

УДК 532.517.3:533.6.011.5

© 2000 г. В.А. БАШКИН, И.В. ЕГОРОВ, М.В. ЕГОРОВА, Д.В. ИВАНОВ

## ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОЕ ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

На основе уравнений Рейнольдса с использованием двухпараметрической дифференциальной модели турбулентности исследовано обтекание кругового цилиндра с изотермической поверхностью при числах Маха  $M_\infty = 2$  и 5 в диапазоне чисел Рейнольдса  $Re = 10^4 - 10^8$ . Определено влияние турбулизации течения на смещение точки отрыва, длину отрывной зоны, снижение максимальной скорости в отрывной зоне и возрастание теплового потока в задней критической точке.

Ламинарное обтекание кругового цилиндра сверхзвуковым потоком совершенного газа в широком диапазоне определяющих параметров задачи исследовано в [1–3] на основе численного анализа двумерных уравнений Навье-Стокса. При этом основное внимание уделялось структуре поля течения в ближнем следе и поведению местных аэродинамических характеристик в кормовой части тела. Согласно этим результатам, с ростом числа Рейнольдса  $Re$  точка отрыва смещается вверх по потоку, длина отрывной зоны увеличивается и только при больших числах  $Re$  ее длина сокращается, что указывает на переходный режим течения. Кроме того, усиливается интенсивность течения в отрывной зоне, где максимальные скорости достигают транс- и сверхзвуковых значений и наблюдается вторичный отрыв и присоединение потока. Все это при больших числах  $Re$  приводит к возрастанию теплового потока в задней критической точке, который соизмерим с его значением в передней критической точке.

При больших числах  $Re$  ламинарное течение становится неустойчивым и наблюдается переход его в турбулентную форму движения, что приводит к изменению структуры поля течения и аэродинамических характеристик. Для изучения таких течений обычно привлекаются уравнения Рейнольдса в приближении Буссинеска для напряжений Рейнольдса с использованием либо алгебраической, либо дифференциальной модели турбулентности.

Двухпараметрическая дифференциальная  $q-\omega$ -модель турбулентности [4] позволила получить удовлетворительные результаты для сверхзвуковых безотрывных и отрывных течений газа при умеренных и больших числах  $Re$  и с приемлемой точностью описать ламинарно-турбулентный переход. Проведенные в [5] тестовые расчеты также подтвердили надежность результатов, определенные на основе этой модели турбулентности.

Цель исследования – показать влияние учета в зависимости от числа  $Re$  турбулизации потока на ламинарно-турбулентный переход, структуру поля течения около кругового цилиндра и распределение его локальных аэродинамических характеристик. Так как использованная модель турбулентности лишь приближенно отражает сложное явление, то в дальнейших исследованиях предполагается провести дополнительное ее тестирование путем сопоставления результатов расчетов с экспериментальными данными по обтеканию кругового цилиндра сверхзвуковым потоком газа.

1. При теоретическом анализе потоков с различными режимами течения все большую роль играет численное моделирование на основе интегрирования осреднен-

ных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса в приближении Буссинеска (уравнения Рейнольдса). Так как система уравнений является незамкнутой, то для ее замыкания используются различные модели турбулентности, как алгебраические, так и дифференциальные [4, 6].

Для численного анализа сверхзвуковых течений сжимаемого газа в [4] разработаны  $q$ - $\omega$ -модели турбулентности ( $q = \sqrt{k}$  и  $\omega = \epsilon/k$ ,  $k$  – кинетическая энергия турбулентных пульсаций,  $\epsilon$  – скорость диссипации энергии турбулентности) с осреднением по Фавру

$$u_i = \langle u_i \rangle + u'' , \quad \langle u_i \rangle = \frac{\langle \rho u_i \rangle}{\langle \rho \rangle} , \quad \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \rho(\mathbf{r}, s) ds$$

Здесь  $\rho$  – плотность газа;  $u_i$  – компоненты вектора скорости  $\mathbf{V}$ ,  $T$  – временной интервал, на котором проводится осреднение.

Осреднение по Фавру, а также некоторые другие отличительные особенности  $q$ - $\omega$ -модели турбулентности позволили значительно повысить устойчивость численного решения задачи в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Уравнения Рейнольдса в произвольной криволинейной системе координат  $\xi, \eta$ , где  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$  – декартовы координаты, записываются в дивергентной форме

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} = \mathbf{B}$$

Здесь  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{B}$  – векторы консервативных зависимых переменных задачи, потоков в криволинейной системе координат, источника. Они связаны с соответствующими векторами  $\mathbf{Q}_c$ ,  $\mathbf{E}_c$ ,  $\mathbf{G}_c$  и  $\mathbf{B}_c$  в декартовой системе координат по формулам

$$\mathbf{Q} = J \mathbf{Q}_c , \quad \mathbf{E} = J \left( \mathbf{E}_c \frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathbf{G}_c \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) , \quad \mathbf{G} = J \left( \mathbf{E}_c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \mathbf{G}_c \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) , \quad \mathbf{B} = J \mathbf{B}_c$$

Здесь  $J = \partial(x, y) / \partial(\xi, \eta)$  – якобиан преобразования.

Декартовы компоненты векторов  $\mathbf{Q}_c$ ,  $\mathbf{E}_c$ ,  $\mathbf{G}_c$  и  $\mathbf{B}_c$  для двумерных уравнений Рейнольдса имеют вид

$$\mathbf{Q}_c = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho(e + q^2) \\ \rho q \\ \rho \omega \end{pmatrix} , \quad \mathbf{E}_c = \begin{pmatrix} \rho u^2 + p + \frac{2}{3} \rho q^2 + \tau_{xx} \\ \rho uv + \tau_{xy} \\ \rho u H + \frac{5}{3} \rho u q^2 + I_x \\ \rho u q + I_x^q \\ \rho u \omega + I_x^\omega \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}_c = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv + \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p + \frac{2}{3} \rho q^2 + \tau_{yy} \\ \rho v H + \frac{5}{3} \rho v q^2 + I_y \\ \rho v q + I_y^q \\ \rho v \omega + I_y^\omega \end{pmatrix} , \quad \mathbf{B}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_1 \rho \omega q \\ h_2 \rho \omega^2 \end{pmatrix}$$

