное давление в газе

$$P+3R-T+\frac{3}{\omega_{ir}^{*2}}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}+\frac{4\mu}{P_0}\frac{\partial R}{\partial t}-\frac{b_0}{\beta_0}\left(1-\frac{b_0}{3\beta_0}\right)P^2=0,\quad \omega_{ir}^{*2}=\frac{\omega_{ir}^2}{1-\varphi_0} \tag{2.8}$$

Левая часть уравнения (2.6) совместно с (2.8) описывает нелинейную связь между избыточным давлением и возмущением радиуса пузырька при чисто адиабатическом режиме, когда $\nu_T\to\infty$ ($\mathrm{Nu}\to 0$). Она в совокупности со вторым соотношением из (2.3) дает нелинейное уравнение состояния для газа, которое можно получить также непосредственно из (1.6) при $\mathrm{Nu}\to 0$. Правая же часть совместно с уравнением (2.8) описывает ту же связь при чисто изотермическом режиме колебаний пузырька, когда $\nu_T\to 0$ ($\mathrm{Nu}\to\infty$).

Уравнения (2.1), (2.5)–(2.8) образуют замкнутую систему и в принятом приближении Буссинеска полностью описывают нелинейное распространение волны давления малой, но конечной интенсивности. Комбинируя эти уравнения, исключим из рассмотрения избыточные функции ρ, R и T. В результате окончательно получим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-a_{e0}^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-\alpha_e\frac{\partial^2 P^2}{\partial t^2}-\delta_e\frac{\partial^3 P}{\partial t\partial x^2}+\nu_e\frac{\partial^3 P}{\partial t^3}+\frac{1}{\omega_{ir}^{*2}}\frac{a_{e0}^2}{c_{10}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-c_{10}^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)=$$

$$=-\nu_T\frac{a_{e0}^2}{a_{f0}^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-a_{f0}^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-\alpha_f\frac{\partial^2 P^2}{\partial t^2}-\delta_f\frac{\partial^3 P}{\partial t\partial x^2}+\nu_f\frac{\partial^3 P}{\partial t^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\omega_{ar}^{*2}}\frac{a_{f0}^2}{c_{10}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-c_{10}^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)\right] \tag{2.9}$$

$$\delta_e=\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0}\left(1+\frac{1}{r_{e0}}\right),\quad \nu_e=\frac{4}{3}\frac{\mu}{P_0}\frac{a_{e0}^2}{c_{10}^2},\quad r_{e0}=\frac{P_0}{\rho_0 a_{e0}^2},\quad r_{f0}=\frac{P_0}{\rho_0 a_{f0}^2}$$

$$\alpha_e=\frac{\beta_0}{r_{e0}}+\frac{(1-\beta_0)a_{e0}^2}{c_{10}^2}mr_{10}-\left(1-\frac{a_{e0}^2}{a_0^2}\right)\left[\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\frac{r_0}{\beta_0}\left(1-\frac{a_{e0}^2}{a_0^2}\right)\right],$$

$$\alpha_f=\frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{\beta_0}{r_{f0}}+\frac{(1-\beta_0)a_{f0}^2}{c_{10}^2}mr_{10}+\frac{1}{2}\left(\frac{a_{f0}^2}{a_0^2}-1\right)\left[\frac{\gamma+2}{\gamma}-r_0-\frac{r_{f0}}{\beta_0}\left(\frac{a_{f0}^2}{a_0^2}-1\right)\right]$$

Коэффициенты δ_f и ν_f те же, что и δ_e и ν_e с заменой a_{e0}, P_0 на a_{f0}, γP_0 соответственно. При чисто изотермическом ($\nu_T \to 0$, $\mathrm{Nu} \to \infty$) режиме нелинейного распространения волны в (2.9) следует оставлять лишь левую часть уравнения, полагая при этом $a_0 = a_{e0}$, а при адиабатическом ($\nu_T \to \infty$, $\mathrm{Nu} \to 0$, $a_0 \equiv a_{f0}$) режиме – его правую часть. В обоих предельных случаях межфазный теплообмен отсутствует, однако в реальных газожидкостных смесях его учет необходим. Подтверждением служат приведенные в [4] расчеты частотной зависимости фазовой скорости, хорошо согласующиеся с данными эксперимента [5].

Наличие в уравнении (2.9) трех разных волновых операторов свидетельствует об иерархии распространения волны [8]. После вхождения звукового сигнала в смесь его высокочастотная часть ($\omega \gg \omega_{ar}$), называемая предвестником [2, 3], независимо от вида режима распространяется со скоростью, почти совпадающей с a_{10}. Следом за ним перемещается со скоростью a_{f0} первая основная часть сигнала, соответствующая частотам $\omega < \omega_{ar}$. Наконец, последней следует со скоростью a_{e0} вторая основная энергосодержащая часть, которой соответствуют низкие частоты ($\omega < \omega_{ir}$).

Для анализа явного воздействия межфазного теплообмена на волновой процесс примем, что сжимаемостью жидкости можно пренебречь ($a_{10} \to \infty$).

3. Квазиизотермический режим. Такой режим распространения волны реализуется в смеси, когда термодинамическое поведение газа в пузырьках отличается, пусть и ненамного, от изотермического. Полагая в (2.9) $a_0 = a_{e0}$, имеем $\alpha_e = 1$, $\alpha_f = \gamma$. Согласно главному волновому оператору, положим $\partial/\partial t \approx -a_{e0}\partial/\partial x$. Факторизуя уравнение обычным образом, выделим эволюционное уравнение, описывающее нелинейное распространение волны вдоль положительного направления оси x. Далее, переходя к сопутствующей системе координат $t = t'$, $x = a_{e0}t + x'$, получим

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{a_{e0}}{2}\frac{\partial P^2}{\partial x}-\frac{\gamma}{\gamma-1}\delta_T\frac{\partial^2 P^2}{\partial x^2}-\delta\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\beta_e\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}-\nu\frac{\partial^4 P}{\partial x^4}=0 \qquad (3.1)$$

$$\delta=\delta_\mu+\delta_T,\quad \delta_\mu=\frac{2}{3}\frac{\mu}{\rho_0\beta_0},\quad \delta_T=\frac{\gamma-1}{2\gamma}\nu_T a_{e0}^2,$$

$$\beta_e=\frac{a_{e0}^3}{2\omega_{ir}^{*2}},\quad \nu=\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{a_{e0}}\beta_e\delta_T$$

Здесь последнее слагаемое ответственно за подкачку энергии к волне, штрихи над координатами опущены и не выписана вторая составляющая β_T коэффициента дисперсии как величина более высокого порядка малости. Однако оставлено второе нелинейное слагаемое, характеризующее взаимовлияние эффектов теплообмена и нелинейности, что возможно для значений $t \sim t_T$, где t – время пробега частицей волновой зоны, $t_T = R_0^2/\lambda_2$ – время тепловой релаксации. Действительно, из сравнения нелинейных членов уравнения (2.9) и учета определения ν_T из (2.6) получаем соотношение

$$P \gtrsim A_0\exp\left(-\frac{3}{4}\frac{t}{t_T}\mathrm{Nu}\right),\quad A_0=\mathrm{const}$$

которое при значениях $\mathrm{Nu} > 1$ может выполняться для волн давления умеренной интенсивности. После введения стационарной координаты $\xi = x - Vt$, где $V = \text{const}$ – скорость ударной волны, и однократного интегрирования уравнение перепишется в виде

$$\nu \frac{d^3P}{d\xi^3} - \beta_e \frac{d^2P}{d\xi^2} + \delta \frac{dP}{d\xi} + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \delta_T P \frac{dP}{d\xi} - \frac{a_{e0}}{2} P^2 + VP = 0 \tag{3.2}$$

Уравнение обладает точными частными аналитическими решениями. Для их нахождения используется метод [10, 11], позволяющий получать преобразования Бэклунда, которые существенно упрощают ход построения решений. Опуская выкладки, приведем их.