Здесь  $u, v$  – декартовы компоненты вектора скорости  $\mathbf{V}$ ;  $p$  – давление;  $e = h - p/\rho + (u^2 + v^2)/2$  – полная энергия на единицу объема;  $H = h + (u^2 + v^2)/2$  – полная энтальп-

пия,  $h = c_p T$  – статическая энтальпия;  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $\tau$  – тензор вязких напряжений с компонентами

$$\tau_{xx} = (\mu + \mu_T) \left( \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{V} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -(\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yy} = (\mu + \mu_T) \left( \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{V} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Вектор теплового потока представляется как

$$\mathbf{I} = -(\lambda + \lambda_T) \operatorname{grad}(T) + \tau \mathbf{V}$$

где  $\mu$  и  $\lambda$  – коэффициенты молекулярной вязкости и теплопроводности,  $\mu_T$  и  $\lambda_T$  – коэффициенты турбулентной вязкости и теплопроводности. Введены потоки

$$\mathbf{I}^q = -\left( \mu + \frac{\mu_T}{Pr_1} \right) \operatorname{grad}(q), \quad \mathbf{I}^\omega = -\left( \mu + \frac{\mu_T}{Pr_2} \right) \operatorname{grad}(\omega)$$

Вектор источника в уравнениях для плоского случая имеет вид

$$\mathbf{V} = J(0, 0, 0, 0, h_1 \rho \omega q, h_2 \rho \omega^2)^T$$

В  $q$ - $\omega$ -модели турбулентности [4] турбулентная вязкость определена

$$\mu_T = C_\mu f \frac{\rho q^2}{\omega}, \quad f = 1 - \exp\left(-\alpha \frac{\rho r_w q}{\mu}\right), \quad \alpha = 0,02, \quad C_\mu = 0,09$$

$$h_1 = C_{11} \left( C_\mu f \frac{S}{\omega^2} - \frac{2}{3} \frac{\operatorname{div} \mathbf{V}}{\omega} \right) - C_{12}, \quad h_2 = C_{21} \left( C_\mu \frac{S}{\omega^2} - C_{23} \frac{\operatorname{div} \mathbf{V}}{\omega} \right) - C_{22}$$

$$S = \frac{4}{3} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$C_{11} = C_{12} = 0,5, \quad C_{21} = 0,055 + 0,5f(q, r_w, \rho, \mu)$$

$$C_{22} = 0,833, \quad C_{23} = 2,4, \quad Pr_1 = 2, \quad Pr_2 = 2$$

где  $r_w$  – расстояние от стенки.

Для замыкания системы уравнений использовано уравнение состояния совершенного газа

$$p = \rho R T M^{-1}$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $M$  – молярный вес газа; зависимость молекулярного коэффициента вязкости от температуры по формуле  $\mu/\mu_\infty = (T/T_\infty)^{0,7}$  и условие постоянства чисел Прандтля  $Pr = \mu c_p / \lambda = 0,7$ ,  $Pr_T = \mu_T c_p / \lambda_T = 0,9$ .

На границе расчетной области, совпадающей с твердой поверхностью, ставились граничные условия: непротекания и прилипания; изотермичности поверхности ( $T_w = T_{w0} T_0 = \text{const}$ , где  $T_w$ ,  $T_0$  – температуры стенки и торможения газа);  $q = 0$  в силу затухания турбулентных пульсаций;  $d\omega/dn = 0$ .

Внешняя граница выбиралась таким образом, чтобы на ней течение газа всюду, в том числе в следе, было сверхзвуковым. На ней ставились записанные в инвариантах Римана условия излучения, соответствующие расходящейся волне. При решении задачи в каждой точке на внешней границе анализировались знаки собственных значений, определяющих направления распространения возмущений относительно  $\eta = \text{const}$ . Если собственное значение  $\lambda_i < 0$  ("входная" точка границы), то соответствующий инвариант  $\alpha_i$  вычислялся по параметрам набегающего потока. В противном случае использовалось мягкое условие, которое определялось линейной экстраполяцией  $\alpha_i$ ;

по значениям газодинамических переменных во внутренних точках расчетной области.

На линии симметрии использовались условия четности и нечетности зависимых переменных задачи.

2. Предварительные исследования показали, что необходимым элементом алгоритма решения уравнений Рейнольдса для сложных конфигураций потока является использование консервативных монотонных разностных схем второго и выше порядка точности. Другая особенность численного моделирования турбулентного течения газа обусловлена повышенной жесткостью системы уравнений. Поэтому для ее решения необходимо применять неявные разностные схемы.

Всем этим требованиям удовлетворяет методика, разработанная для численного анализа полных уравнений Навье – Стокса (ламинарный режим) [7,8]. Поэтому она была положена в основу численного интегрирования уравнений Рейнольдса.

Сформулированная выше задача решалась численно на основе интегро-интерполяционного метода (конечного объема). Его применение к уравнениям Рейнольдса, записанным в дивергентном виде, позволяет получить разностные аналоги законов сохранения.

При аппроксимации конвективной составляющей вектора потоков в полуцелых узлах использована монотонная схема типа Годунова [9] и приближенный метод Роу [10] решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва. Для повышения порядка аппроксимации (до второго) при интерполяции зависимых переменных на грань элементарной ячейки использован принцип минимальных производных [11].

При определении собственных значений и собственных векторов конвективной составляющей уравнений Рейнольдса использовано предположение, при котором конвективная часть уравнений сохранения импульса, энергии и массы (четыре уравнения) аппроксимировались по тем же формулам, что для ламинарного течения газа, а конвективные члены уравнений сохранения  $q$  и  $\omega$  аппроксимировались с использованием выражений

$$E_{j+1/2} = \frac{1}{2} [E(Q_L) + E(Q_R) - \Phi(\Lambda_{LR})(Q_R - Q_L)]$$

Здесь  $\Phi(\Lambda_{LR})$  и  $\Lambda_{LR}$  – диагональные матрицы, элементами которых являются  $\phi(\lambda_i)$  и  $\lambda_i$  соответственно, а  $\lambda_i = (u_\xi, u_\eta)$ ,  $u_\xi = u d\xi/dx + v d\xi/dy$ .