1. Если коэффициенты уравнения (3.2) связаны соотношением

$$\beta_e = \left[\frac{25\gamma^2\nu\delta}{(\gamma - 1)(31 - 6\gamma)}\right]^{1/2} \equiv \frac{50\gamma^2}{(\gamma - 1)^2(31 - 6\gamma)} \frac{\delta}{a_{e0}} \delta_T \tag{3.3}$$

то непосредственной подстановкой можно убедиться, что точным решением является выражение

$$P = A\left[1 - \left(1 + e^{-k\xi}\right)^{-2}\right], \quad A = \frac{12}{\gamma} \frac{\gamma - 1}{31 - 6\gamma} \frac{\delta}{a_{e0}} \frac{\beta_e}{\nu} \equiv \frac{6}{\gamma} \frac{(\gamma - 1)^2}{31 - 6\gamma} \frac{\delta}{\delta_T}$$

$$k = \frac{\gamma - 1}{5\gamma} \frac{\beta_e}{\nu} \equiv \frac{(\gamma - 1)^2}{10\gamma} \frac{a_{e0}}{\delta_T}, \quad \xi = x - Vt, \quad V = \frac{a_{e0}}{2} A \tag{3.4}$$

Здесь A – амплитуда ударной волны. Согласно выписанному решению, вдали от фронта $\xi = 0$ имеем асимптотические значения

$$P(\infty) = 0, \quad P(-\infty) = \frac{12}{31 - 6\gamma} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\delta}{a_{e0}} \frac{\beta_e}{\nu}, \quad V = \frac{a_{e0}}{2}\left[P(\infty) + P(-\infty)\right] \tag{3.5}$$

которые определяют равновесные однородные состояния смеси впереди и позади волны. Выясним поведение решения (3.4) за волной. Полагая $P = P(-\infty) + z$, $|z| \ll 1$, для возмущения z получаем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка. Вычисляя, согласно (3.3) и (3.4), дискриминант D соответствующего характеристического уравнения, находим, что $D < 0$, т.е. его корни являются действительными величинами. А это означает, что ударная волна (3.4) имеет монотонную структуру.

Величина числа Нуссельта, характеризующая интенсивность межфазного теплообмена, определится из связи (3.3)

$$\frac{\text{Pe}}{\text{Nu}} = B_0\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{3(31 - 6\gamma)}{100} \frac{1 - \varphi_0}{B_0^2}}\right), \quad B_0 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mu}{R_0} \sqrt{\frac{3}{P_0\rho_{10}}} \tag{3.6}$$

2. Если коэффициенты уравнения (3.2) связаны выражением

$$\beta_e = \left[\frac{25\gamma^2}{(\gamma - 1)(6\gamma + 19)} \nu\delta\right]^{1/2} \equiv \frac{50\gamma^2}{(\gamma - 1)^2(6\gamma + 19)} \frac{\delta}{a_{e0}} \delta_T \tag{3.7}$$

то функция

$$P = -A\left(1 + e^{-k\xi}\right)^{-2}, \quad A = \frac{12}{\gamma} \frac{\gamma - 1}{6\gamma + 19} \frac{\delta}{a_{e0}} \frac{\beta_e}{\nu} \equiv \frac{6}{\gamma} \frac{(\gamma - 1)^2}{6\gamma + 19} \frac{\delta}{\delta_T} \tag{3.8}$$

$$k = \frac{(\gamma - 1)^2}{10\gamma} \frac{a_{e0}}{\delta_T}, \quad V = -\frac{a_{e0}}{2} A$$

также является точным решением уравнения. Из решения следуют асимптотические значения вдали от фронта $\xi = 0$

$$P(\infty) = -\frac{6}{\gamma}\frac{(\gamma-1)^2}{6\gamma+19}\frac{\delta}{\delta_T}, \quad P(-\infty) = 0 \tag{3.9}$$

Очевидно, что в исходной неподвижной системе координат скорость волны равна $a_{e0} - V$, т.е. является дозвуковой. Поэтому малые возмущения, распространяясь со скоростью a_{e0}, обгоняют фронт ударной волны и впереди него устанавливается равновесное однородное состояние смеси, характеризуемое первым параметром из (3.9). Выясним поведение решения (3.8) около этого состояния, когда $P = P(\infty) + z$, $|z| \ll 1$. Как и в случае 1, задача сводится к отысканию корней характеристического уравнения третьей степени. Вычисления с привлечением (3.7) и (3.8) указывают, что $D < 0$, вследствие чего корни оказываются действительными величинами. Поэтому возмущение z не может быть осциллирующей величиной, а это означает, что решение (3.8) является монотонной функцией.

Величина интенсивности теплообмена Nu определится из связи (3.7)

$$\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Nu}} = B_0\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{3(6\gamma+19)}{100}\frac{1-\varphi_0}{B_0^2}}\right) \tag{3.10}$$

Обсудим общие закономерности полученных результатов. Решения (3.4) и (3.8) совместно со связями (3.3) и (3.7) описывают структуры ударных волн, поскольку, удовлетворяя классическому соотношению Рэнкина – Гюгонио, первое из них непрерывным образом соединяет по обе стороны фронта равновесные однородные состояния среды (3.5), а второе – (3.9). Ширины фронтов обеих волн пропорциональны коэффициенту тепловой составляющей диссипации: $l_T = 10\gamma\delta_T/(a_{e0}(\gamma-1)^2)$. Очевидно, что волны с большей амплитудой распространяются с большей скоростью и учет вязкости лишь ненамного увеличивает их значения.

Важно отметить, что в формулах (3.6), (3.10) все параметры отнесены к исходному равновесному состоянию смеси. При $\mu = 0$ формулы являются частными случаями зависимости (2.7). Из их анализа следует, что с увеличением размера R_0 пузырька и объемного газосодержания β_0 значение числа Nu возрастает при фиксированных прочих параметрах смеси, что связано с увеличением общей поверхности контакта газа с жидкостью. При одинаковых равновесных параметрах интенсивность теплообмена в ударной волне сжатия (3.4) превосходит интенсивность теплообмена в волне (3.8). Действительно [6], в стадии сжатия пузырька вследствие его нагрева в жидкость отдается больше тепла, чем принимается пузырьком от жидкости в стадии его расширения.

В таблице для двух смесей с резко различающимися теплопроводящими свойствами приведены некоторые характерные параметры ударных волн (3.4) и (3.8). Видно, что величина тепловой составляющей коэффициента диссипации не только сравнима с составляющей за счет вязкости, но может и превосходить ее на порядок. При фиксированном R_0 с увеличением величины Nu ширина l волны уменьшается и в пределе, когда устанавливается изотермический режим ($\mathrm{Nu} \to \infty$, $\delta_T \to 0$), ее необходимо определять для более мелких пузырьков из решения [10] уравнения Бюргерса – Кортевега – де Вриза. Термодинамическое поведение газового пузырька в (3.8) больше, чем в волне (3.4), отличается от изотермического.

При больших $t \gg \nu_T$ из сравнения нелинейных членов уравнения (2.9) следует, что вторым нелинейным слагаемым в (3.1) можно пренебречь. Тогда уравнение (3.2) примет вид

$$\nu\frac{d^3P}{d\xi^3} - \beta_e\frac{d^2P}{d\xi^2} + \delta\frac{dP}{d\xi} - \frac{a_{e0}}{2}P^2 + VP = 0 \tag{3.11}$$

Решения	$\beta_0 = 0{,}02$ $P_0 = 0{,}1$ МПа $\delta_\mu = 3{,}14 \cdot 10^{-5}$ м²/с	Вода – воздух $\gamma = 1{,}4$; $\lambda_2 = 2{,}15 \cdot 10^{-5}$ м²/с		Вода – гелий $\gamma = 1{,}67$; $\lambda_2 = 1{,}75 \cdot 10^{-4}$ м²/с	
		R_0, 10^{-6} м		R_0, 10^{-6} м	
		1,5	2,15	2,15	17,5
(3.3)	Nu	1,39	1,81	0,26	1,52
	δ_T, 10^{-5} м²/с	3,66	5,78	8,66	81,6
	l, 10^{-5} м	4,74	7,07	4,5	42,4
	V, м/с	2,09	1,72	3,83	2,86
(3.7)	Nu	1,23	1,61	0,18	1,29
	δ_T, 10^{-5} м²/с	4,14	6,5	10,0	92,7
	l, 10^{-5} м	5,07	7,95	5,21	48,2
	V, м/с	–1,63	–1,36	–2,66	–2,06
(3.15)	Nu	1,05	1,39	0,18	1,28
	δ_T, 10^{-5} м²/с	4,84	7,51	10,1	93,7
	l, 10^{-5} м	5,41	8,4	6,77	62,6
	V, м/с	–1,88	–1,6	–2,46	–1,91
(3.12)	Nu	0,96	1,31	0,16	1,19
	δ_T, 10^{-5} м²/с	5,26	7,98	10,9	100,4
	l, 10^{-5} м	4,42	6,7	5,49	50,3
	V, м/с	–2,51	–2,17	–3,34	–2,65