При аппроксимации диффузионной составляющей вектора потоков на грани элементарной ячейки применена разностная схема типа центральных разностей второго порядка точности.

Для решения нелинейных сеточных уравнений использован модифицированный метод Ньютона. Формирование матрицы Якоби осуществлялось при помощи конечных приращений вектора невязки по вектору искомых сеточных переменных. При аппроксимации уравнений линейный оператор имеет разреженную блочную структуру, а элементарный блок – плотная матрица размера  $6 \times 6$ . Для ускорения сходимости итерационного процесса использовано формирование матрицы Якоби на усеченном шаблоне  $3 \times 3$ , включая смешанные производные.

Решение системы линейных алгебраических уравнений, получаемых на итерации по нелинейности, осуществлялось при помощи итерационного метода обобщенных минимальных невязок [8]. Эта методика была многократно опробована в численных экспериментах и доказала свою надежность и высокую эффективность.

Для разрешения пограничных слоев вблизи твердых поверхностей выбирались три зоны толщиной  $1/Re$ ,  $2/Re^{1/2}$ ,  $1,5/Re^{1/5}$ , в каждой из которых после сгущения содержалось 6, 20 и 25% общего числа узлов в поперечном направлении соответственно.

3. В рамках изложенной выше постановки задачи и метода ее решения исследовано обтекание кругового цилиндра с изотермической поверхностью (температурный фактор  $T_{w0} = 0,5$ ) сверхзвуковым потоком совершенного газа при числах  $M_\infty = 2$  и  $5$  в

диапазоне  $Re = 10^4 - 10^8$ . При решении задачи задавались нормированные значения параметров  $q$  и  $\omega$  в набегающем потоке:  $q_\infty = 0,03$ ,  $\omega_\infty = 40$ . Расчеты выполнены на неравномерной сетке  $201 \times 201$ .

Выбор определяющих параметров обусловлен следующим. Известно, что число Рейнольдса перехода  $Re_{cr}$  в зависимости от числа Маха изменяется немонокотонным образом. Поэтому расчеты были выполнены при двух числах Маха:  $M_\infty = 2$ , при котором число  $Re_{cr}$  близко к минимальному значению, и  $M_\infty = 5$ , при котором оно существенно больше и результаты расчетов для которого являются естественным продолжением систематических исследований по обтеканию кругового цилиндра [1–3].

Для обоих чисел Маха течение газа во всем расчетном поле при  $Re = 10^4$  является ламинарным, а при  $Re \geq 3 \cdot 10^7$  ламинарно-турбулентный переход наблюдается в окрестности передней критической точки цилиндра. Поэтому расчеты в указанном диапазоне чисел  $Re$  позволяют проследить эволюцию пограничного слоя от чисто ламинарного до полностью турбулентного режима течения.

По найденным полям газодинамических переменных вычислялись локальные аэродинамические характеристики: коэффициенты давления  $c_p = (p - p_\infty)/m_\infty$ , сопротивления трения  $c_f = \tau_w/m_\infty$  и относительный поток тепла  $q_w = q_w^*/(V_\infty m_\infty)$  ( $m_\infty = 1/2 \rho_\infty V_\infty^2$  – скоростной напор набегающего потока). Положение точек отрыва  $\theta_S$  и присоединения  $\theta_R$  на обтекаемой поверхности вычислялись по распределению  $c_f$  ( $\theta$  – центральный угол, отсчитываемый от передней критической точки). Положение точки присоединения  $x_R$  на оси симметрии находилось по распределению скорости (числа Маха) вдоль этой оси. Кроме того, на основе полученных полей параметров турбулентности  $q$  и  $\omega$  вычислялось поле масштаба турбулентности  $l_T = q/\omega$ .

По распределениям локальных аэродинамических характеристик находились суммарные – коэффициенты сопротивления давления, сопротивления трения и аэродинамического сопротивления и относительный суммарный тепловой поток

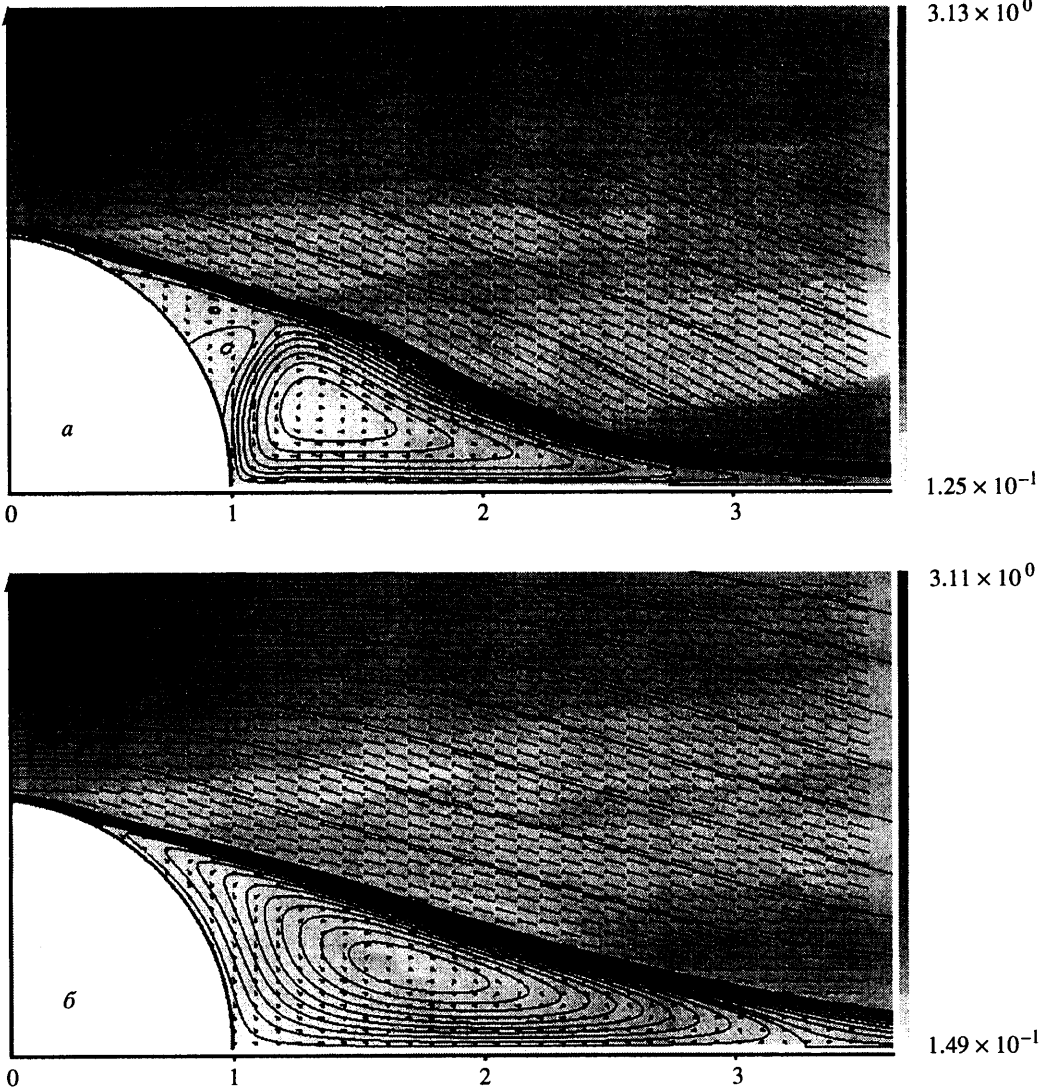
$$C_{xp} = \frac{X_p}{q_\infty D} = \frac{1}{2} \oint c_p dy, \quad C_{xF} = \frac{X_F}{q_\infty D} = \frac{1}{2} \oint c_f dx$$