Здесь первое слагаемое, как и в (3.2), ответственно за подкачку энергии к волне, при этом величина ν может быть весьма малой. Уравнение (3.11) также допускает точные частные аналитические решения, при получении которых снова используется метод [10, 11] нахождения преобразований Бэклунда. Опуская выкладки, выпишем окончательные результаты.

Уединенная волна. Если коэффициенты уравнения (3.11) связаны соотношением

$$\beta_e = 4\sqrt{\nu\delta} \equiv \frac{32}{\gamma - 1}\frac{\delta}{a_{e0}}\delta_T$$

то его точным решением является функция

$$P = \frac{15}{a_{e0}}\delta\sqrt{\frac{\delta}{\nu}}\operatorname{ch}^{-2}\left(\frac{k}{2}\xi\right)\left[1 + \operatorname{th}\left(\frac{k}{2}\xi\right)\right] \equiv A\operatorname{ch}^{-2}\left(\frac{k}{2}\xi\right)\left[1 + \operatorname{th}\left(\frac{k}{2}\xi\right)\right]$$

$$A = \frac{15(\gamma - 1)}{8}\frac{\delta}{\delta_T}, \quad k = \sqrt{\frac{\delta}{\nu}}, \quad V = 6\delta\sqrt{\frac{\delta}{\nu}} \equiv \frac{2a_{e0}}{5}A \tag{3.12}$$

Здесь A – амплитуда волны. Ее ширина, в силу принятой связи равная $l = 12\delta/V = 16\delta_T/(a_{e0}(\gamma - 1))$, пропорциональна величине тепловой диссипации. При $\xi \to \pm\infty$ из (3.12) следует $P = 0$. Единственный максимум функции $P(\xi)$ достигается при $\xi = 0$ и равен $(160/9)\delta\sqrt{\delta/\nu} = 32A/27$. Исследуя устойчивость течения, описываемого уравнением (3.1), относительно малых возмущений, положим $P = P_* + z$, $|z| \ll 1$, $P_* = \text{const}$.

Представляя $z \sim \exp[i(\chi x - \omega t)]$, получим зависимость частоты ω от волнового числа χ в виде $\omega = -\beta\chi^3 + i\chi^2(\nu\chi^2 - \delta)$. Очевидно, что при $\chi = \sqrt{\delta/\nu}$ амплитуда волны с течением времени не убывает и не возрастает, что характерно для уединенной волны. Поскольку именно такое значение χ фигурирует в решении (3.12), можно утверждать, что в смеси реализуется уединенная волна, которая, как указано в [10], упруго взаимодействует с другими возмущениями и, следовательно, является солитоном.

Согласно принятой связи между коэффициентами, интенсивность межфазного теплообмена определится из формулы

$$\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Nu}} = B_0\left(-1+\sqrt{1+\frac{9}{16}\frac{\gamma^2}{\gamma-1}\frac{1-\varphi_0}{B_0^2}}\right), \quad B_0 = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{\mu}{R_0}\sqrt{\frac{3}{P_0\rho_{10}}}$$

Очевидно, что с возрастанием β_0 и R_0 величина Nu увеличивается.