$$Q = \frac{Q_w}{q_\infty V_\infty R} = \oint q_w d\theta, \quad C_x = C_{xp} + C_{xF}$$

4. В целом для обоих чисел Маха картины полей газодинамических переменных в качественном отношении схожи между собой и указывают на типичную для сверхзвукового потока схему обтекания затупленного тела. Она характеризуется наличием головной ударной волны, формированием за миделевым сечением внутренней ударной волны, которая вызывает глобальный отрыв пограничного слоя и образование замкнутой отрывной зоны в ближнем следе. С увеличением числа  $Re$  они претерпевают сходные структурные изменения.

При числах  $Re = 10^4$  ( $M_\infty = 2$ ) и  $10^4 - 10^5$  ( $M_\infty = 5$ ) во всем поле течения параметры турбулентности  $q$  и  $l_T$  малы и, следовательно, реализуется ламинарный режим обтекания цилиндра. При числах  $Re$ , превышающих указанные значения, реализуется смешанный режим обтекания. С увеличением числа  $Re$  турбулентность генерируется последовательно в дальнем следе, в слое смешения в окрестности точки отрыва, в пограничном слое на поверхности цилиндра и распространяется далее вниз по потоку, концентрируясь в некоторой окрестности оси следа – турбулентный след. В турбулентном следе максимальные значения параметров  $q$  и  $l_T$  наблюдаются в окрестности внешней границы и на оси следа.

О качественном и количественном влиянии числа  $Re$  на структуру ближнего следа можно судить по топологии ламинарного и турбулентного отрывных течений в кормовой области цилиндра (фиг. 1), а также по распределениям числа Маха (фиг. 2) и температуры (фиг. 3) на оси следа.

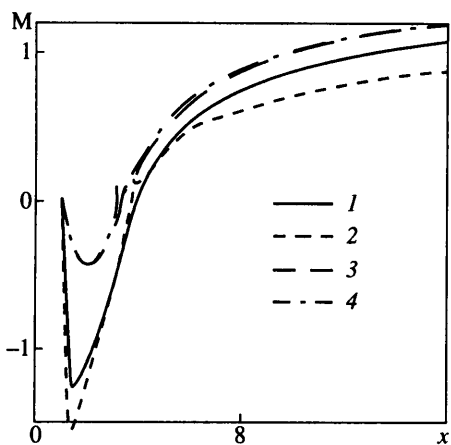


Фиг. 1. Картина линий тока, векторное поле скорости и поле плотности  $\rho/\rho_\infty$  в кормовой части цилиндра при  $M_\infty = 2$ : *a* –  $Re_\infty = 3 \cdot 10^4$ , ламинарный отрыв; *б* –  $Re_\infty = 3 \cdot 10^5$ , турбулентный отрыв

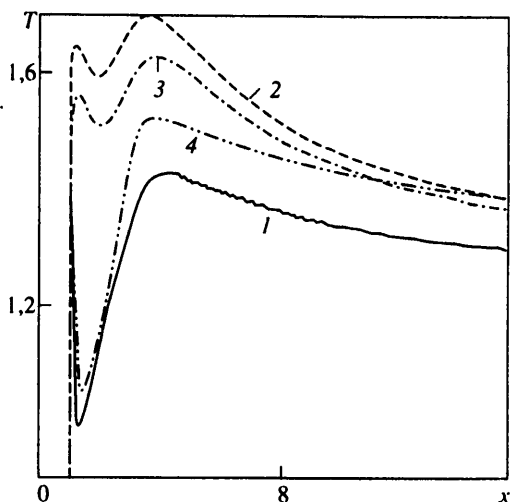
При ламинарном режиме наблюдается сложная структура поля течения в отрывной зоне (фиг. 1, *a*), которая указывает на наличие вторичного отрыва и присоединения потока. Внешняя граница отрывной зоны (разделяющая линия тока) является существенно криволинейной. Турбулизация течения приводит к упрощению структуры течения в отрывной зоне (фиг. 1, *б*) – исчезает вторичный отрыв потока, сокращается длина отрывной зоны, а разделяющая линия тока близка к прямой линии.

Характер распределения числа Маха по оси следа (фиг. 2) является одинаковым в качественном отношении для рассмотренных чисел  $Re$ ; в количественном отношении представленные зависимости четко разбиваются на две группы – одна из них соответствует ламинарному, другая – турбулентному течению в ближнем следе.

Распределение температуры на оси ближнего следа (фиг. 3) является немонотонным и характеризуется тремя основными экстремальными точками (от задней



Фиг. 2. Распределение числа Маха на оси следа за изотермическим круговым цилиндром при  $M_\infty = 2$ : 1-4 –  $Re = 10^4, 3 \cdot 10^4, 5 \cdot 10^4, 10^8$



Фиг. 3. Распределение температуры на оси следа за изотермическим круговым цилиндром при  $M_\infty = 2$ : 1-4 –  $Re = 10^4, 10^8, 5 \cdot 10^4, 3 \cdot 10^4$

критической точки вниз по потоку): 1 – максимум температуры в пограничном слое; 2 – минимум температуры в области, где скорость возвратного течения достигает максимального значения; 3 – максимум температуры в окрестности точки присоединения потока. Следует отметить, что для ламинарного течения кроме указанных трех экстремальных точек наблюдаются еще две, которые обусловлены существованием слабой внутренней ударной волны в отрывной зоне и тесно примыкают к первой экстремальной точке.

Влияние числа  $Re$  на структуру ближнего следа подробно рассмотрим при  $M_\infty = 2$ , а затем – особенности, обусловленные переходом к  $M_\infty = 5$ .

При числе  $Re = 10^4$  ( $M_\infty = 2$ ) течение в пограничном слое на поверхности цилиндра и в ближнем следе является ламинарным. В отрывной зоне максимальные скорости достигают сверхзвуковых значений ( $M_{\max} \approx 1,25$ , фиг. 2). Вследствие этого в окрестности задней критической точки формируется вязкая ("размытая") внутренняя ударная волна, которая наиболее четко проявляет себя в распределении температуры и смыкается с динамическим и температурным пограничными слоями.

В области "горла" происходит перестройка поля течения, которая характеризуется взаимодействием внутренних ударных волн и волн разрежения и приводит к образованию "хвостового" скачка уплотнения. За хвостовым скачком уплотнения формируется течение типа дальнего следа; согласно распределению коэффициента давления, выход на дальний след наблюдается при  $x \sim 8$ , где имеет место изобарическое течение ( $c_p \approx 0$ ).

При числе  $Re = 3 \cdot 10^4$  течение в ближнем следе ламинарное, но увеличилась интенсивность течения в отрывной зоне (фиг. 2), максимальное число Маха в ней достигает сверхзвукового значения ( $M_{\max} \approx 1,55$ ). Вместе с тем в дальнем следе в окрестности выходной границы параметр турбулентности  $q$  возрастает настолько, что возникает начало переходного течения. При  $Re = 5 \cdot 10^4$  характеристики ближнего следа соответствуют турбулентному режиму течения. Следовательно, в интервале  $3 \cdot 10^4 \leq Re < 5 \cdot 10^4$  происходит переход от ламинарного к турбулентному режиму течения в ближнем следе. Таким образом, небольшого увеличения числа  $Re$  достаточно для того, чтобы начало ламинарно-турбулентного перехода из дальнего следа

переместилось в область отрыва пограничного слоя и привело к полной турбулизации течения в ближнем следе.

При числах  $Re \geq 5 \cdot 10^4$  в следе за телом реализуется турбулентное течение газа и наблюдается стабилизация распределений рассматриваемых величин на оси следа (независимость распределения от числа Рейнольдса). В структуре поля течения произошли качественные изменения: уменьшились длина отрывной зоны, которая практически не зависит от числа  $Re$ , и скорость в отрывной зоне, так что максимальные скорости в ней приняли дозвуковые значения ( $M_{\max} \approx 0,4$ , фиг. 2); заметно повысился уровень температуры в ближнем следе в области квазиневязкого течения (если для ламинарного течения  $T_{\max}/T_0 \approx 0,78$ , то для турбулентного –  $0,95$ , фиг. 3).

Распределение коэффициента давления показывает, что на оси ближнего следа имеет место достаточно заметное разрежение; по мере удаления от задней критической точки оно ослабевает и в области дальнего следа  $c_p \approx 0$ . Распределения газодинамических переменных также показывают, что для всех рассмотренных чисел  $Re$  при  $x \approx 8$  ближний след переходит в дальний, т.е. при  $x > 8$  наблюдается изобарическое течение с монотонным возрастанием скорости и плотности и монотонным уменьшением температуры.

При числе  $M_\infty = 5$  главное отличие состоит в том, что переход ламинарного течения в турбулентное наблюдается при больших числах  $Re$ . Согласно расчетам, в ближнем следе при  $Re \leq 3 \cdot 10^5$  реализуется ламинарное течение, а при  $Re \geq 10^6$  – турбулентное.

Распределение коэффициента давления  $c_p$  показывает, что на оси ближнего следа пристеночная область разрежения сменяется областью сжатия. Максимум  $c_p$  достигается при  $x \sim 6$  и далее вниз по потоку давление монотонно уменьшается; однако во всей расчетной области  $c_p > 0$ . В отрывной зоне при турбулентном режиме скорость течения дозвуковая, однако по сравнению с числом  $M_\infty = 2$  ее максимальное значение возросло и составляет примерно  $0,5$ . В ближнем следе в области квазиневязкого течения для максимальной температуры имеем  $T_{\max}/T_0 \approx 0,77$  при ламинарном режиме и  $0,95$  при турбулентном режиме, т.е. по сравнению с числом  $M_\infty = 2$  уровень температуры сохранился при обоих режимах течения.

Одной из важных характеристик, реагирующих на изменение структуры поля течения, является длина  $x_R$  замкнутой отрывной зоны, образующейся за цилиндром при больших числах  $Re$  (фиг. 4). Ее поведение в зависимости от числа  $Re$  для обоих чисел Маха имеет разный характер, поскольку число Рейнольдса перехода заметно зависит от числа Маха.

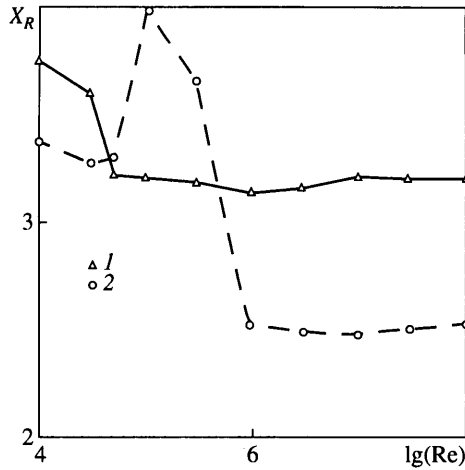
При числе  $M_\infty = 2$  на режиме ламинарного течения длина отрывной зоны слабо уменьшается с ростом числа  $Re$ . Затем при  $Re = 5 \cdot 10^4$  скачкообразно уменьшается в связи с турбулизацией течения в ближнем следе; при последующем увеличении числа  $Re$  она незначительно изменяется немонотонным образом.