Структуры ударных волн. Если коэффициенты в (3.11) подчиняются связи

$$\beta_e = \sqrt{\frac{144}{47}\nu\delta} \equiv \frac{288}{47}\frac{1}{\gamma-1}\frac{\delta}{a_{e0}}\delta_T$$

то точным решением уравнения является функция

$$P = -\frac{120}{47}\frac{\delta}{a_{e0}}\sqrt{\frac{\delta}{47\nu}}\left(1+e^{-k\xi}\right)^{-3} \equiv -A\left(1+e^{-k\xi}\right)^{-3} \tag{3.13}$$

$$A = \frac{5(\gamma-1)}{47}\frac{\delta}{\delta_T}, \quad k = \sqrt{\frac{\delta}{47\nu}}, \quad V = -\frac{60}{47}\delta\sqrt{\frac{\delta}{47\nu}} = -\frac{a_{e0}}{2}A$$

Здесь A – амплитуда волны. Из решения следуют асимптотические равновесные значения

$$P(\infty) = -\frac{5(\gamma-1)}{47}\frac{\delta}{\delta_T}, \quad P(-\infty) = 0, \quad V = \frac{a_{e0}}{2}[P(\infty)+P(-\infty)] \tag{3.14}$$

Ширина ударной волны равна $l = -60\delta/(47V) \equiv 24\delta_T/(a_{e0}(\gamma-1))$. В силу принятой связи величина интенсивности теплообмена определится из формулы

$$\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Nu}} = B_0\left(-1+\sqrt{1+\frac{47}{16}\frac{\gamma^2}{\gamma-1}\frac{1-\varphi_0}{B_0^2}}\right) \tag{3.15}$$

Если коэффициенты в (3.11) связаны соотношением

$$\beta_e = \sqrt{\frac{256}{73}\nu\delta} \equiv \frac{512}{73}\frac{1}{\gamma-1}\frac{\delta}{a_{e0}}\delta_T$$

то точное решение уравнения предстанет в виде

$$P = -\frac{60}{73}\frac{\delta}{a_{e0}}\sqrt{\frac{\delta}{73\nu}}\frac{3+e^{-k\xi}}{\left(1+e^{-k\xi}\right)^3} = -A\frac{3+e^{-k\xi}}{\left(1+e^{-k\xi}\right)^3} \tag{3.16}$$

$$A = \frac{15(\gamma-1)}{584}\frac{\delta}{\delta_T}, \quad k = \sqrt{\frac{\delta}{73\nu}}, \quad V = -\frac{90}{73}\delta\sqrt{\frac{\delta}{73\nu}} \equiv -\frac{3a_{e0}}{2}A$$

Вдали от фронта $\xi = 0$ ударной волны из (3.16) следует

$$P(\infty) = -\frac{45}{584}\frac{\delta}{\delta_T}, \quad P(-\infty) = 0, \quad V = \frac{a_{e0}}{2}\left[P(\infty) + P(-\infty)\right] \tag{3.17}$$

Ширина фронта ударной волны равна

$$l = 90\delta/(73V) \equiv 32\delta_T/\left(a_{e0}(\gamma - 1)\right)$$

Величина интенсивности межфазного теплообмена в силу принятой связи определится из формулы

$$\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Nu}} = B_0\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{73}{256}\frac{9\gamma^2}{\gamma - 1}\frac{1 - \varphi_0}{B_0^2}}\right) \tag{3.18}$$

Обсудим общие закономерности, вытекающие из (3.13)–(3.18). Решения (3.13) и (3.16) описывают структуры ударных волн, поскольку первое из них непрерывным образом соединяет два однородных состояния (3.14) смеси впереди и позади фронта, а второе аналогичным образом соединяет состояния (3.17). Выкладки указывают на отсутствие осцилляций впереди и позади фронтов, т.е. структуры волн монотонны. Вновь подчеркнем, что в формулах (3.15) и (3.18) параметры отнесены к состоянию покоя. С увеличением R_0 и β_0 величина Nu интенсивности межфазного теплообмена возрастает. В таблице приведены численные значения некоторых параметров ударных волн, описываемых решениями (3.13) и (3.16). Влияние теплообмена на величину диссипации, ширину фронта и скорость ударной волны такое же, что в волнах (3.4) и (3.8).