Для  $M_\infty = 5$  длина отрывной зоны в зависимости от числа Рейнольдса ведет себя аналогично случаю  $M_\infty = 2$  с тем отличием, что скачкообразное уменьшение ее, обусловленное турбулизацией течения в ближнем следе, наблюдается при  $Re \approx 10^6$ .

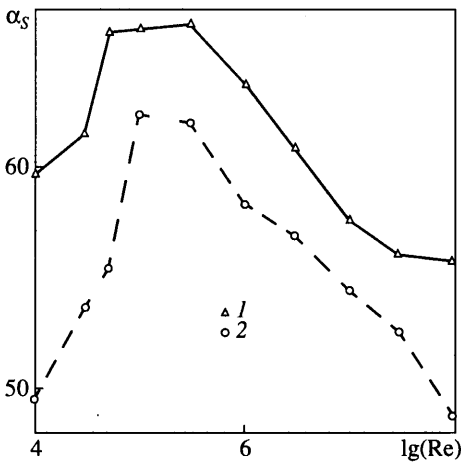
5. Для исследования влияния числа  $Re$  на структуру поля течения в окрестности цилиндра необходимо привлечь расчетные данные по распределению локальных аэродинамических характеристик по его поверхности.

На лобовой поверхности цилиндра распределение коэффициента давления  $c_p$  практически не зависит от числа  $Re$ , т.е. в соответствии с асимптотической теорией первого приближения влияние сил вязкости проявляется в тонком пограничном слое, который не взаимодействует с внешним потоком. Поэтому распределения локальных аэродинамических характеристик имеют типичный вид, свойственный пограничному слою на изотермической поверхности при ламинарном, переходном и турбулентном режимах течения. Из-за этого основное внимание уделено анализу локальных аэродинамических характеристик только кормовой части тела.

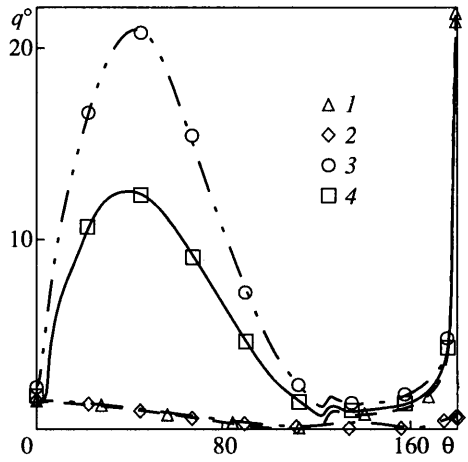




Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 4. Длина отрывной зоны  $x_R$  в зависимости от  $\text{Re}$  для изотермической поверхности кругового цилиндра: 1 и 2 –  $M_\infty = 2$  и 5

Фиг. 5. Положение точки первичного отрыва  $\alpha_S$  на изотермической поверхности кругового цилиндра в зависимости от  $\text{Re}$ : 1 и 2 –  $M_\infty = 2$  и 5

Фиг. 6. Распределение величины  $q^0 = q_w \sqrt{\text{Re}}$  на изотермической поверхности кругового цилиндра при  $M_\infty = 2$ : 1–4 –  $\text{Re} = 10^4, 10^7, 3 \cdot 10^7, 10^8$

Важной характеристикой, служащей тонким показателем изменения структуры поля течения при увеличении  $\text{Re}$ , является зависимость положения точки первичного отрыва  $\theta_S(\alpha_S = 180^\circ - \theta_S - \text{центральный угол, отсчитываемый от задней критической точки})$  от числа  $\text{Re}$  (фиг. 5). Характер изменения положения точки первичного отрыва на поверхности цилиндра в зависимости от  $\text{Re}$  является однотипным для обоих чисел Маха; при фиксированном  $\text{Re}$  увеличение числа Маха приводит к смещению точки отрыва вниз по потоку.

По поведению точки отрыва при числе  $M_\infty = 2$  диапазон числа  $\text{Re}$  можно разделить на три интервала: 1)  $\text{Re} \leq 3 \cdot 10^4$ ; 2)  $5 \cdot 10^4 \leq \text{Re} \leq 3 \cdot 10^5$ ; 3)  $\text{Re} > 3 \cdot 10^5$ .

В первом интервале реализуется ламинарное течение во всем расчетном поле и точка отрыва с ростом числа  $Re$  смещается вверх по потоку; в донной области распределения местных характеристик типичны для ламинарного течения при больших числах  $Re$ . Немонотонное распределение коэффициента давления с рядом локальных экстремумов свидетельствует об интенсивном возвратном течении в отрывной зоне, в которой наблюдаются вторичный отрыв и присоединение потока; это подтверждается распределением коэффициента  $c_f$ . Более того, расчетные данные при  $Re = 3 \cdot 10^4$  указывают на наличие слабого третичного отрыва и присоединения потока, т.е. при больших числах  $Re$ , близких к критическому, наблюдается многослойная структура течения в ламинарной отрывной зоне. Тепловой поток в задней критической точке достигает локального максимума. Он по величине меньше значения в передней критической точке (фиг. 6, на которой приведено распределение величины  $q^\circ = q_w \sqrt{Re}$  с целью уменьшения влияния числа  $Re$ , выравнивания порядков рассматриваемых величин и выделения переходного и турбулентного режимов).

Второй и третий интервалы  $Re$  характеризуются наличием турбулентного ближнего следа и различаются условиями отрыва пограничного слоя.

При переходе ко второму интервалу точка отрыва резко смещается вверх по потоку и с последующим увеличением числа  $Re$  медленно перемещается в том же направлении. На правом конце интервала при  $Re = 3 \cdot 10^5$  точка отрыва пограничного слоя и, следовательно, внутренняя ударная волна занимают крайнее положение вверх по потоку. Все это указывает на то, что на поверхности цилиндра происходит отрыв ламинарного пограничного слоя и далее вниз по потоку в слое смешения наблюдается ламинарно-турбулентный переход.

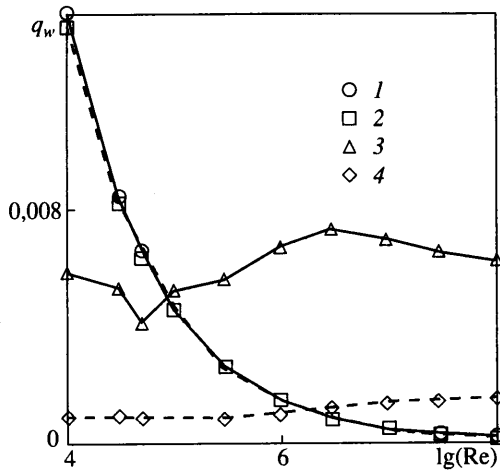
Переход от второго интервала к третьему происходит непрерывным образом. С увеличением числа  $Re$  точка отрыва непрерывно смещается вниз по потоку, обуславливая увеличение интенсивности внутренней ударной волны и перепада давления в ней. При этом точка ламинарно-турбулентного перехода при числах  $Re \leq 10^7$  ( $M_\infty = 2$ ) практически совпадает с точкой отрыва потока, а при  $Re > 10^7$  располагается на поверхности цилиндра перед точкой отрыва.

При числах  $Re \geq 5 \cdot 10^4$  изменяется поведение локальных характеристик в кормовой части тела. В отрывной зоне наблюдается заметное разрежение и немонотонность распределения давления, которая усиливается по мере возрастания числа  $Re$ . В рассмотренном диапазоне  $Re$  это не вызывает вторичного отрыва потока, который имеет место при ламинарном течении. Иными словами, турбулизация течения приводит к упрощению структуры отрывной зоны.

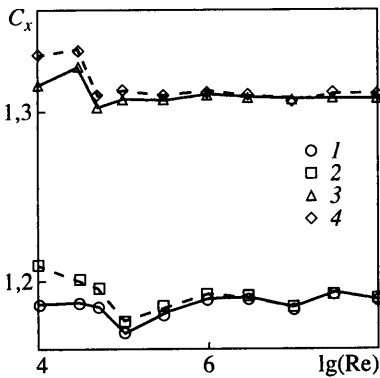
Тепловой поток наиболее чувствителен к изменению режима течения. В задней критической точке он имеет локальный максимум, который с увеличением числа  $Re$  переходит в абсолютный. Наиболее четко это видно на фиг. 7, где проведено сопоставление относительных тепловых потоков в передней и задней критических точках. В передней критической точке  $q_w$  монотонно уменьшается с ростом числа  $Re$  (обратно пропорционально  $\sqrt{Re}$  в соответствии с асимптотической теорией). В задней критической точке значение  $q_w$  изменяется относительно слабо в зависимости от  $Re$  (в первом приближении постоянно) и при достаточно больших числах  $Re$  значительно превышает его значение в передней критической точке.

Для  $M_\infty = 5$  наблюдается схожая картина влияния числа  $Re$  на обтекание цилиндра с поправкой на то, что по сравнению с предыдущим случаем возросло число  $Re_{cr}$ . Вследствие этого при  $Re \leq 3 \cdot 10^5$  течение в ближнем следе ламинарное, а при  $Re \geq 10^6$  – турбулентное. Увеличение числа Маха приводит к повышению уровня давления в кормовой части цилиндра, где наблюдается слабое разрежение; при турбулентном течении степень разрежения возрастает.

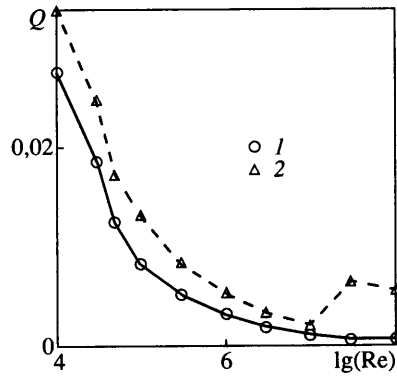
При ламинарном течении с ростом числа  $Re$  точка отрыва смещается вверх по потоку; в отрывной зоне наблюдается интенсивное возвратное течение, в котором



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Фиг. 7. Местный тепловой поток  $q_w(\theta)$  в передней и задней ( $\theta = 0$  и  $180^\circ$ ) критических точках изотермической поверхности: 1,2 –  $\theta = 0$ ,  $M_\infty = 2$  и 5; 3,4 –  $\theta = 180^\circ$ ,  $M_\infty = 2$ , 5

Фиг. 8. Поведение коэффициентов сопротивления  $C_{xp}$  и  $C_x$  в зависимости от  $\text{Re}$  для изотермического кругового цилиндра: 1, 2 –  $C_{xp}$  и  $C_x$  для  $M_\infty = 2$ ; 3, 4 –  $C_{xp}$  и  $C_x$  для  $M_\infty = 5$

Фиг. 9. Поведение суммарного теплового потока  $Q$  в зависимости от  $\text{Re}$  для изотермической поверхности: 1, 2 –  $M_\infty = 5$  и 2

максимальные скорости принимают сверхзвуковые значения и имеет место вторичный отрыв и присоединение потока. Кроме того, при  $\text{Re} = 3 \cdot 10^5$  реализуются третичный отрыв и присоединение потока.

При турбулентном течении по мере увеличения числа  $\text{Re}$  точка отрыва смещается вниз по потоку, длина отрывной зоны практически остается постоянной, течение в отрывной зоне дозвуковое и нет вторичного отрыва потока, т.е. происходит упрощение структуры отрывной зоны. Локальный максимум теплового потока в задней критической точке сохраняется практически постоянным по величине и при больших числах  $\text{Re}$  становится абсолютным, т.е. превышает его значение в области безотрывного обтекания лобовой поверхности тела.

Переход ламинарного течения в турбулентное наблюдается в окрестности точки отрыва, что отчетливо видно по резкому увеличению теплового потока с отходом от

ламинарной зависимости. Только при  $Re = 10^8$  переход происходит на некотором расстоянии до точки отрыва.