Учет второй нелинейности в уравнении (3.1) приводит к улучшению теплообмена и уменьшению тепловых потерь, а также к увеличению скорости V, что особенно наглядно проявляется при фиксированных R_0 (см. таблицу). Такой учет устраняет возможность возникновения в смеси уединенной волны.

4. Квазиадиабатический режим. Такой режим реализуется в смеси, когда термодинамическое поведение газа в пузырьках отличается, пусть и ненамного, от адиабатического, при котором межфазный теплообмен отсутствует. В уравнении (2.9) положим $a_0 \equiv a_{f0}$ и тогда $\alpha_e = (\gamma + 1)/(3\gamma^2)$, $\alpha_f = (\gamma + 1)/(2\gamma)$. Согласно главному волновому оператору, $\partial/\partial t \approx -a_{f0}\partial/\partial x$. Нелинейное эволюционное уравнение, описывающее распространение волны вдоль положительного направления оси x и записанное через стационарную координату $\xi = x' - Vt'$, предстанет в виде

$$\beta_f\frac{d^3P}{d\xi^3} - \delta\frac{d^2P}{d\xi^2} + \frac{(\gamma+1)a_{f0}}{2\gamma}P\frac{dP}{d\xi} - V\frac{dP}{d\xi} - \frac{\gamma+2}{6\gamma}\frac{1}{\nu_T}P^2 + \chi P = 0$$

$$\beta_f = \frac{a_{f0}^3}{2\omega_{ar}^{*2}}, \quad \delta = \delta_\mu + \delta_T, \quad \delta_\mu = \frac{2}{3}\frac{\mu}{\beta_0\rho_0}, \quad \delta_T = \frac{\gamma}{\nu_T}\frac{\beta_f}{a_{f0}}, \quad \chi = \frac{\gamma - 1}{2}\frac{1}{\nu_T}$$

Данное уравнение без учета второй нелинейности – пятого члена и при $\delta_\mu \gg \delta_T$ получено также в [12] методом коротких волн. Исследование этого уравнения по отысканию точного решения методом [10, 11] показало, что оно существует лишь при $\chi = 0$, т.е. для уравнения Бюргерса – Кортевега – де Вриза, решение которого получено в [10].

Заключение. Волновой процесс в газожидкостной смеси при учете межфазного теплообмена можно описать нелинейным многоволновым уравнением. При квазиизотермическом режиме волны давления умеренной интенсивности описываются уравнением с двумя нелинейностями, а более слабые – с одной. В зависимости от вида связей между коэффициентами уравнения приведены точные частные аналитические решения, описывающие структуры ударных волн и эволюцию уединенной волны. Учет второй нелинейности устраняет возможность реализации в смеси уединенной волны. Величина интенсивности теплообмена, являясь функцией от показателя адиабаты газа, пропорциональна размеру пузырька и вязкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш.* Структура ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 6. С. 30–41.
2. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
3. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 2. М.: Наука, 1987. 360 с.
4. *Оганян Г.Г.* О тепловом механизме затухания волны в газожидкостной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 6. С. 75–83.
5. *Fox F.E., Curley S.R., Larson G.S.* Phase velocity and absorption measurements in water containing air bubbles // J. Acoust. Soc. Amer. 1955. V. 27. № 3. P. 534–539.
6. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
7. *Wijngaarden L., van.* One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles // Annual Rev. Fluid Mech. 1972. V. 4. P. 369–396.
8. *Whitham G.B.* Linear and nonlinear waves. etc.: Wiley, 1974. 636 p. = *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 623 с.
9. *Нигматулин Р.И., Хабеев Н.С.* Декременты затухания колебаний и эффективные коэффициенты теплообмена пузырьков, радиально пульсирующих в жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 6. С. 80–87.
10. *Кудряшов Н.А.* Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 465–470.
11. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painleve property for partial differential equations // J. Math. Phys. 1983. V. 24. № 3. P. 522–526.
12. *Оганян Г.Г.* Об уравнениях нелинейной акустики газожидкостных сред // Изв. АН АрмССР. Механика. 1988. Т. 41. № 3. С. 25–36.

Ереван

Поступила в редакцию
10.XII.1998