6. По местным аэродинамическим характеристикам были рассчитаны коэффициенты аэродинамического сопротивления  $C_x$  и его составляющие – коэффициенты сопротивления давления  $C_{xp}$  и трения  $C_{xf}$ . На фиг. 8 приведены зависимости коэффициентов  $C_{xp}$  и  $C_x$  от числа  $Re$  при  $M_\infty = \text{const}$ ; разность между этими зависимостями определяет величину коэффициента сопротивления трения.

При  $M_\infty = 2$  и ламинарном течении коэффициент  $C_x$  возрастает по мере увеличения числа  $Re$  из-за смещения точки отрыва вверх по потоку и понижения давления в донной области. Турбулизация течения в ближнем следе при  $Re = 5 \cdot 10^4$  приводит к снижению коэффициента аэродинамического сопротивления примерно на 2%, т.е. можно говорить о кризисе сопротивления, который существенно слабее по сравнению с движением при дозвуковых скоростях. В несжимаемом и дозвуковом потоках кризис сопротивления объясняется заметным смещением точки отрыва вниз по течению и резким уменьшением коэффициента  $C_{xp}$ . При  $M_\infty = 2$  турбулизация течения приводит к движению точки отрыва вверх по потоку, но при этом повышается давление в данной области из-за изменения структуры отрывной зоны, что и обуславливает уменьшение коэффициента сопротивления давления. При последующем увеличении числа  $Re$  величина  $C_x$  остается примерно постоянной – отклонение от среднего значения не превышает 0,1%.

Иная картина имеет место при числе  $M_\infty = 5$ . По поведению зависимости  $C_x = C_x(\log Re)$  выделяются характерные интервалы по числу  $Re$ . В интервале  $Re = 10^4 - 5 \cdot 10^4$ , в котором реализуется ламинарное течение, коэффициент аэродинамического сопротивления слабо уменьшается при увеличении числа  $Re$  (линейная зависимость по параметру  $\epsilon = Re^{-1/2}$ ). При  $Re = 10^5$  он скачкообразно принимает наименьшее значение – понижение  $C_x$  примерно на 1,5%. Этот слабый кризис сопротивления происходит при ламинарном течении и характеризуется крайним левым положением точки отрыва на поверхности цилиндра и трансзвуковым значением максимальной скорости в отрывной зоне. Следующий характерный интервал  $Re = 10^5 - 10^6$ , в котором коэффициент аэродинамического сопротивления возрастает по мере увеличения числа  $Re$  (линейная зависимость от параметра  $\epsilon$ ); при этом в ближнем следе ламинарное течение сменяется турбулентным. При последующем росте числа  $Re$  ( $Re > 10^6$ ) его значение изменяется немонотонным образом в очень небольших пределах и отслеживает эволюцию положения точки ламинарно-турбулентного перехода.

Для прикладных целей, например для термоанемометрии, представляет интерес величина суммарного потока тепла к обтекаемой поверхности цилиндра. Результаты расчетов (фиг. 9) показывают, что с увеличением числа  $Re$  он в целом монотонно уменьшается. На приведенных зависимостях  $Q = Q(\log Re)$  можно выделить ряд характерных интервалов, каждому из которых соответствует однотипная структура поля течения.

**Заключение.** На основе уравнений Рейнольдса с использованием дифференциальной  $q-\omega$ -модели турбулентности исследовано обтекание кругового цилиндра с изотермической поверхностью сверхзвуковым потоком при числах  $M_\infty = 2$  и 5 в диапазоне числа  $Re = 10^4 - 10^8$ . При этом для  $Re \leq 3 \cdot 10^4$  ( $M_\infty = 2$ ) и  $Re \leq 3 \cdot 10^5$  ( $M_\infty = 5$ ) реализуется ламинарное обтекание цилиндра, а при больших  $Re$  – смешанное (турбулентное) обтекание.

При смешанном обтекании турбулентность по мере увеличения числа  $Re$  генерируется последовательно в дальнем следе, в слое смещения в окрестности точки отрыва, в пограничном слое на поверхности цилиндра и распространяется далее вниз по потоку, концентрируясь в некоторой окрестности оси следа (турбулентный след).

При реализации турбулентного течения в ближнем следе точка отрыва пограничного слоя смещается вниз по потоку, стабилизируется длина отрывной зоны и ряд

других ее характеристик, в частности значение теплового потока в задней критической точке; с увеличением числа  $Re$  этот локальный максимум переходит в абсолютный. Это означает, что тепловой поток в задней критической точке превосходит, и значительно, его максимальное значение на лобовой поверхности цилиндра. Это важно с точки зрения аэродинамического нагрева – при больших числах  $Re$  возникает проблема теплозащиты поверхности в донной области.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башкин В.А., Егоров И.В., Егорова М.В. Обтекание кругового цилиндра сверхзвуковым потоком совершенного газа // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 6. С. 107–115.
2. Башкин В.А., Егоров И.В., Егорова М.В. Влияние температурного фактора на аэродинамические характеристики кругового цилиндра в сверхзвуковом потоке совершенного газа // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 156–162.
3. Башкин В.А., Егоров И.В., Егорова М.В., Иванов Д.В. Зарождение и развитие отрывного течения за круговым цилиндром в сверхзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 6. С. 27–36.
4. Coakley T.J., Huang P.G. Turbulence modeling for high speed flows // AIAA Paper. 1993. № 92–0436.
5. Ivanov D.V., Obabko A.V., Yegorov I.V. Simulation of separated flows on the base of differential turbulence model // AIAA Paper. 1997. № 97–1861. 11 p.
6. Гиневский А.С., Иоселевич В.А., Колесников А.В. и др. Методы расчета турбулентного пограничного слоя // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1978. Т. 11. Р. 155–304.
7. Башкин В.А., Егоров И.В., Иванов Д.В. Применение метода Ньютона к расчету внутренних сверхзвуковых отрывных течений // ПМТФ. 1997. Т. 38. № 1. С. 30–42.
8. Бабаев И.Ю., Башкин В.А., Егоров И.В. Численное решение уравнений Навье – Стокса с использованием итерационных методов вариационного типа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 11. С. 1693–1703.
9. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
10. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference scheme // J. Comput. Phys. 1981. V. 43. № 2. Р. 357–372.
11. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Учен. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С.68–77.

Москва

Поступила в редакцию  
17.III.1999